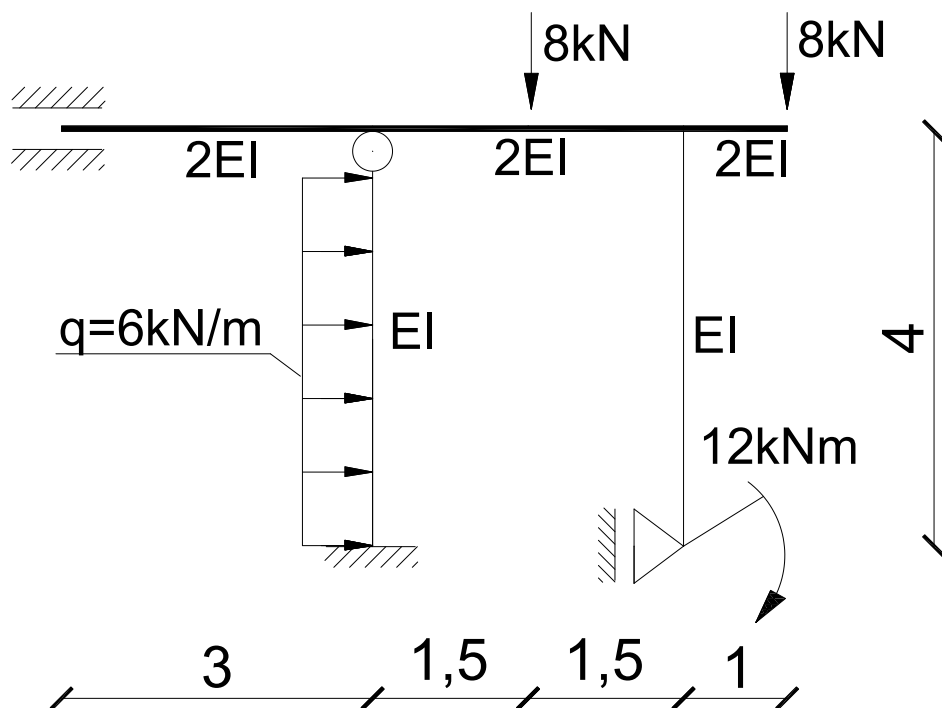
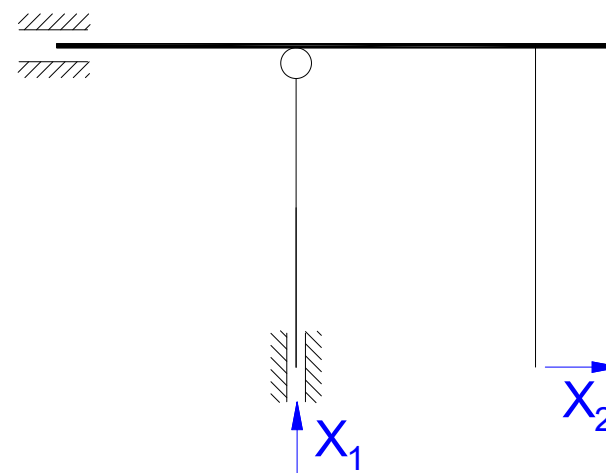


Wyznaczanie wykresów sił N,T,M dla ramy statycznie niewyznaczalnej metodą sił



Schemat podstawowy:

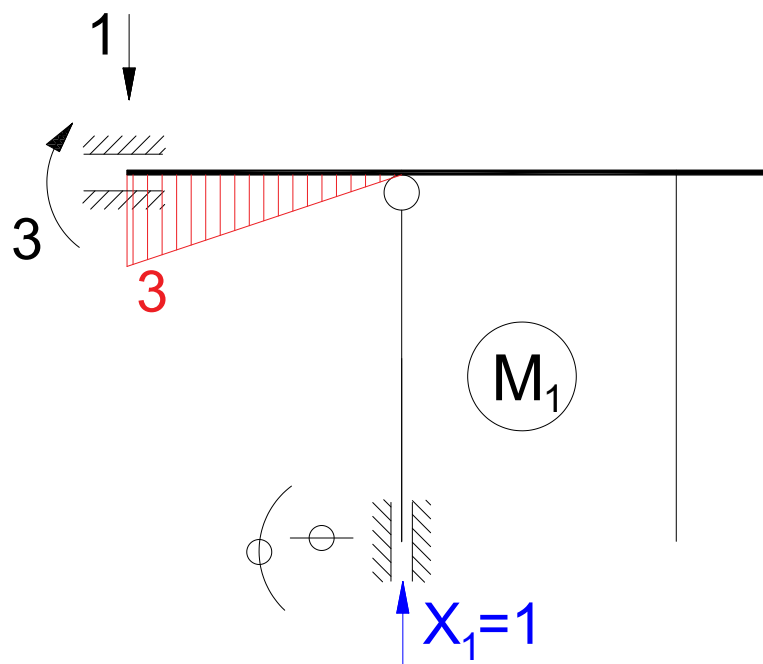


$$n_s = lr - lp - 3 = 6 - 1 \cdot 1 - 3 = 2$$

Rama dwukrotnie statycznie niewyznaczalna

Wykresy od jednostkowych nadliczbowych i współczynniki układu met. sił:

Stan $X_1=1$

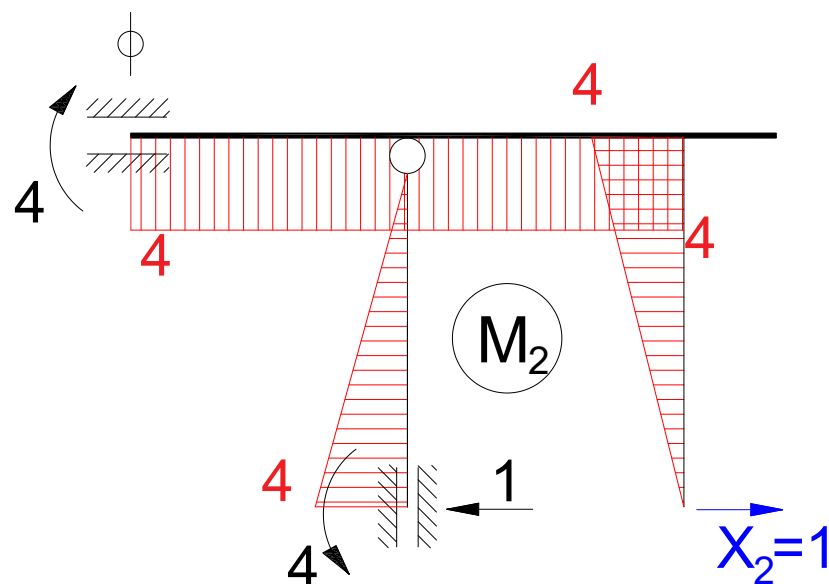


$$\delta_{11} = \frac{4,5}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{9}{EI}$$

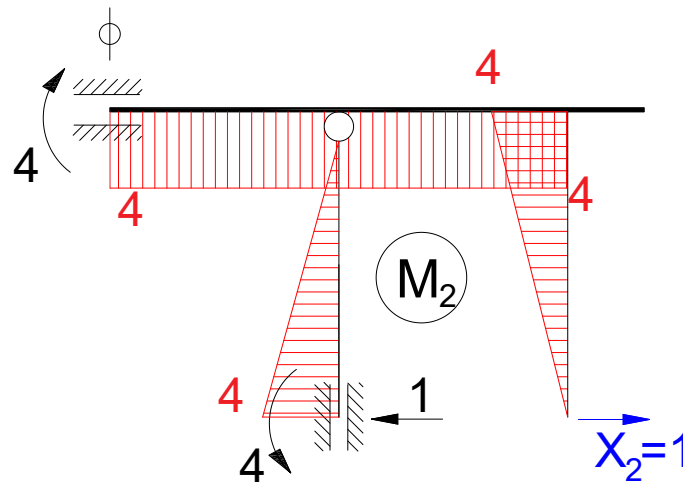
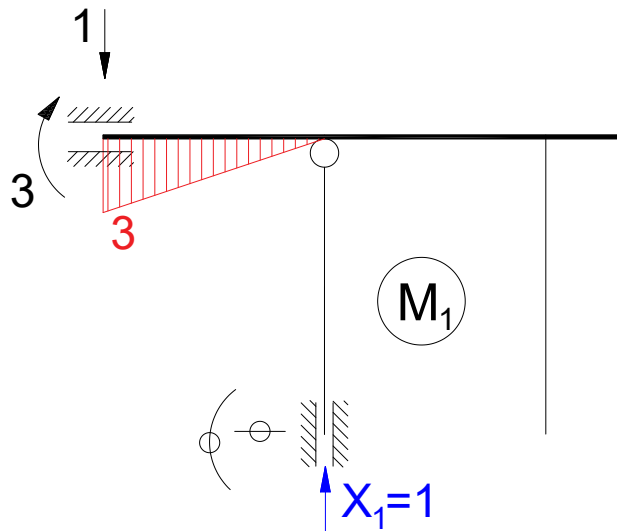
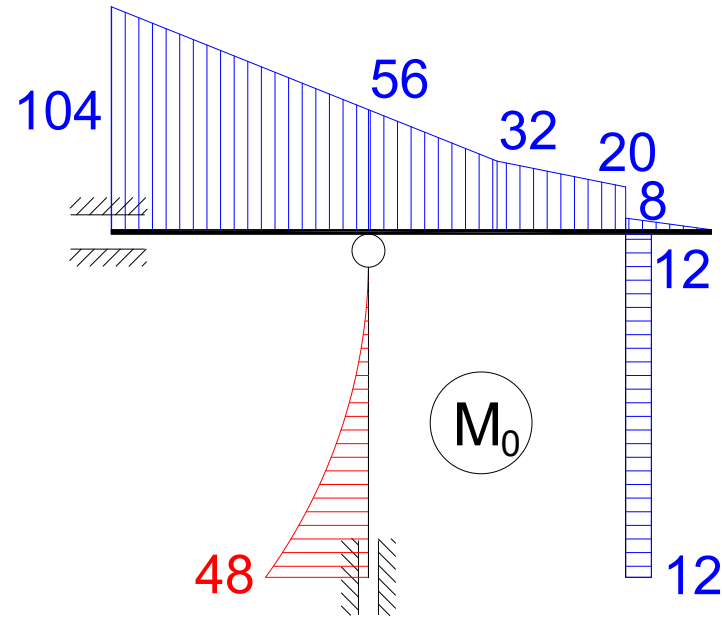
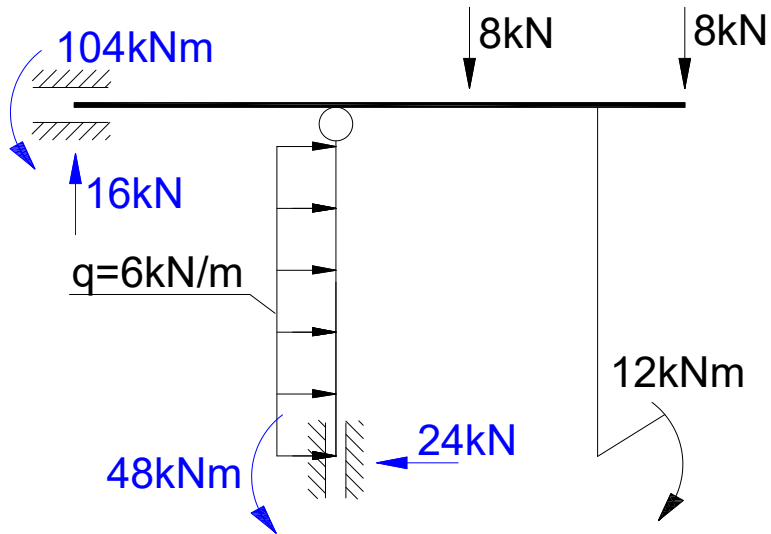
$$\delta_{22} = \frac{272}{3EI}$$

Stan $X_2=1$



Wykres momentów od obciążenia zewnętrznego na schemacie podstawowym:

Obciążenie zewnętrzne



$$\delta_{10} = -\frac{198}{EI}$$

$$\delta_{20} = -\frac{594}{EI}$$

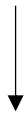
Układ równań metody sił:

$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{12} \cdot X2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X1 + \delta_{22} \cdot X2 + \delta_{20} = 0$$

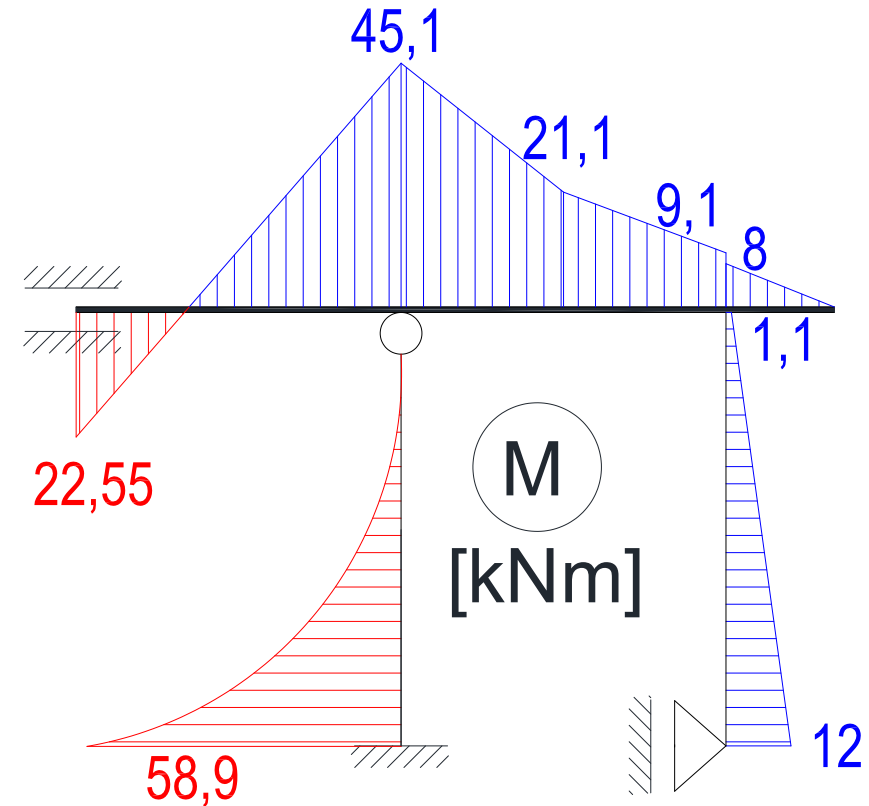
$$\frac{4,5}{EI} \cdot X1 + \frac{9}{EI} \cdot X2 - \frac{198}{EI} = 0$$

$$\frac{9}{EI} \cdot X1 + \frac{272}{3EI} \cdot X2 - \frac{594}{EI} = 0$$



$$X1 = 38,55 kN$$

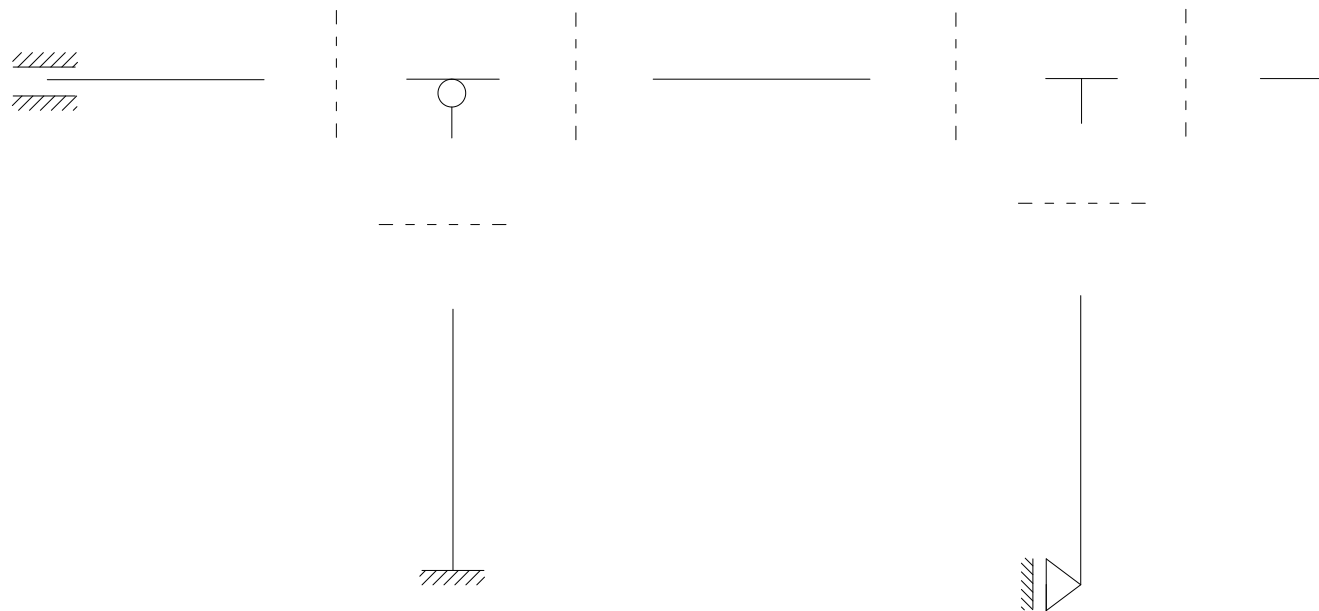
$$X2 = 2,725 kN$$



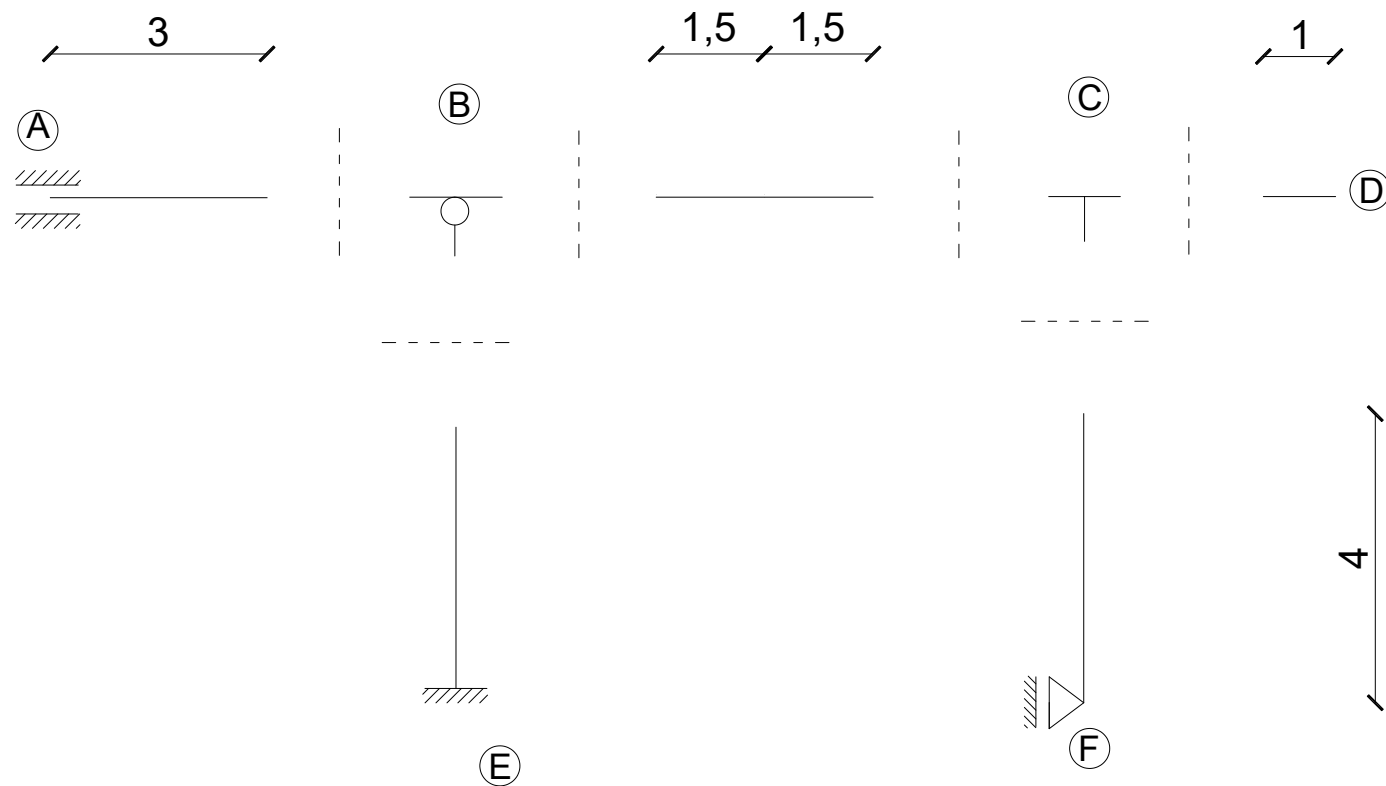
Wyznaczenie końcowego wykresu momentów:

$$M_i = M_{i1} \cdot X1 + M_{i2} \cdot X2 + M_0$$

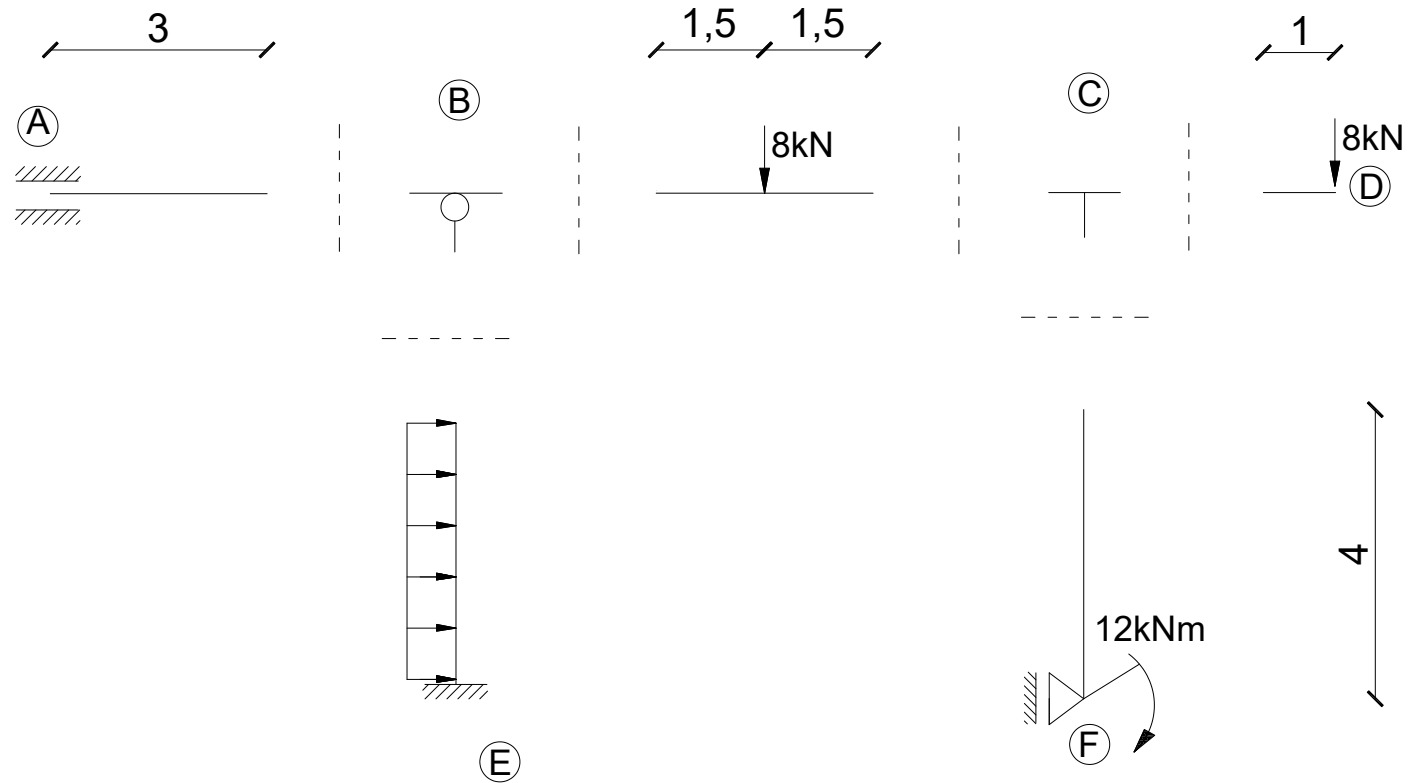
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



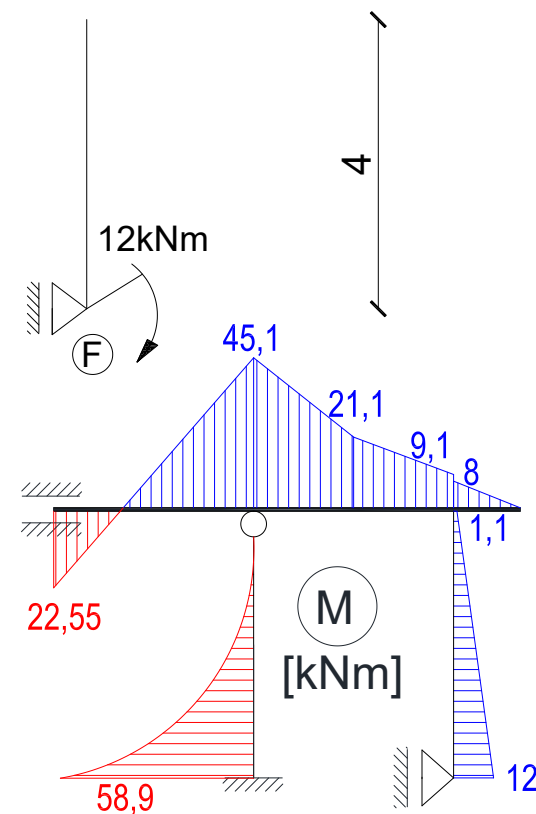
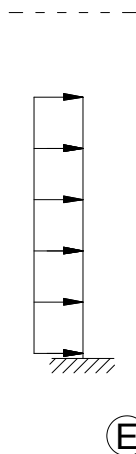
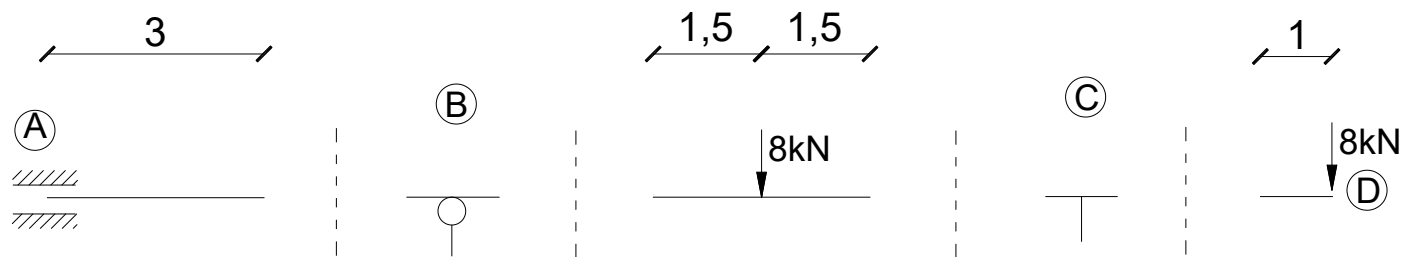
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

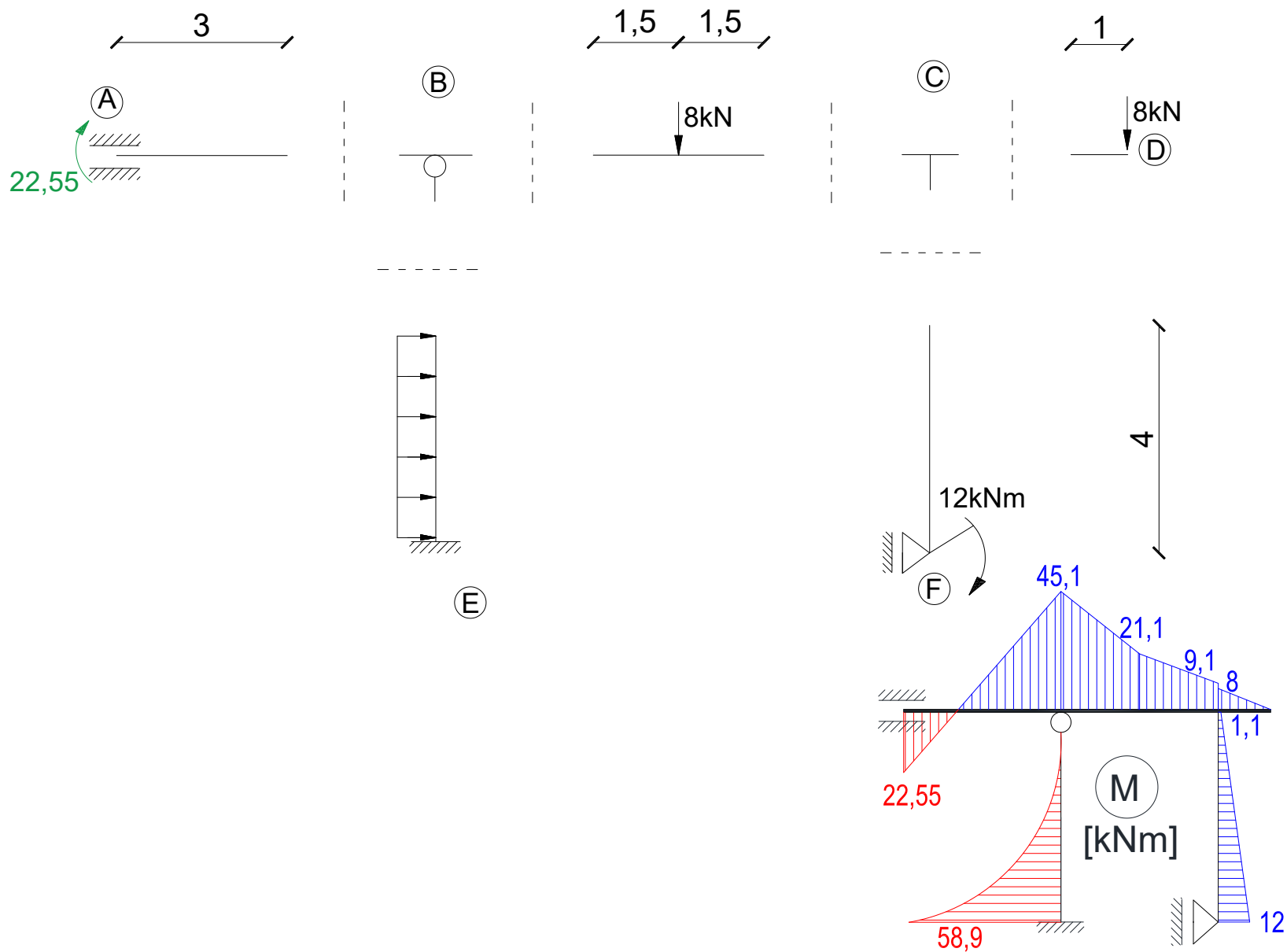


Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

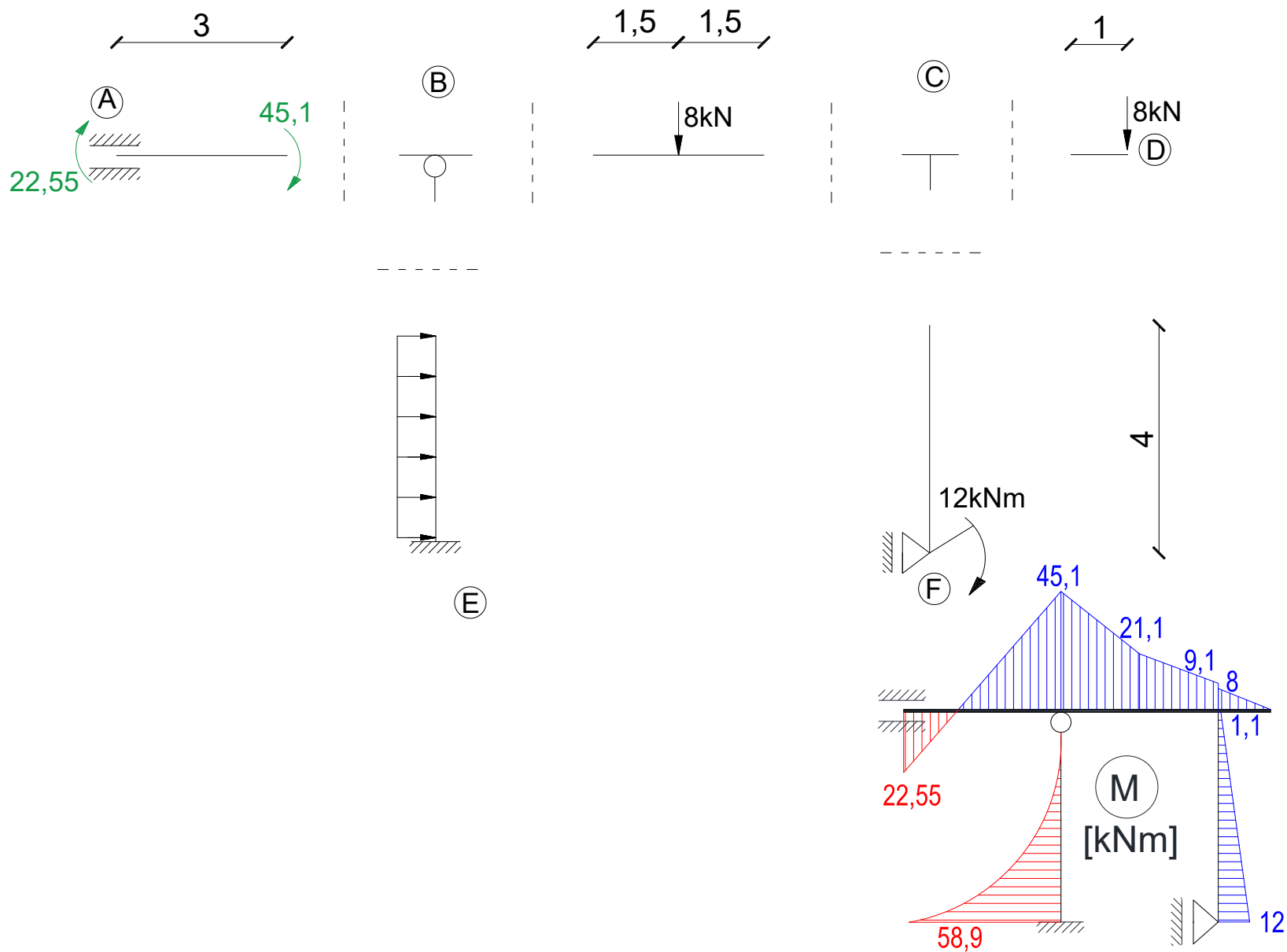


dr inż. Hanna Weber

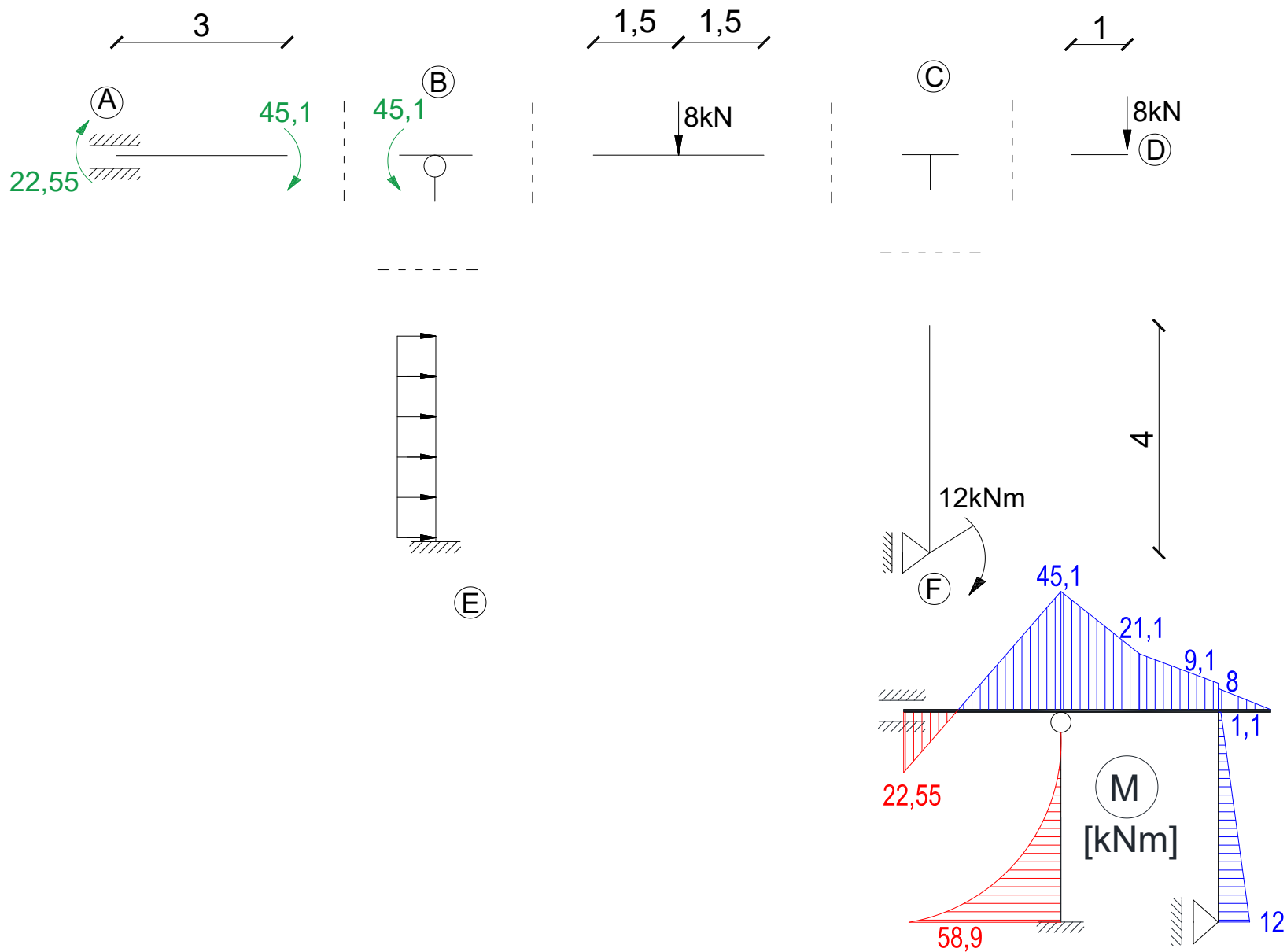
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



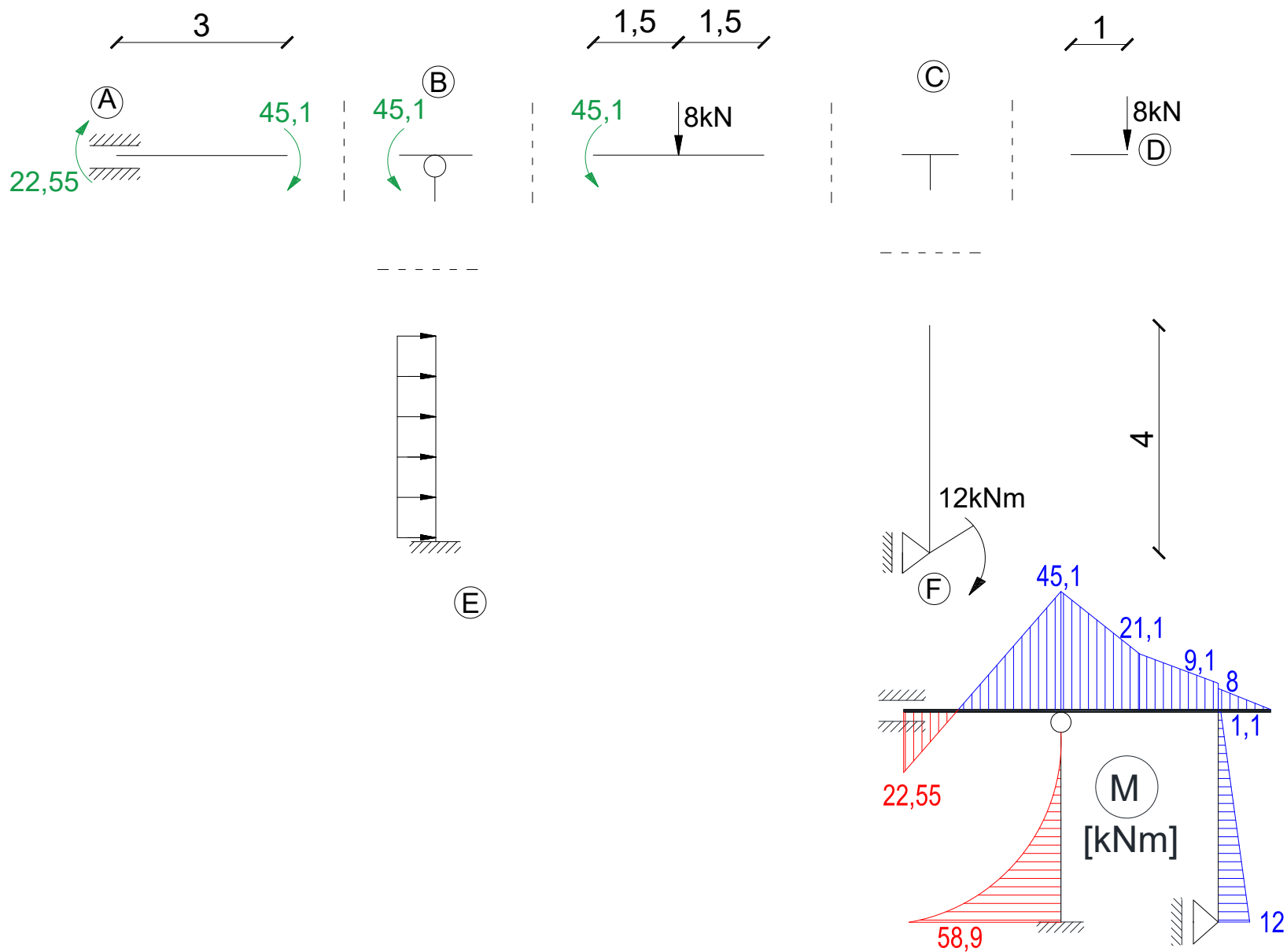
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



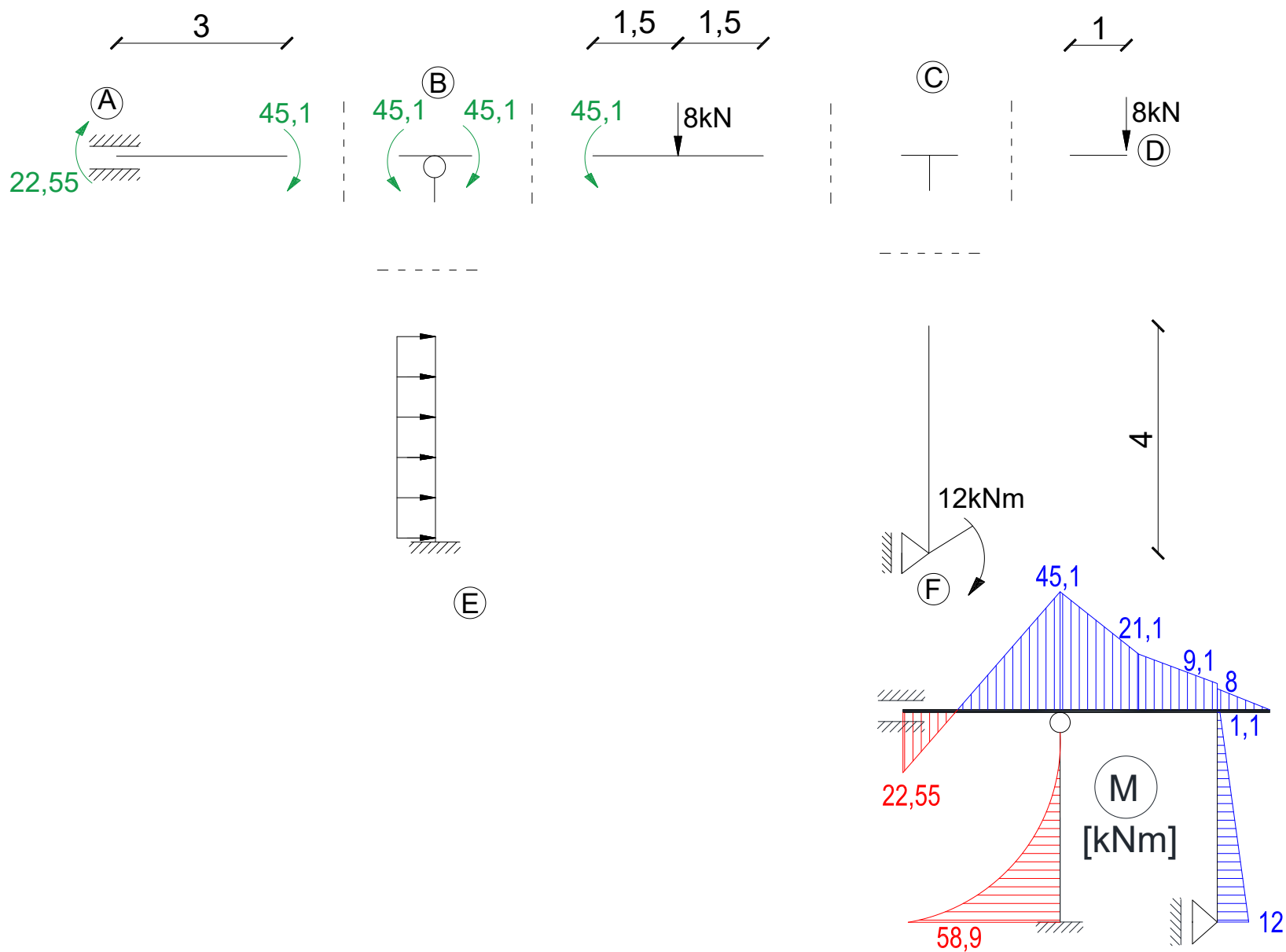
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



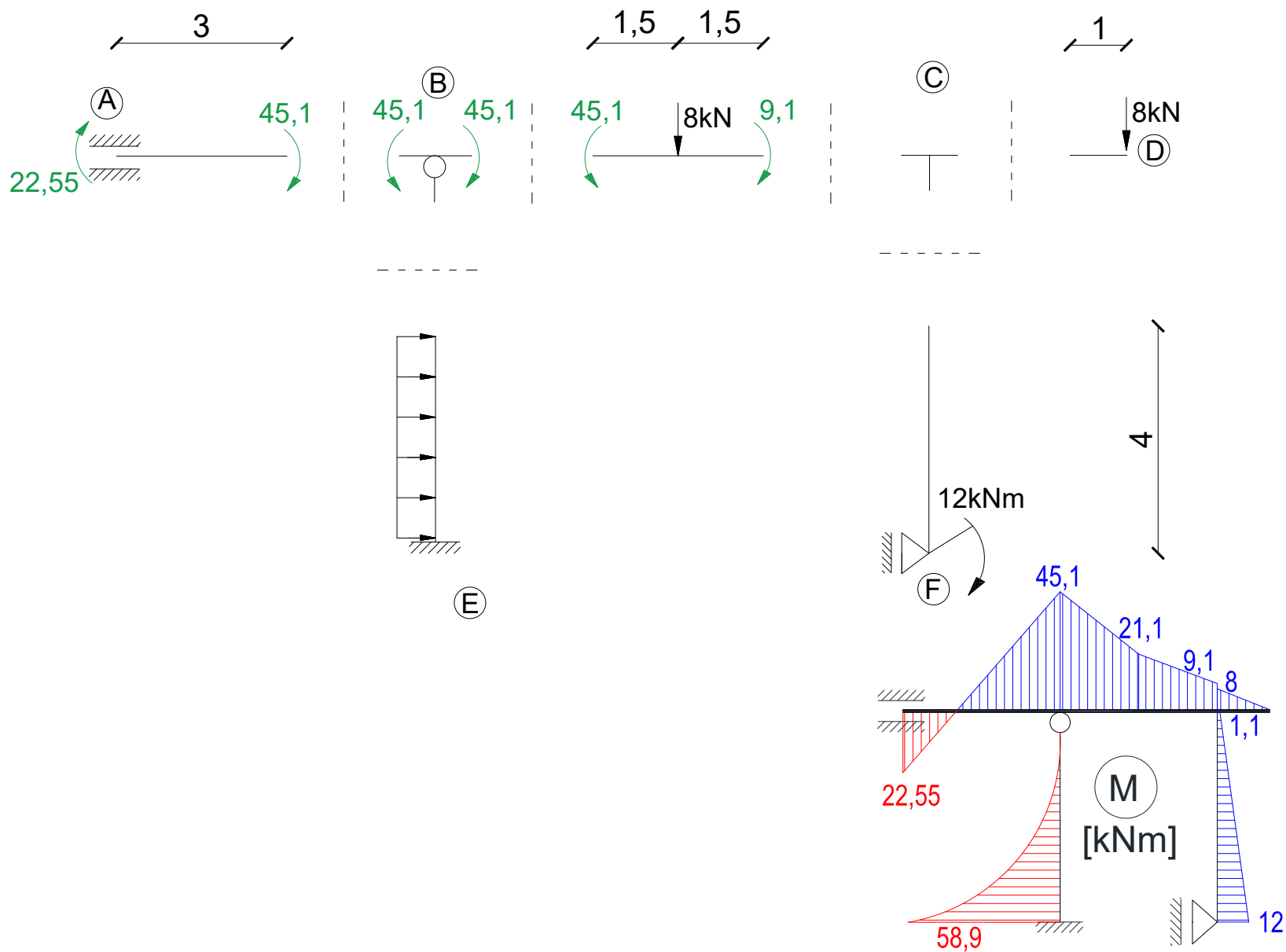
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



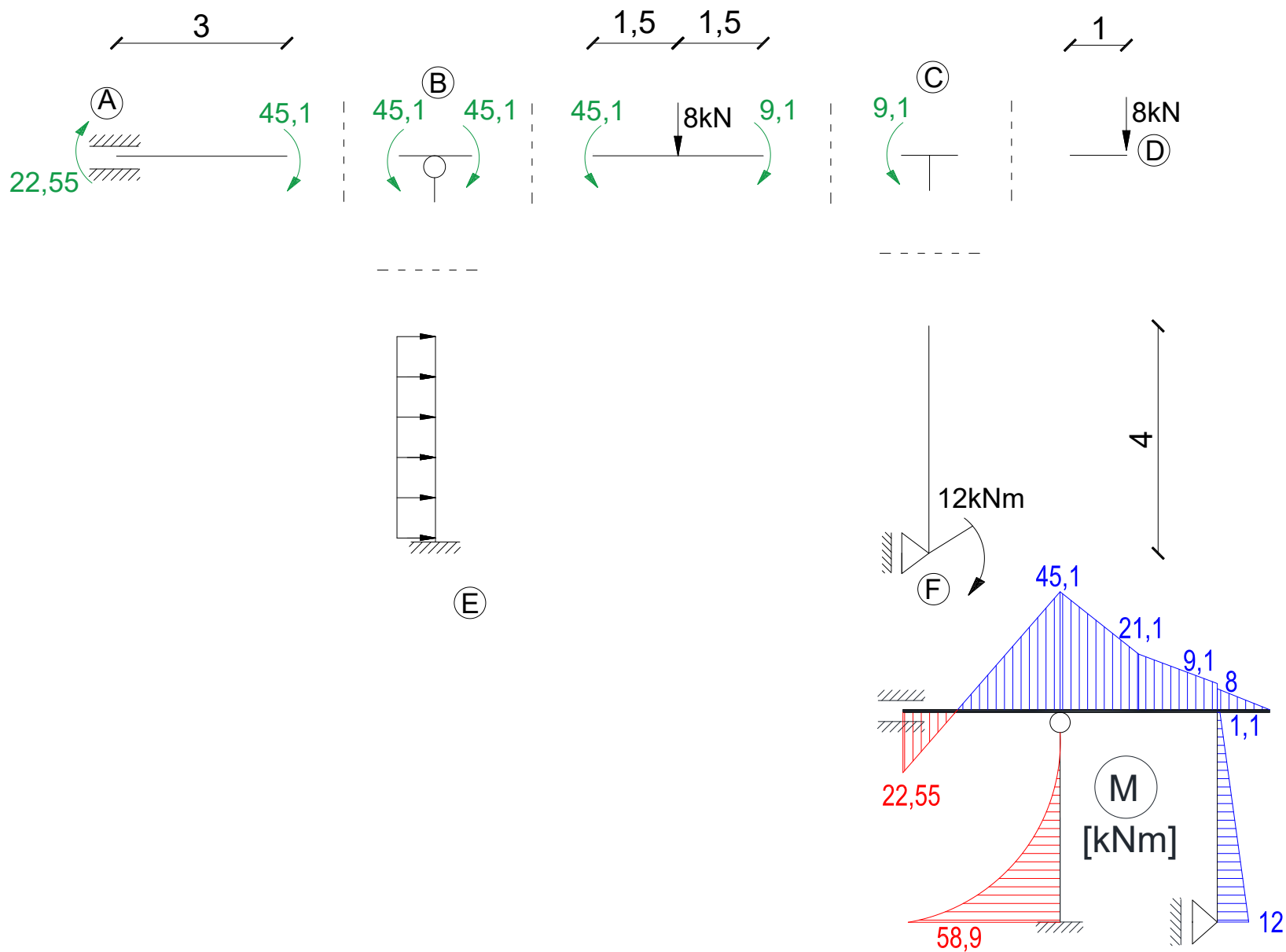
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



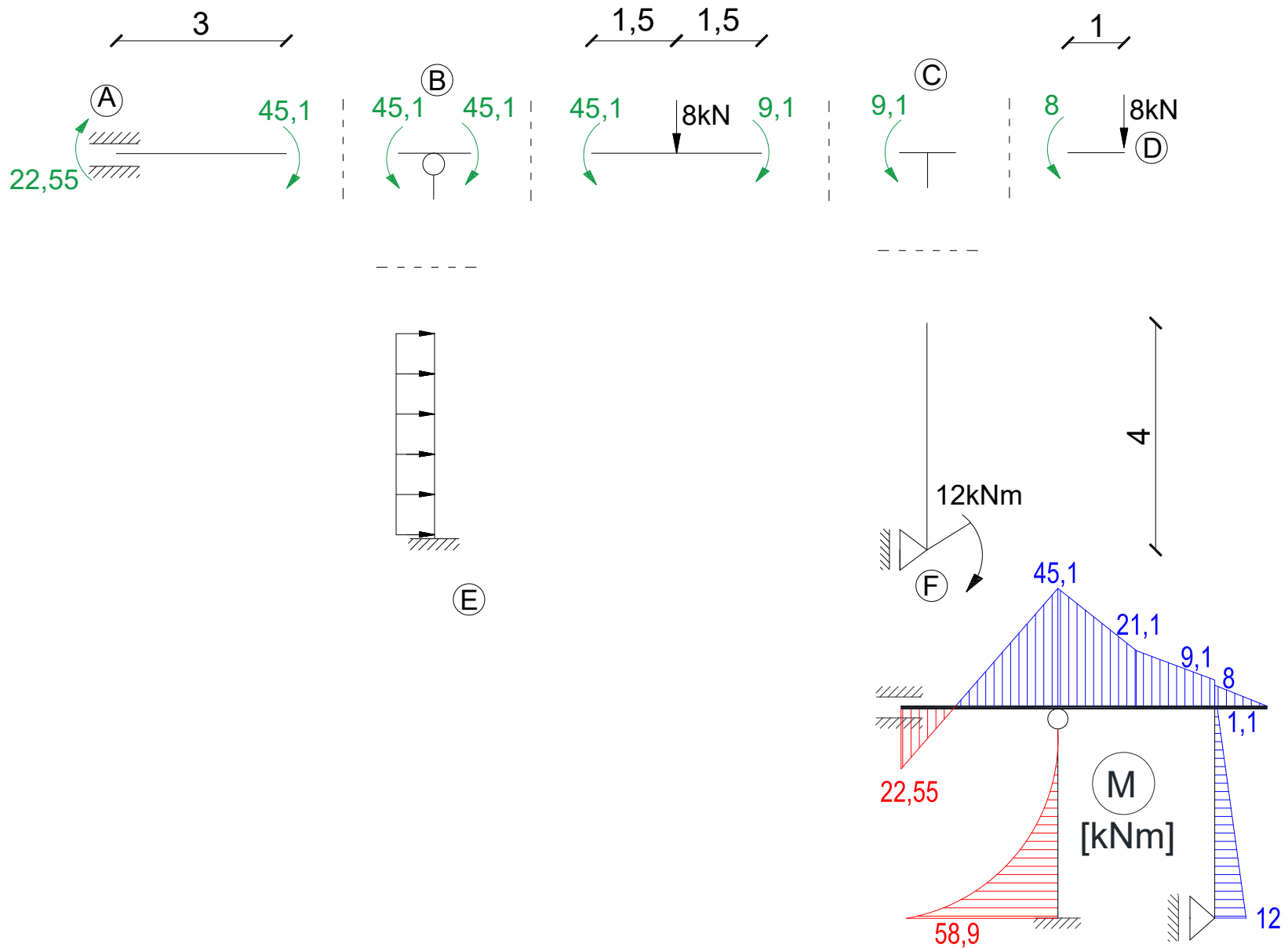
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



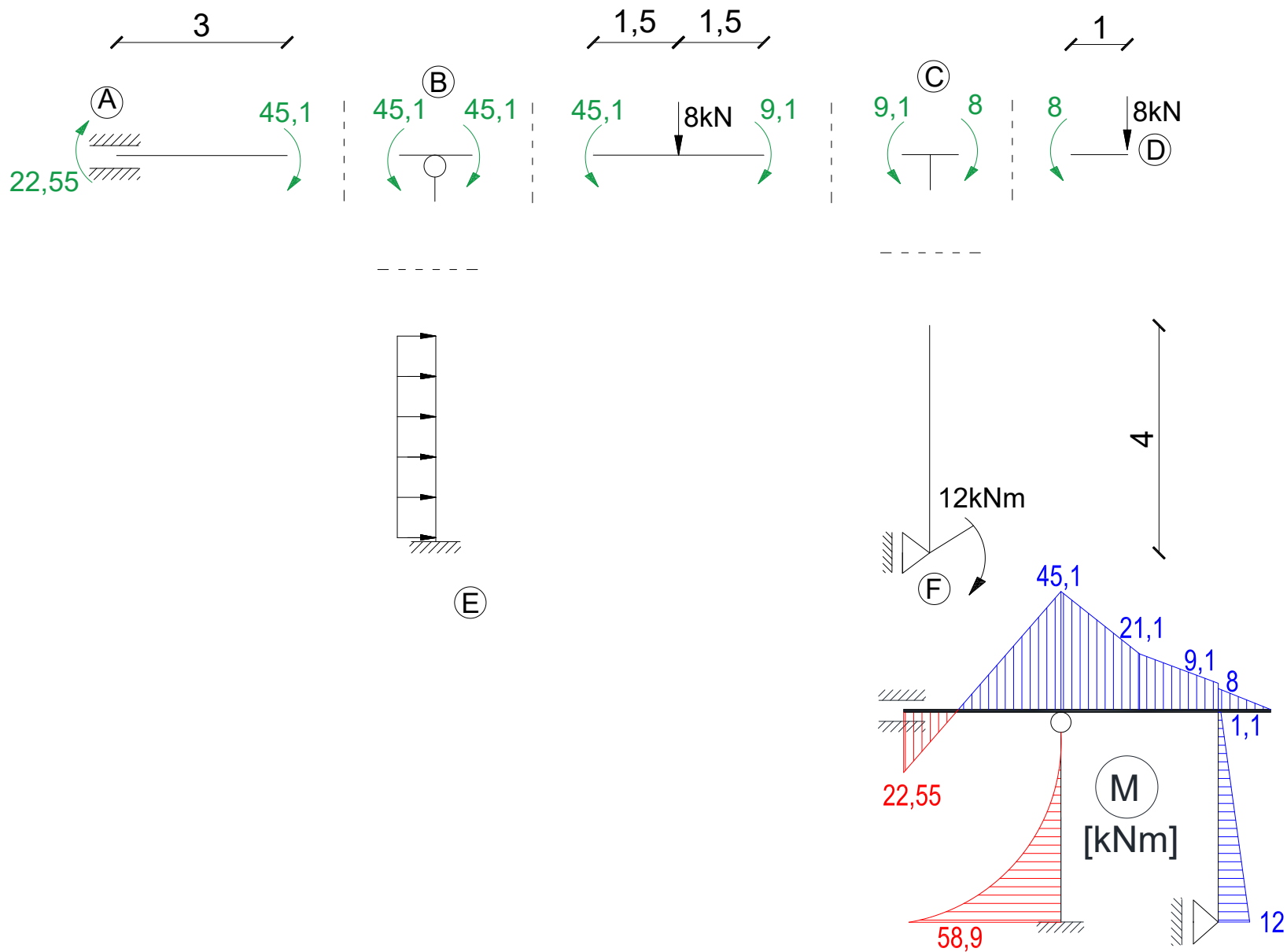
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



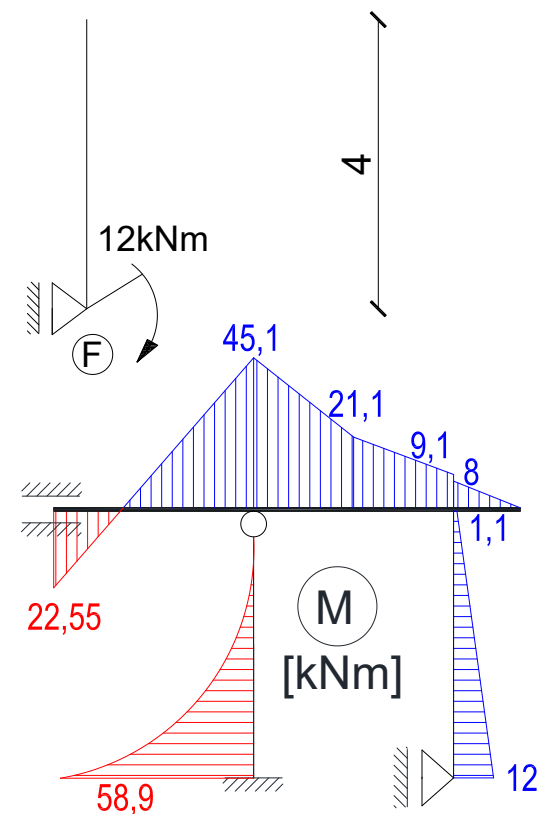
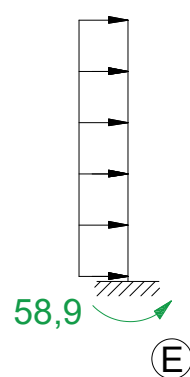
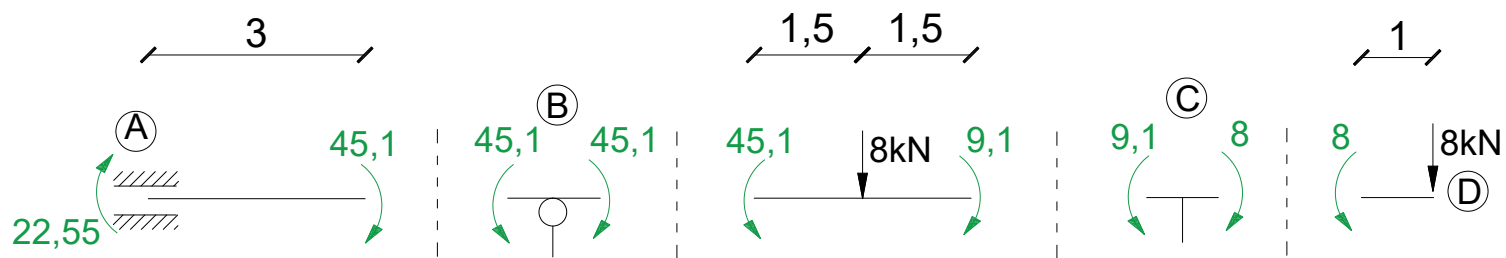
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

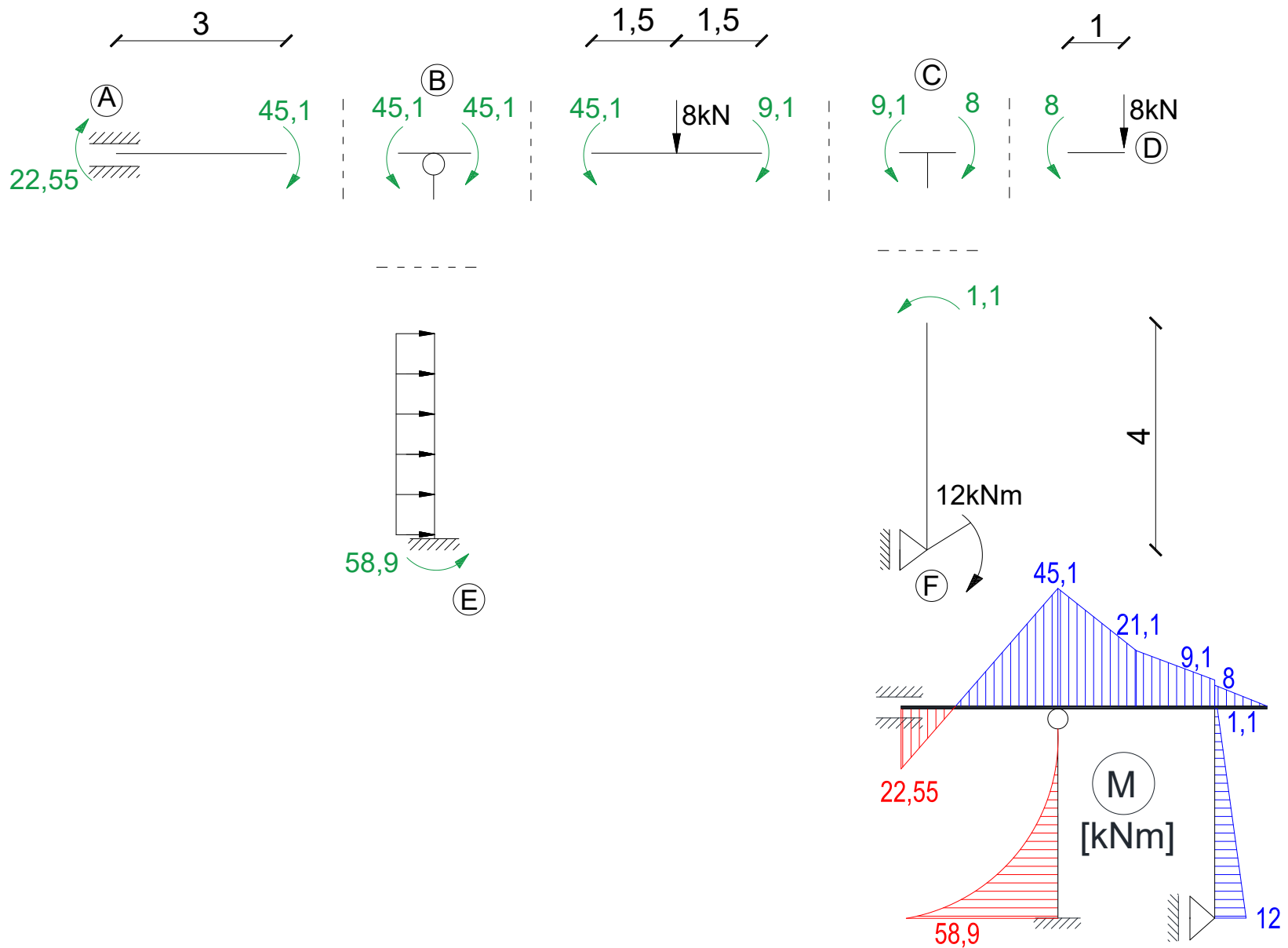


Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

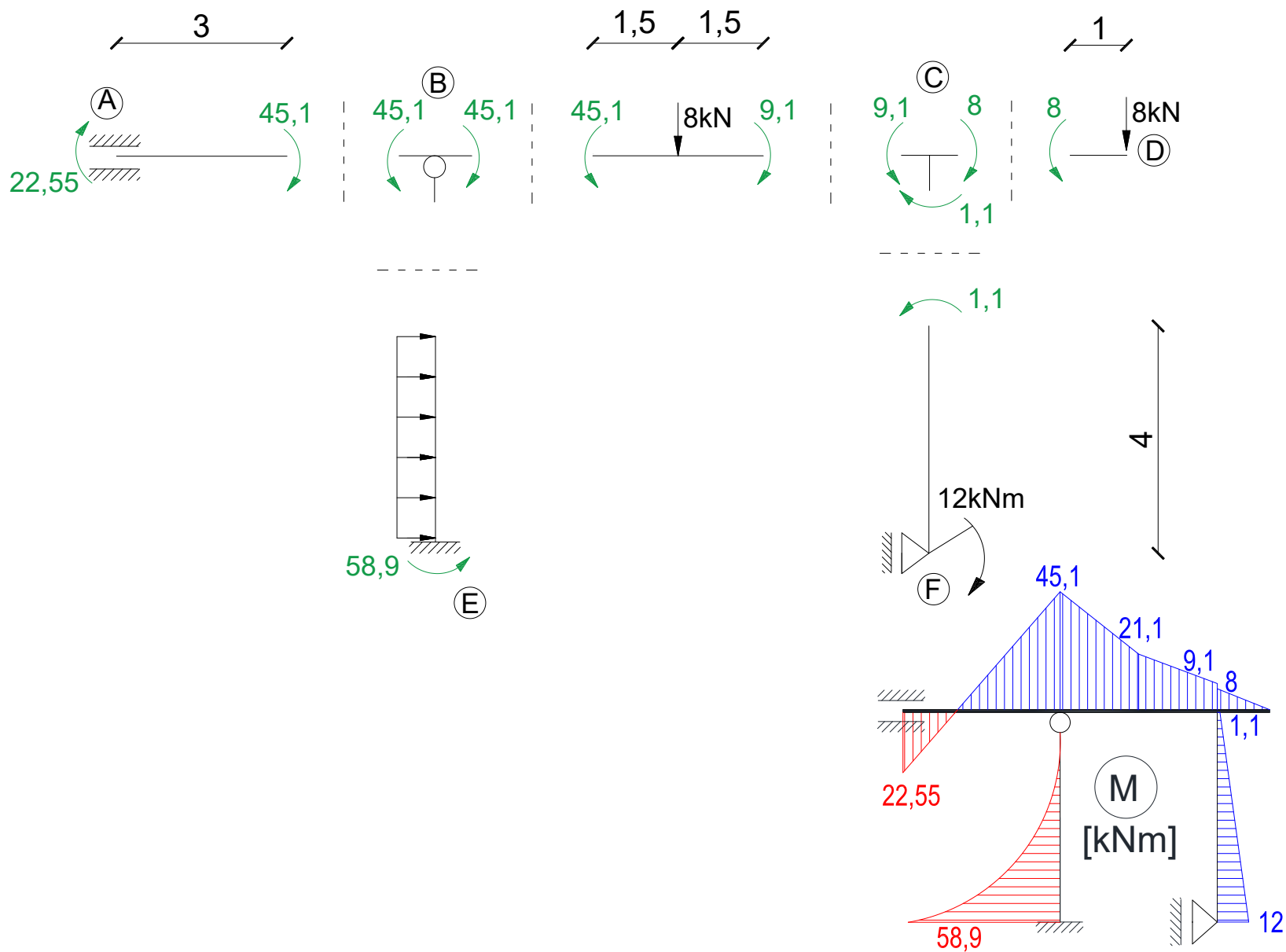


dr inż. Hanna Weber

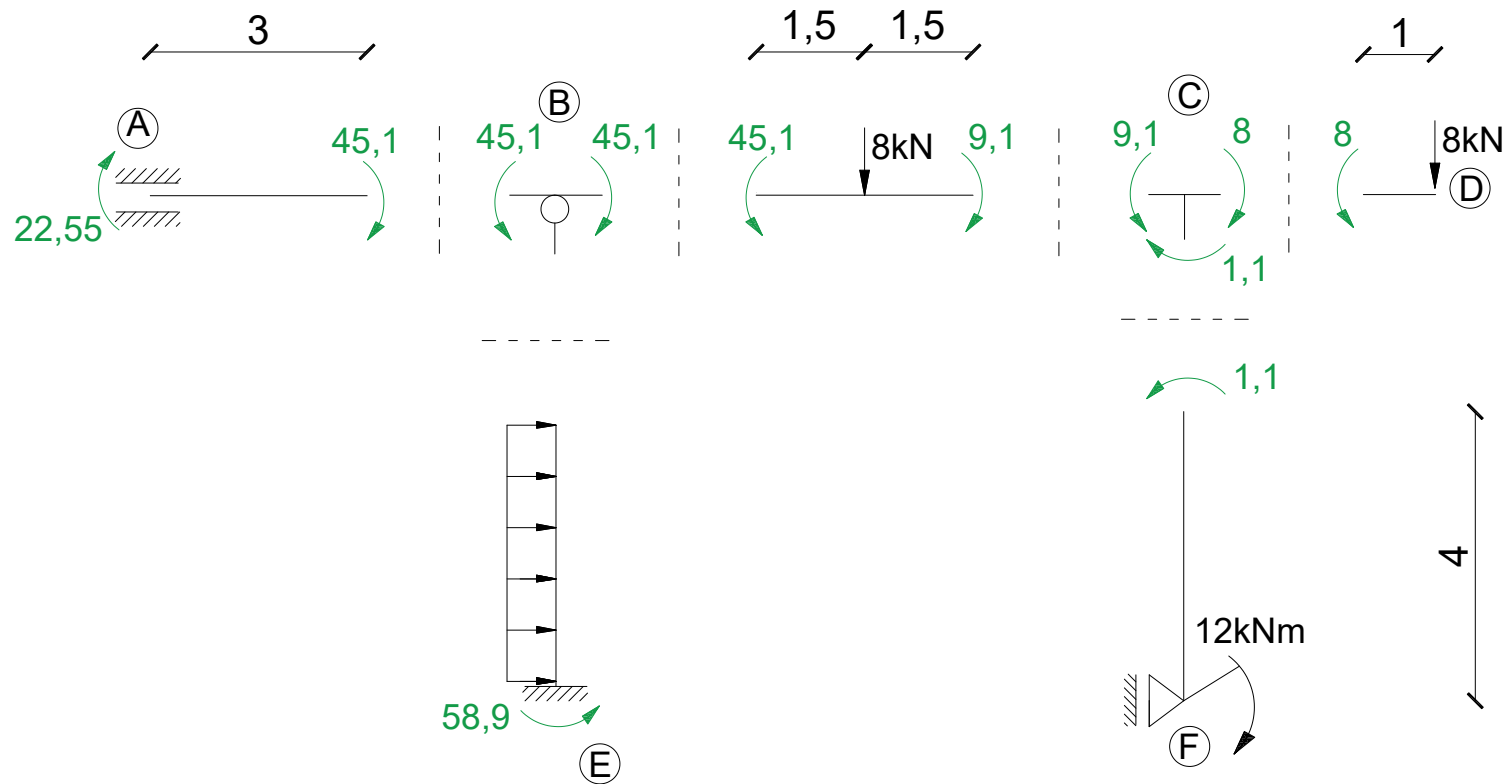
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



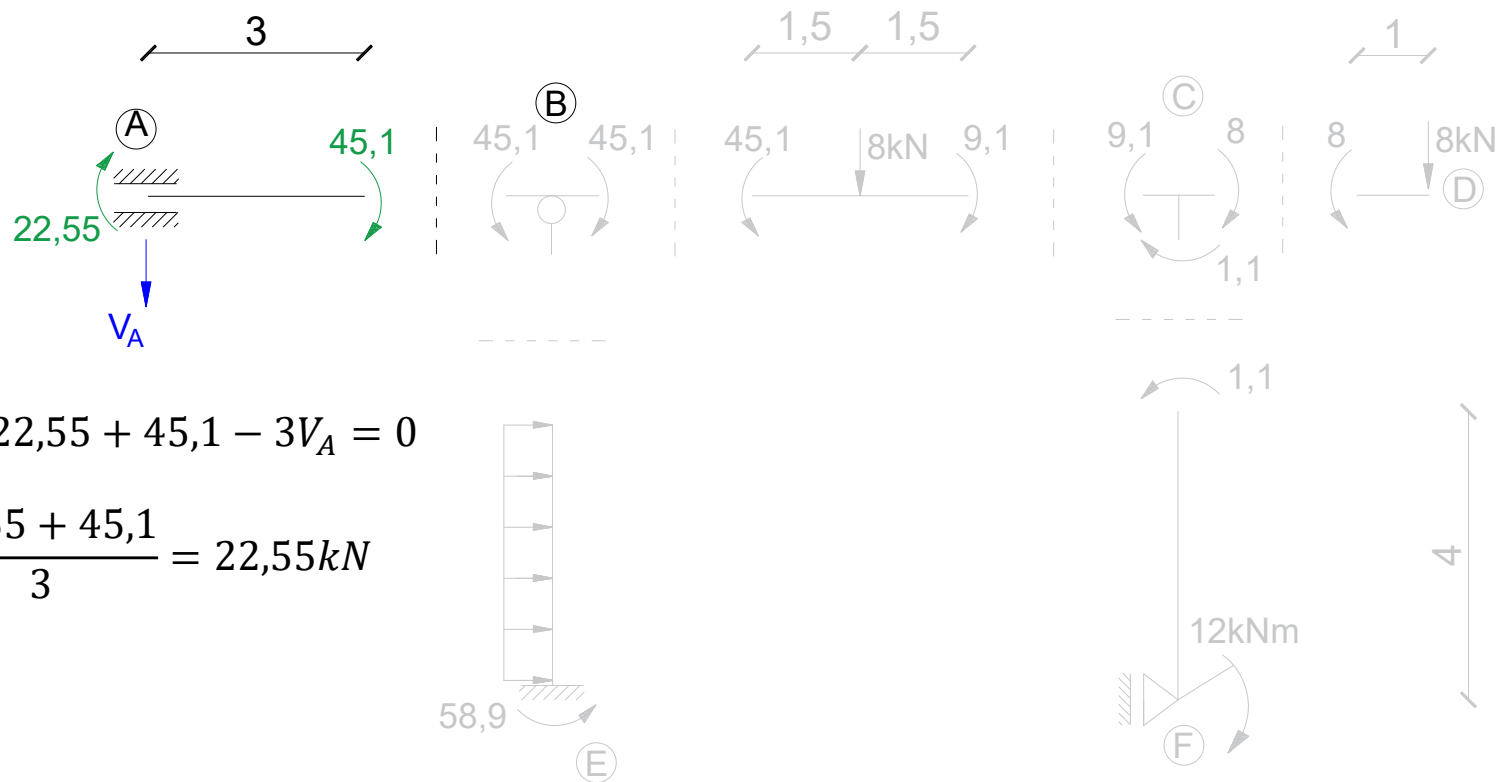
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



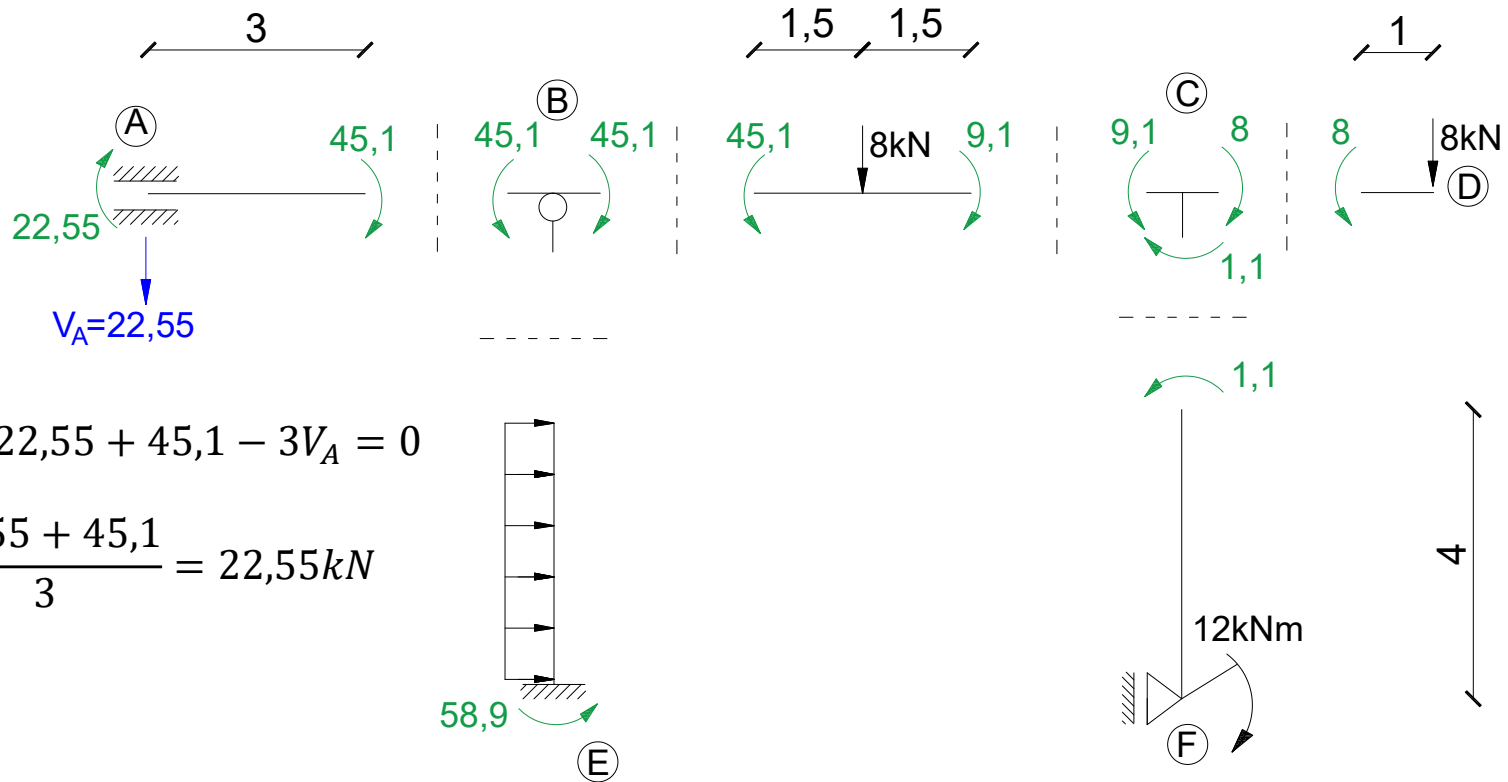
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

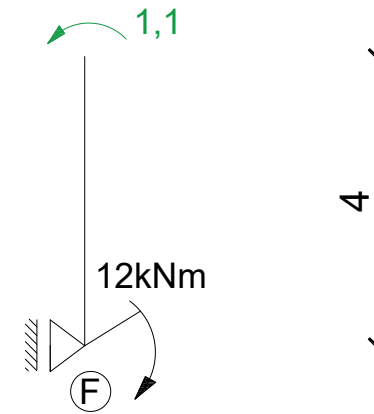
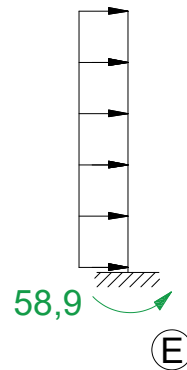


Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

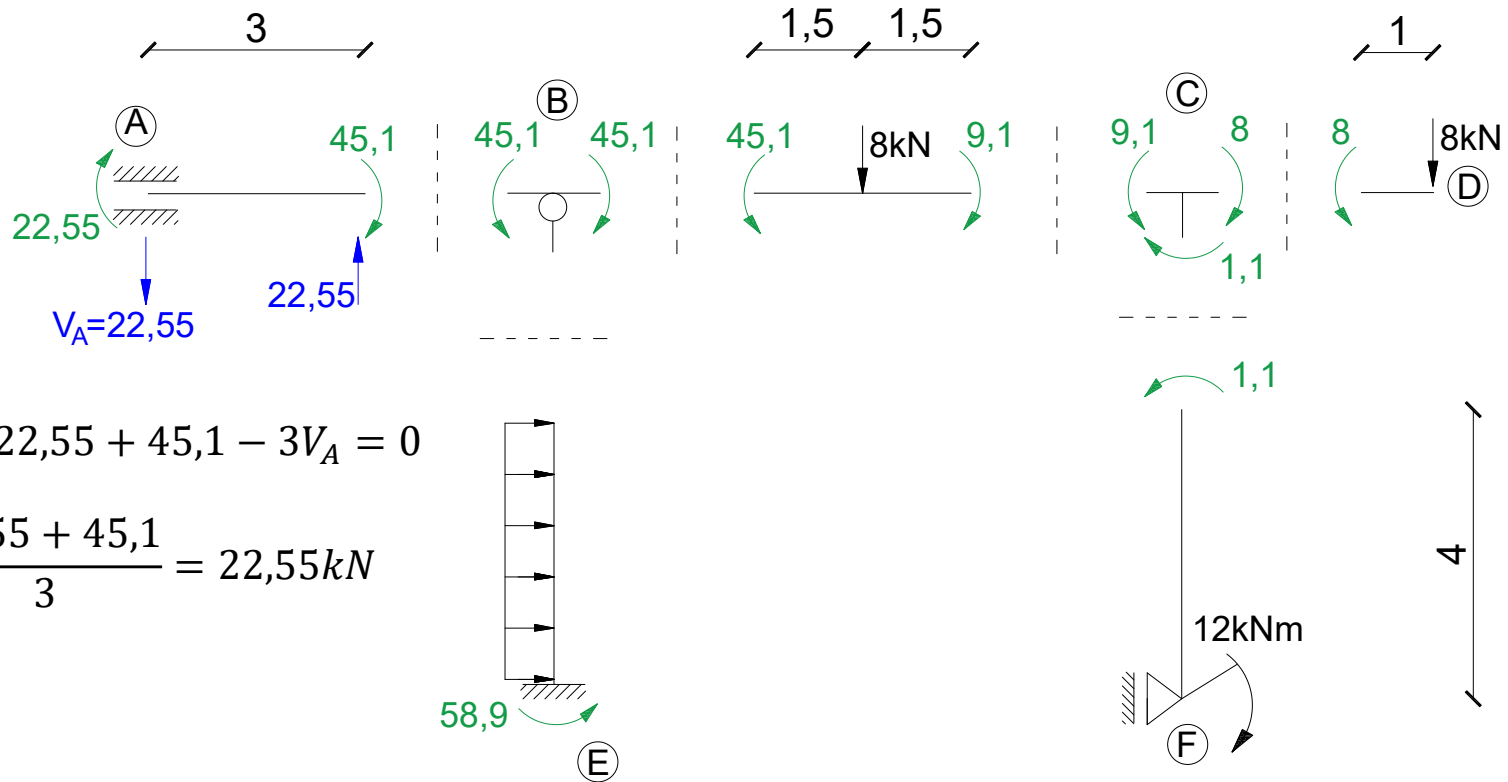


$$\sum M_B = 22,55 + 45,1 - 3V_A = 0$$

$$V_A = \frac{22,55 + 45,1}{3} = 22,55 \text{ kN}$$



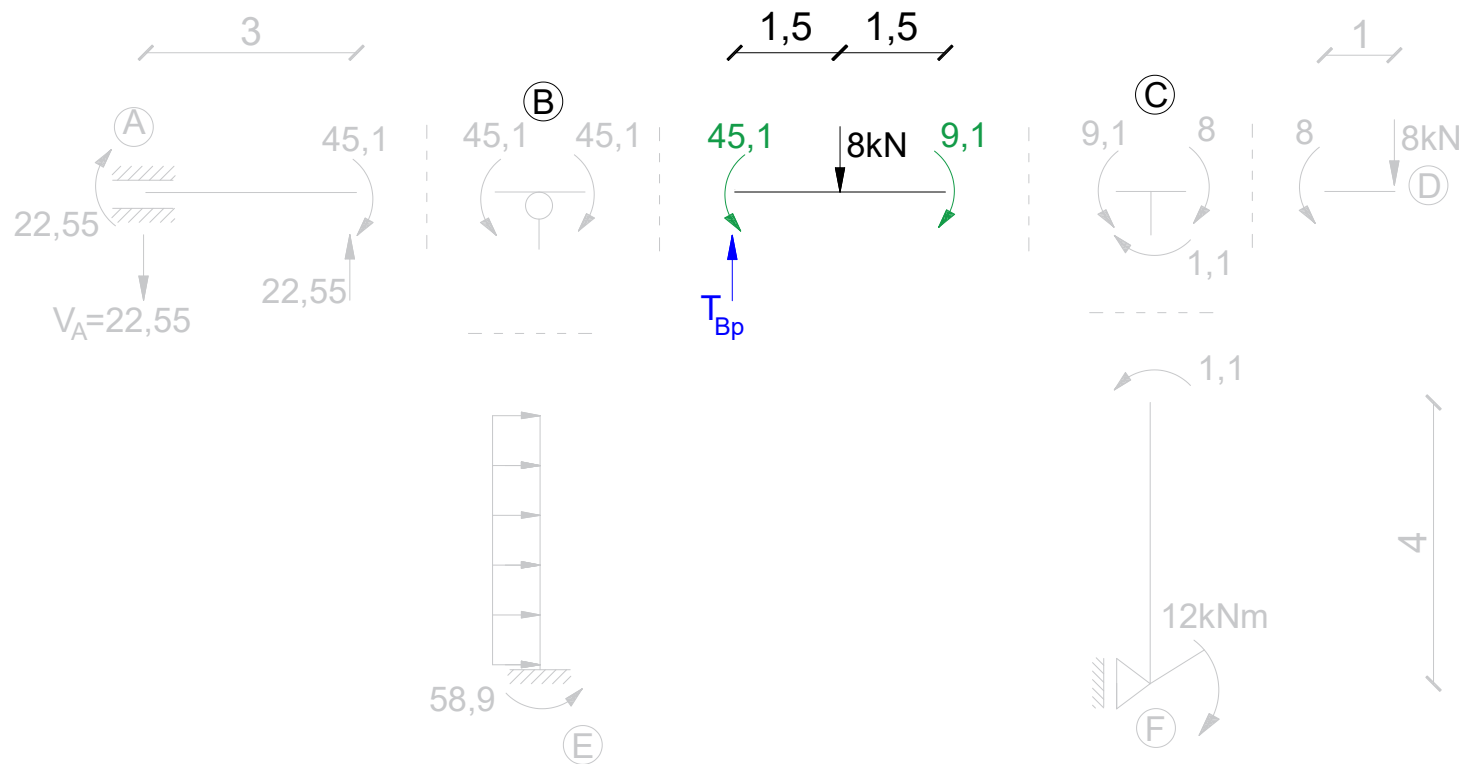
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



$$\sum M_B = 22,55 + 45,1 - 3V_A = 0$$

$$V_A = \frac{22,55 + 45,1}{3} = 22,55 \text{ kN}$$

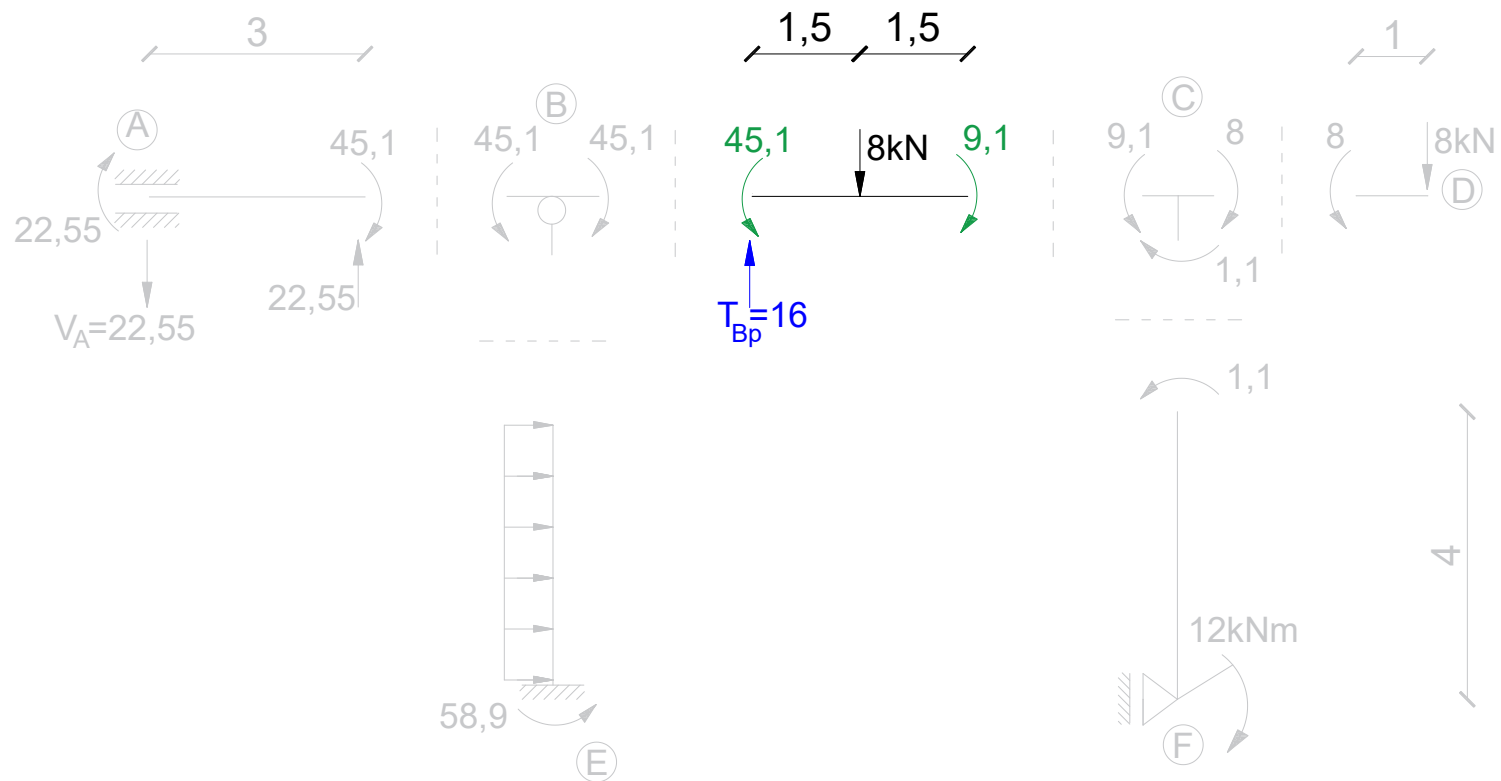
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



$$\sum M_C = -45,1 + 9,1 - 8 \cdot 1,5 + T_{Bp} \cdot 3 = 0$$

$$T_{Bp} = \frac{45,1 - 9,1 + 8 \cdot 1,5}{3} = 16 \text{ kN}$$

Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

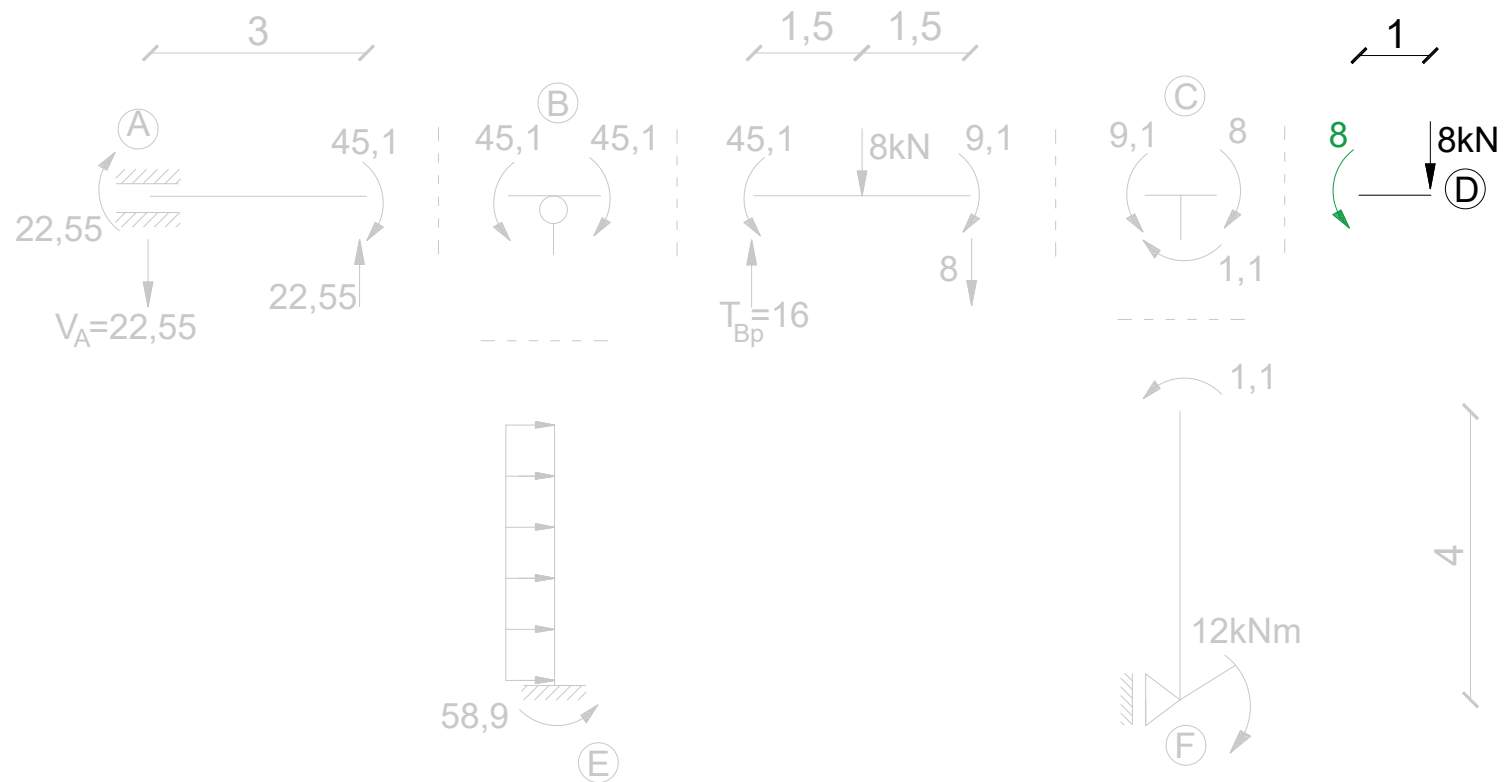


$$\sum M_C = -45,1 + 9,1 - 8 \cdot 1,5 + T_{Bp} \cdot 3 = 0$$

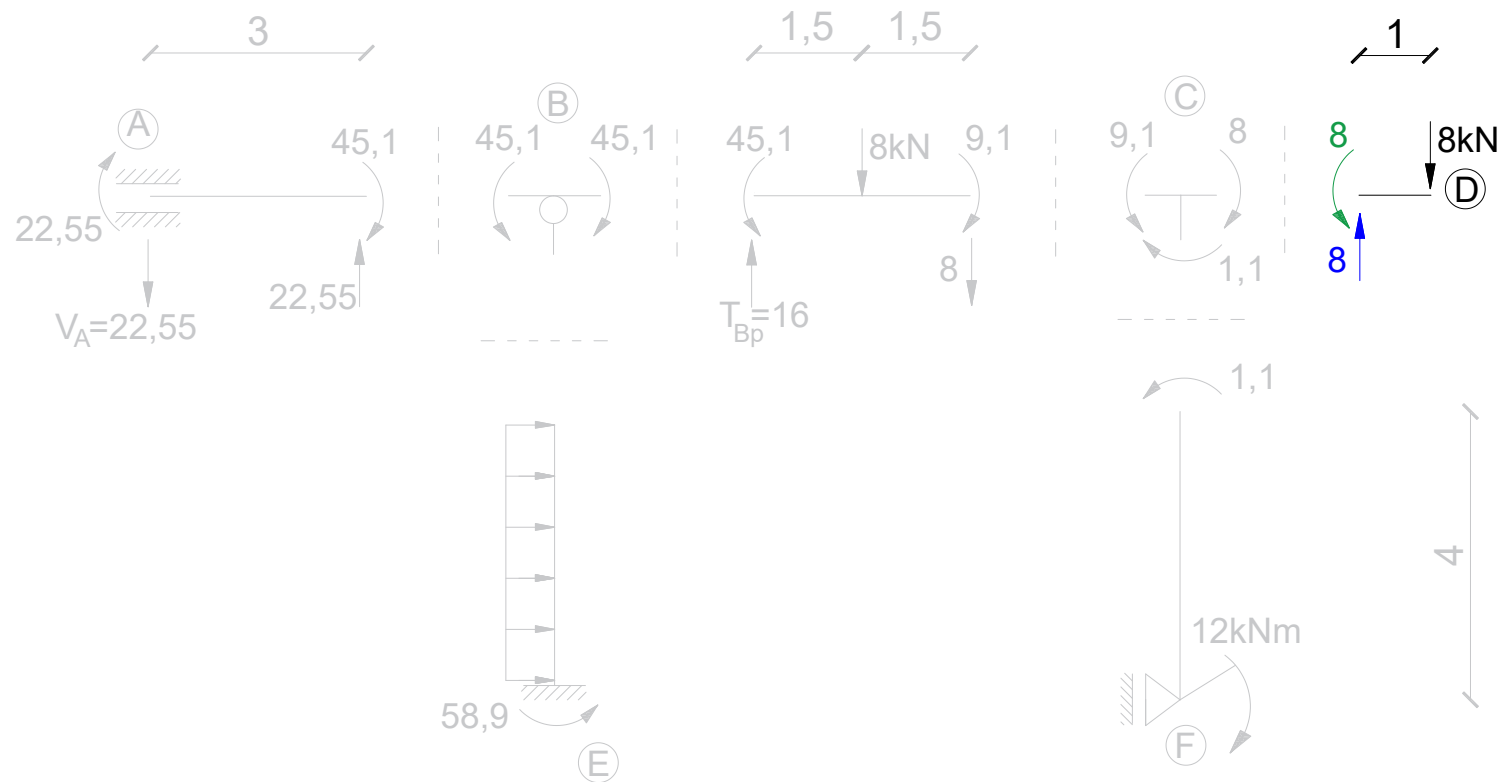
$$T_{Bp} = \frac{45,1 - 9,1 + 8 \cdot 1,5}{3} = 16 \text{ kN}$$

$$T_{Bp} = \frac{45,1 - 9,1 + 8 \cdot 1,5}{3} = 16kN$$

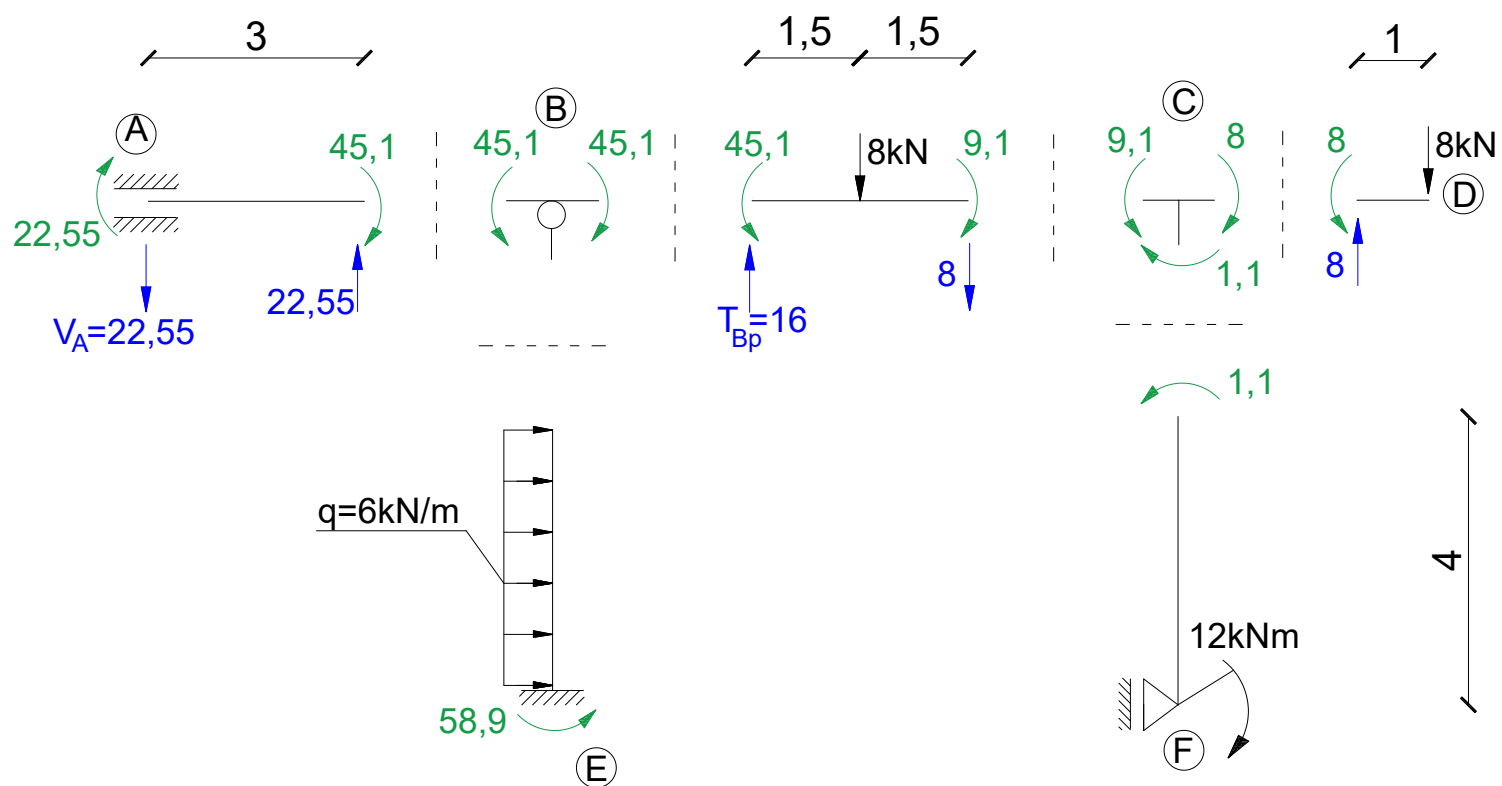
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



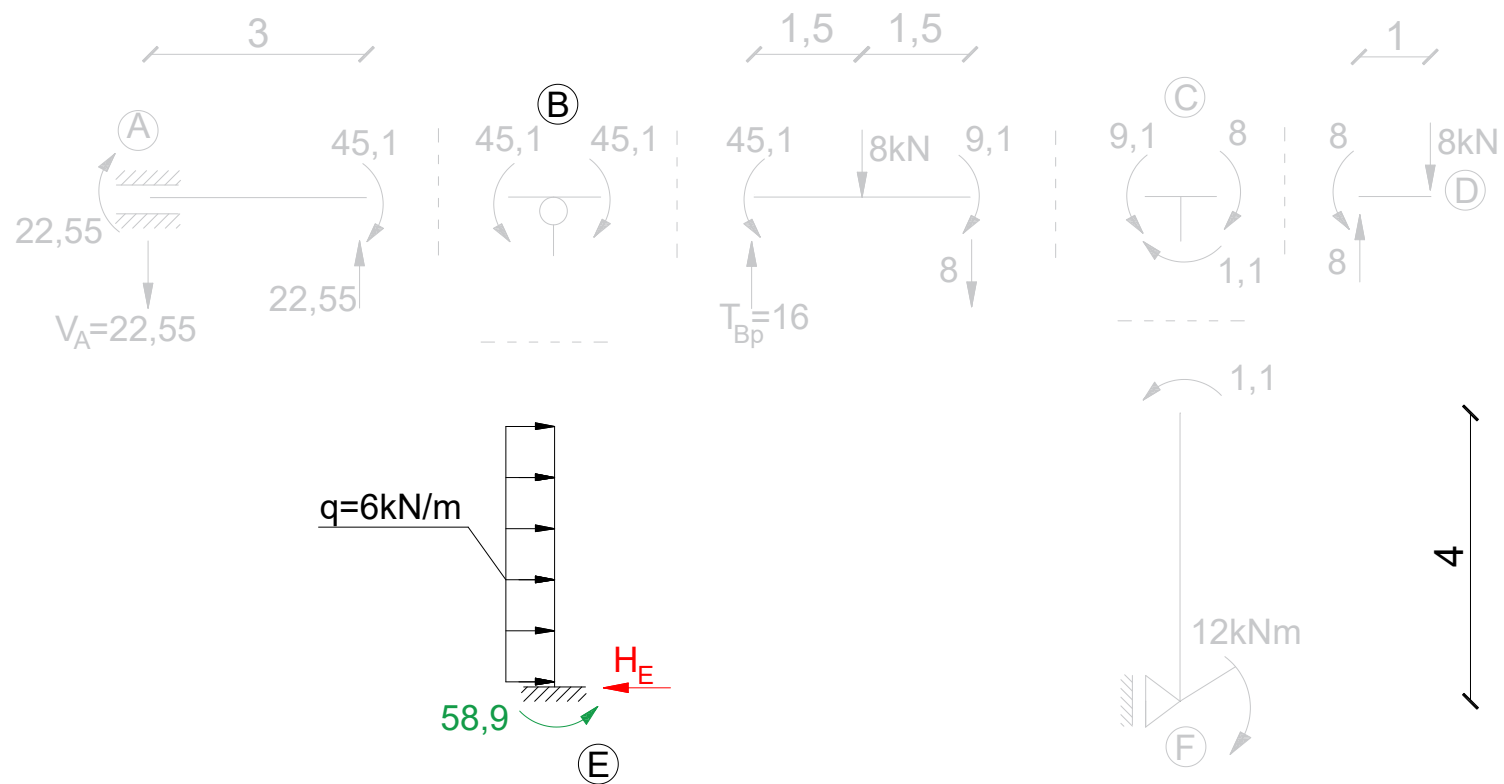
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



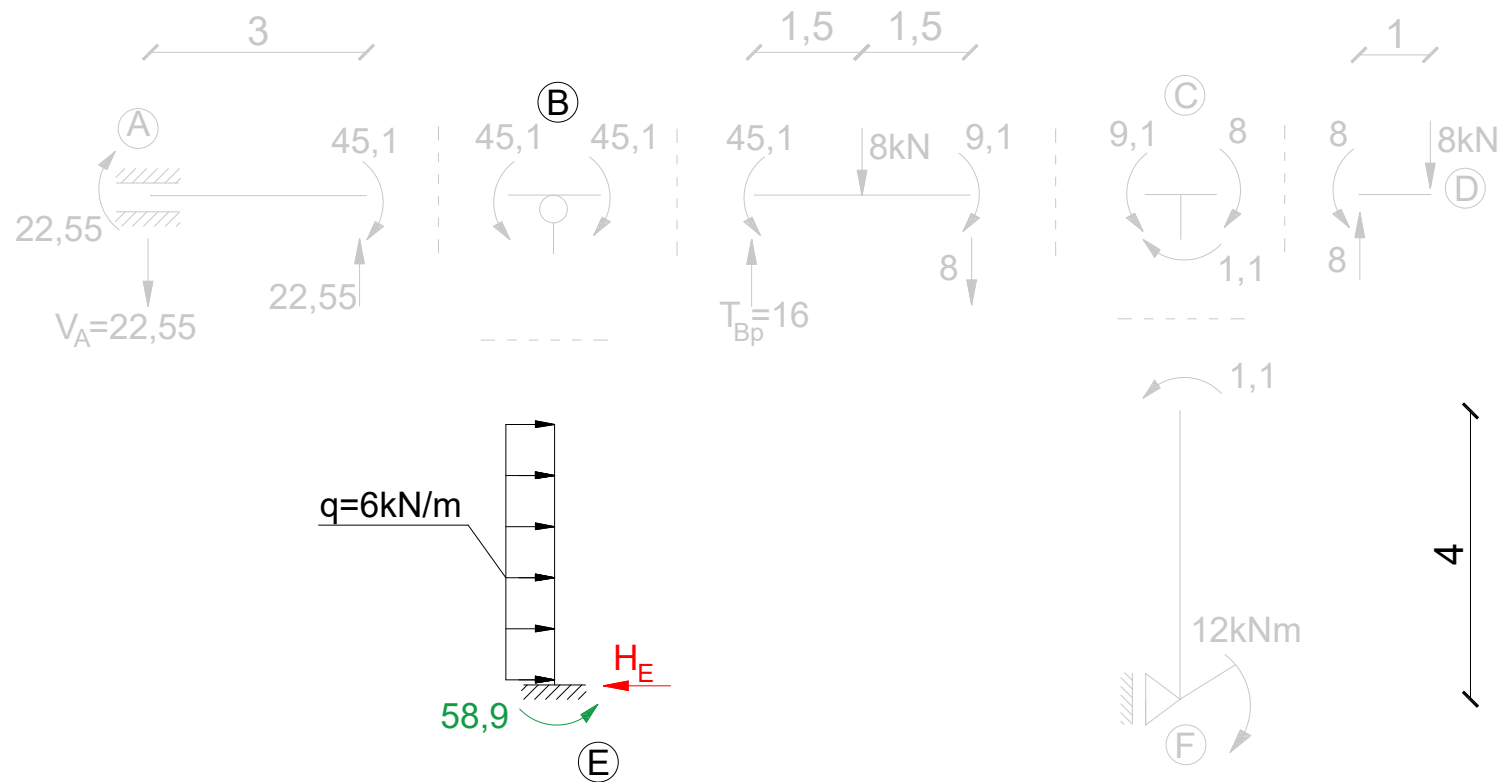
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



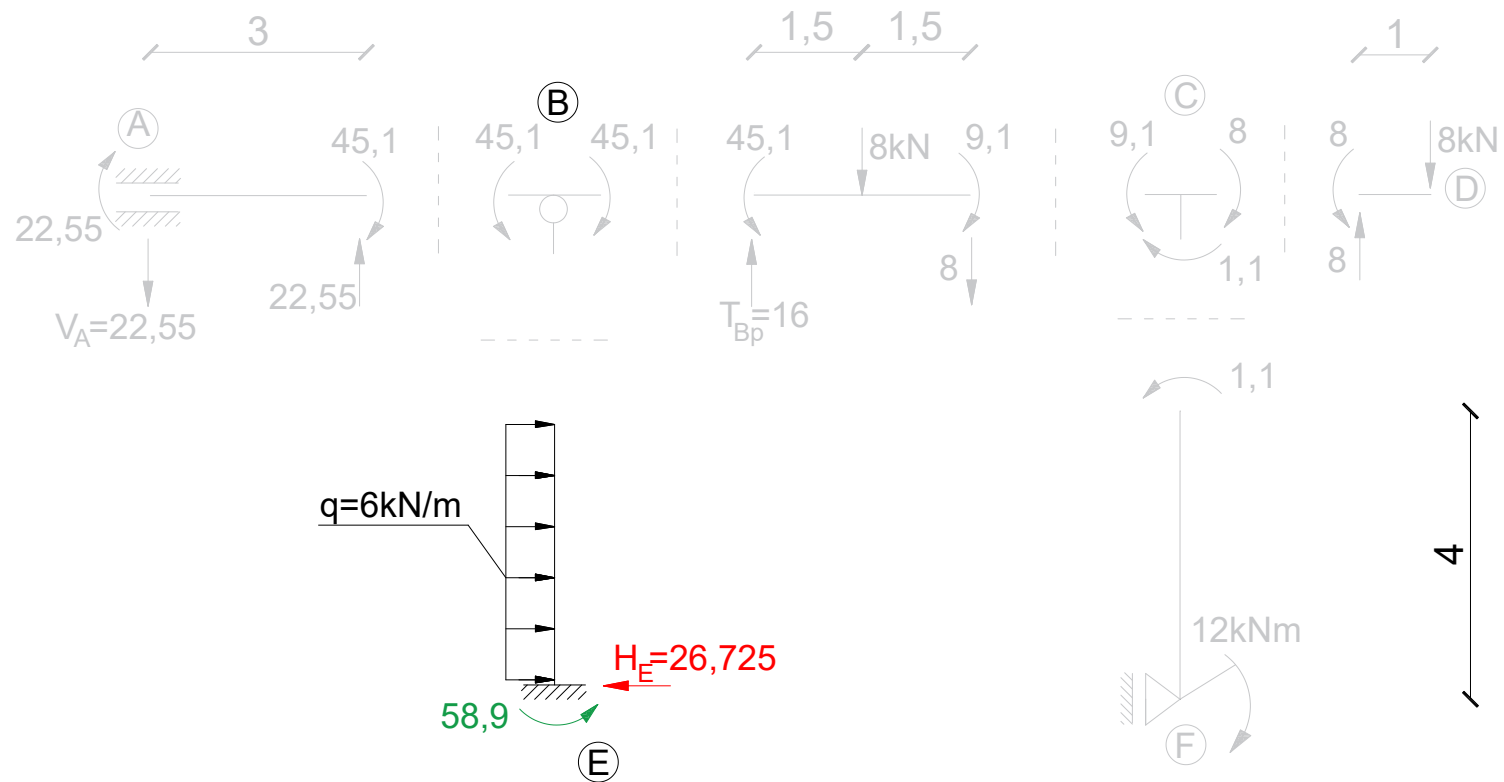
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



$$\sum M_B = -58,9 - 6 \cdot 4 \cdot 2 + H_E \cdot 4 = 0$$

$$H_E = \frac{58,9 + 6 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 26,725 \text{ kN}$$

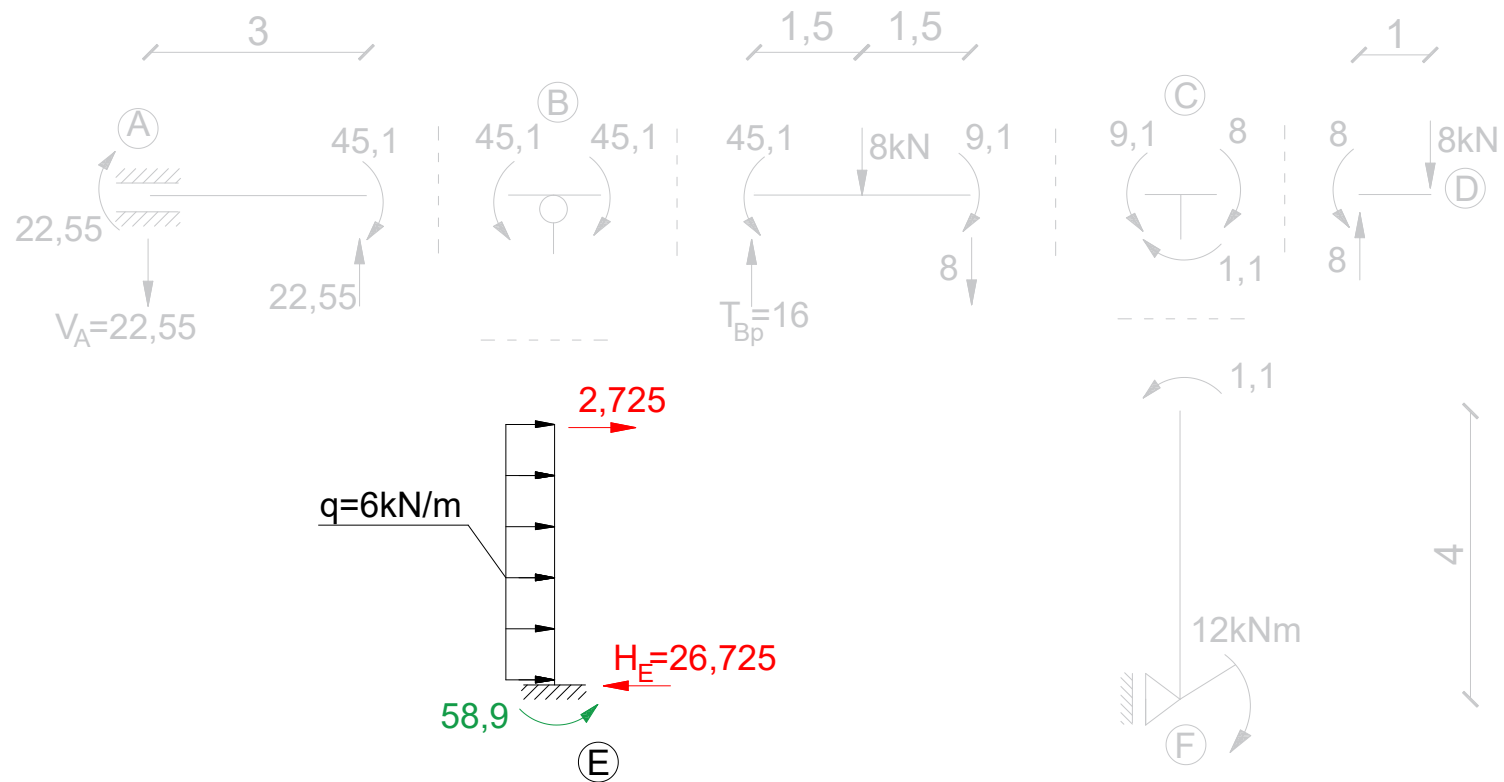
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



$$\sum M_B = -58,9 - 6 \cdot 4 \cdot 2 + H_E \cdot 4 = 0$$

$$H_E = \frac{58,9 + 6 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 26,725 \text{ kN}$$

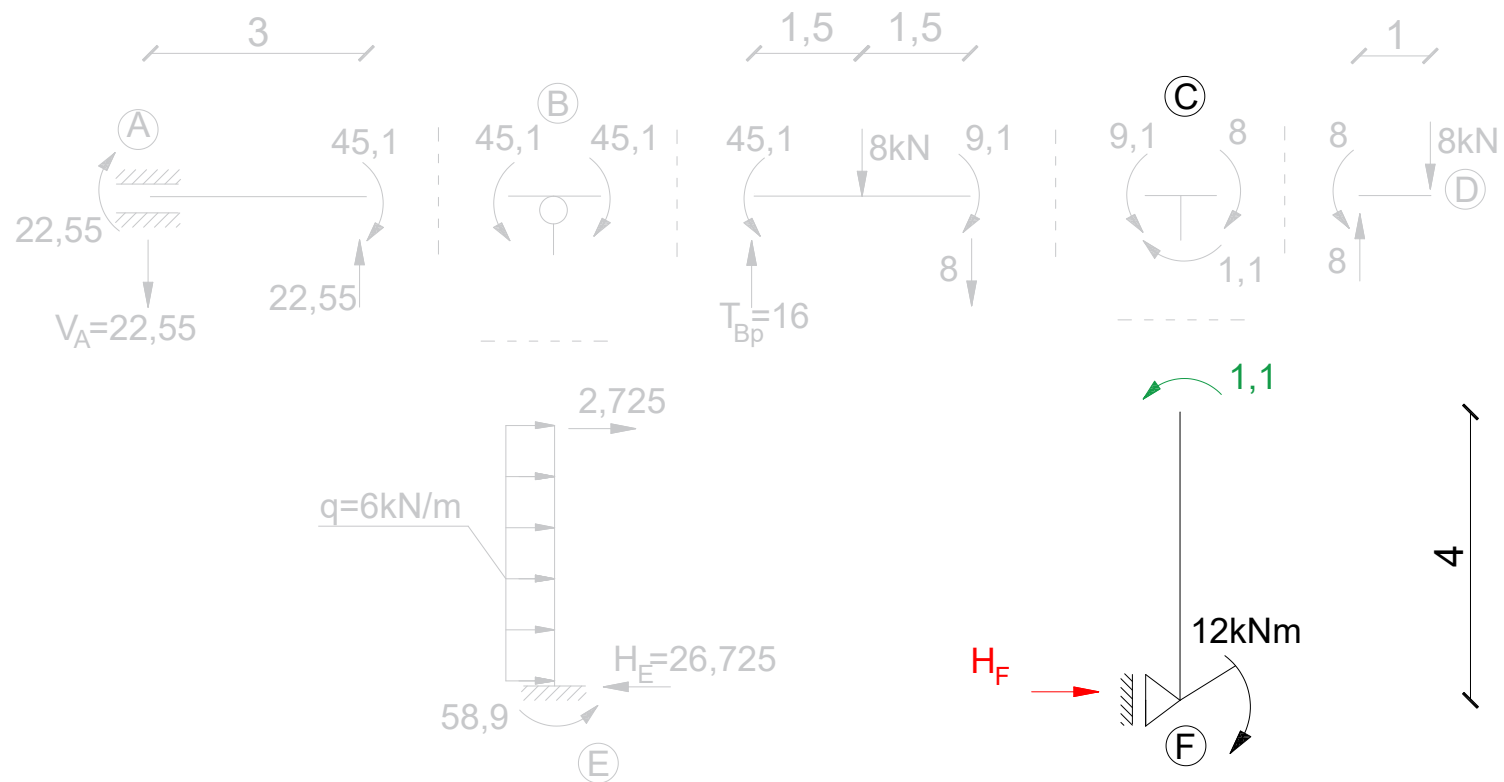
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



$$\sum M_B = -58,9 - 6 \cdot 4 \cdot 2 + H_E \cdot 4 = 0$$

$$H_E = \frac{58,9 + 6 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 26,725 \text{ kN}$$

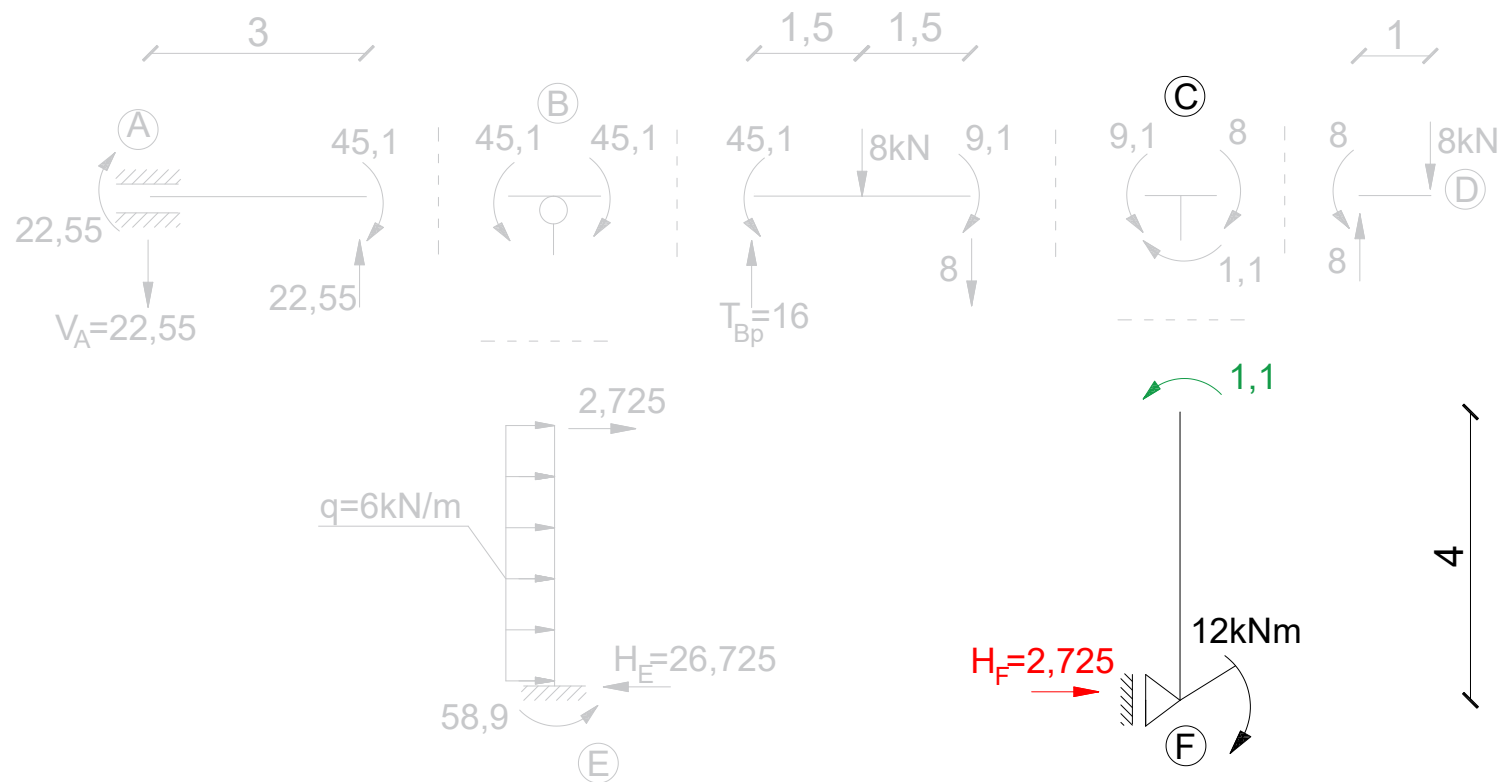
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



$$\sum M_C = -1,1 + 12 - H_F \cdot 4 = 0$$

$$H_F = \frac{-1,1 + 12}{4} = 2,725 \text{ kN}$$

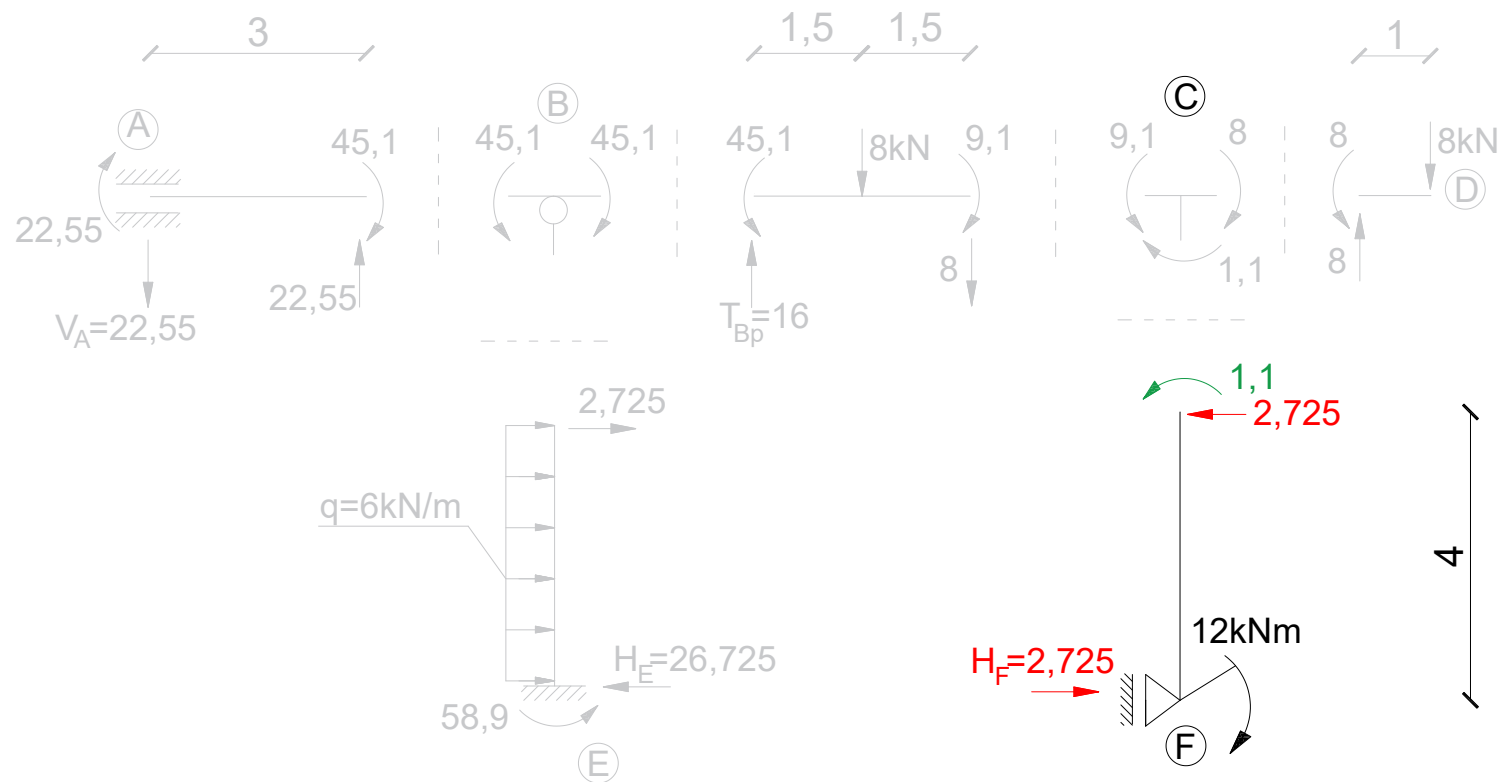
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



$$\sum M_C = -1,1 + 12 - H_F \cdot 4 = 0$$

$$H_F = \frac{-1,1 + 12}{4} = 2,725 \text{ kN}$$

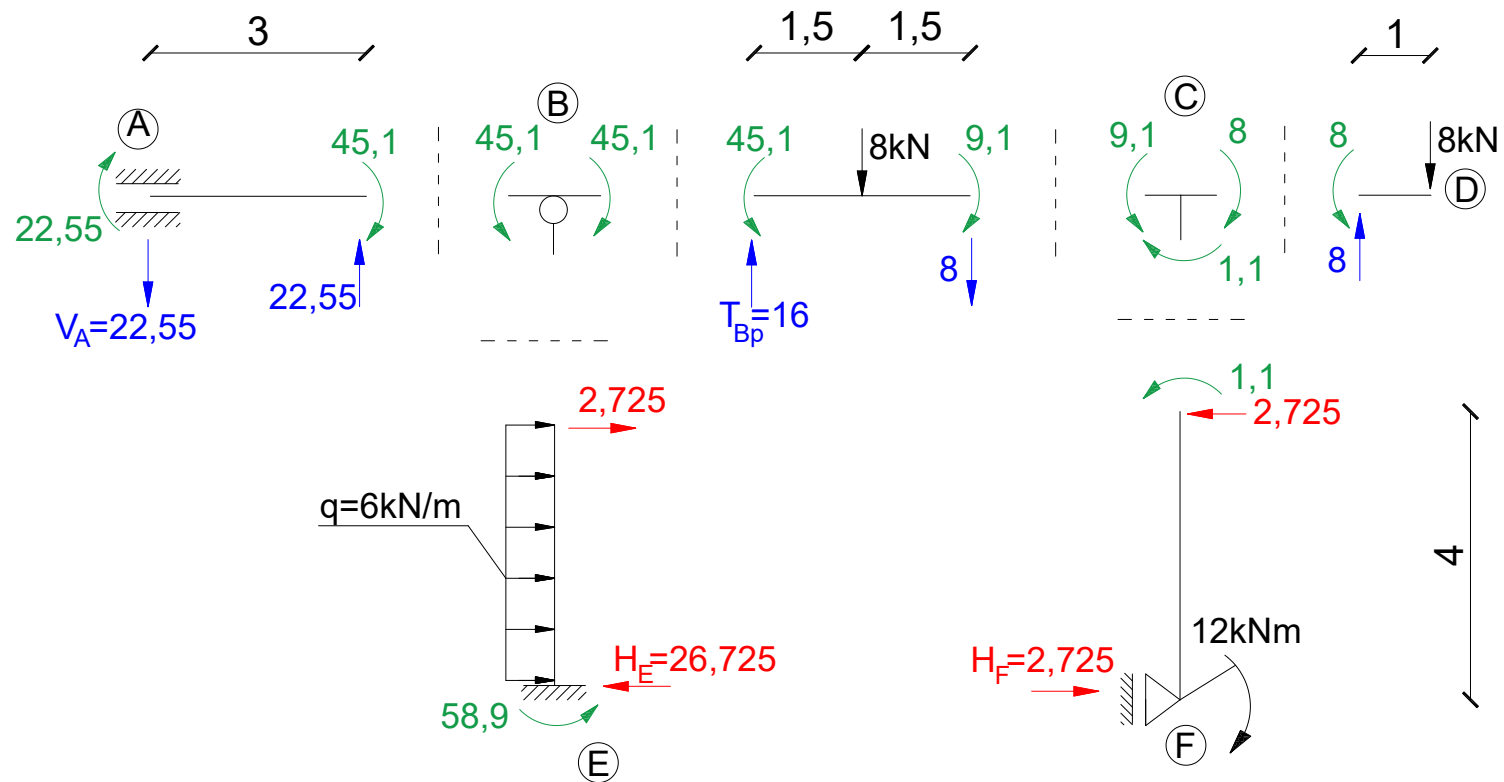
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



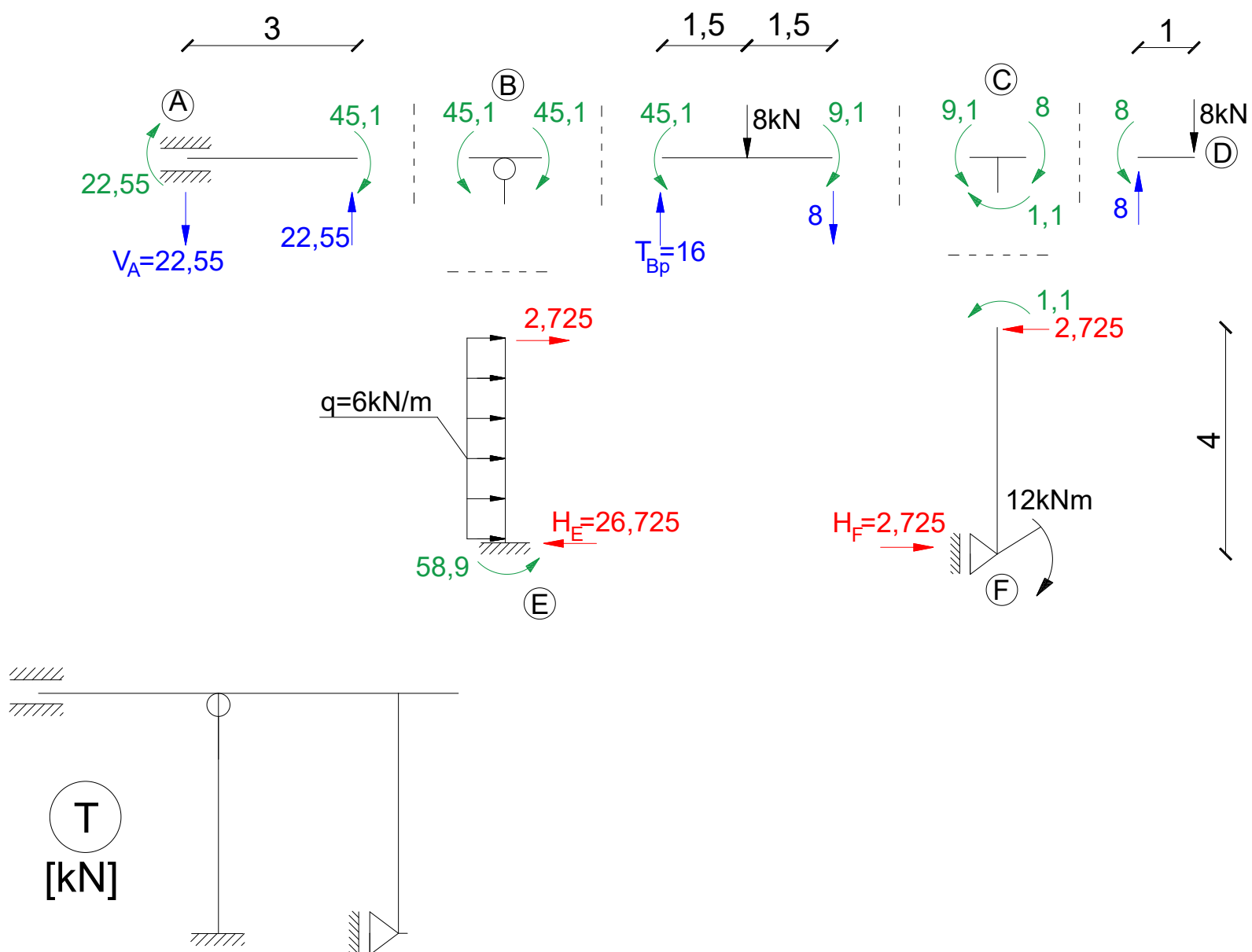
$$\sum M_C = -1,1 + 12 - H_F \cdot 4 = 0$$

$$H_F = \frac{-1,1 + 12}{4} = 2,725 \text{ kN}$$

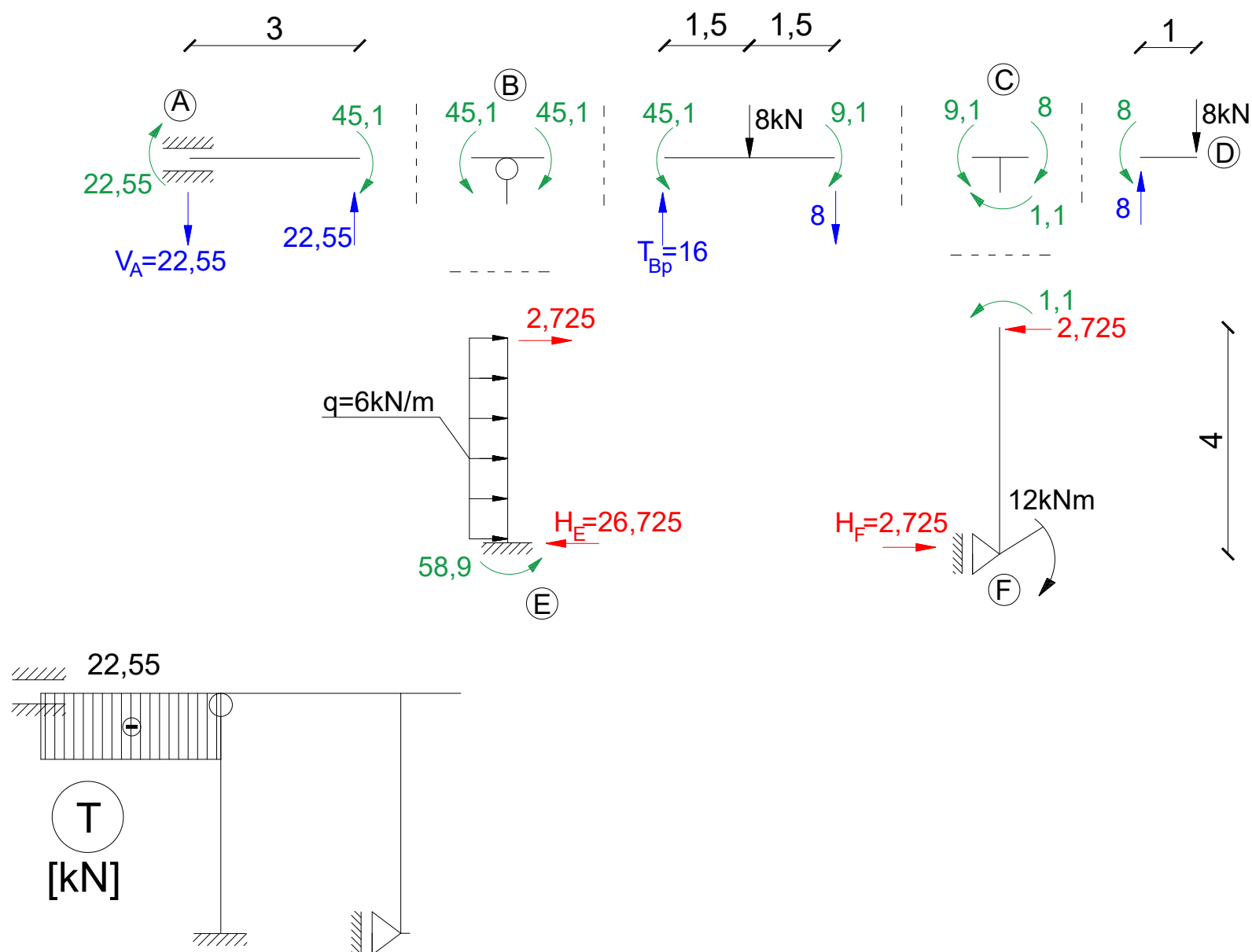
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



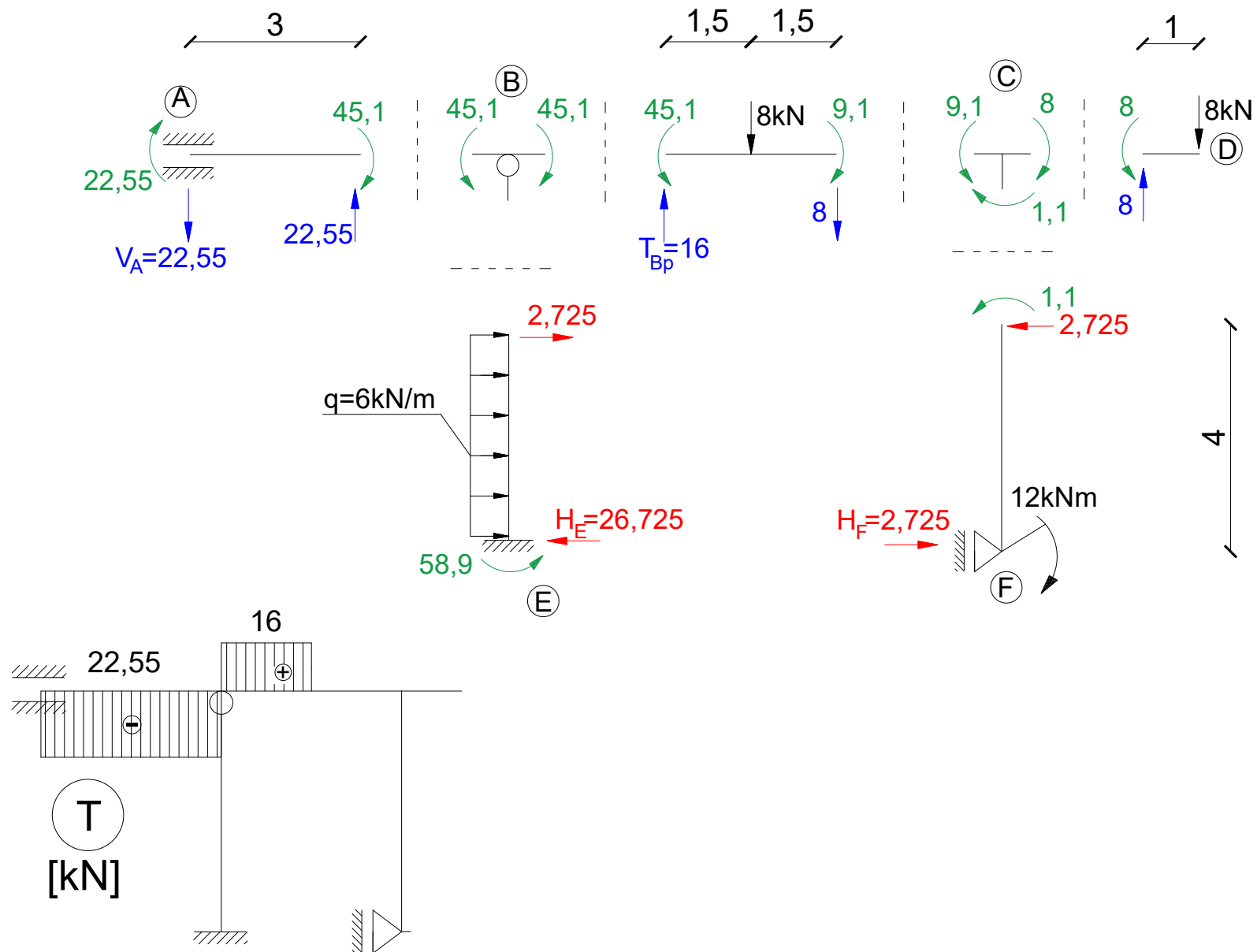
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



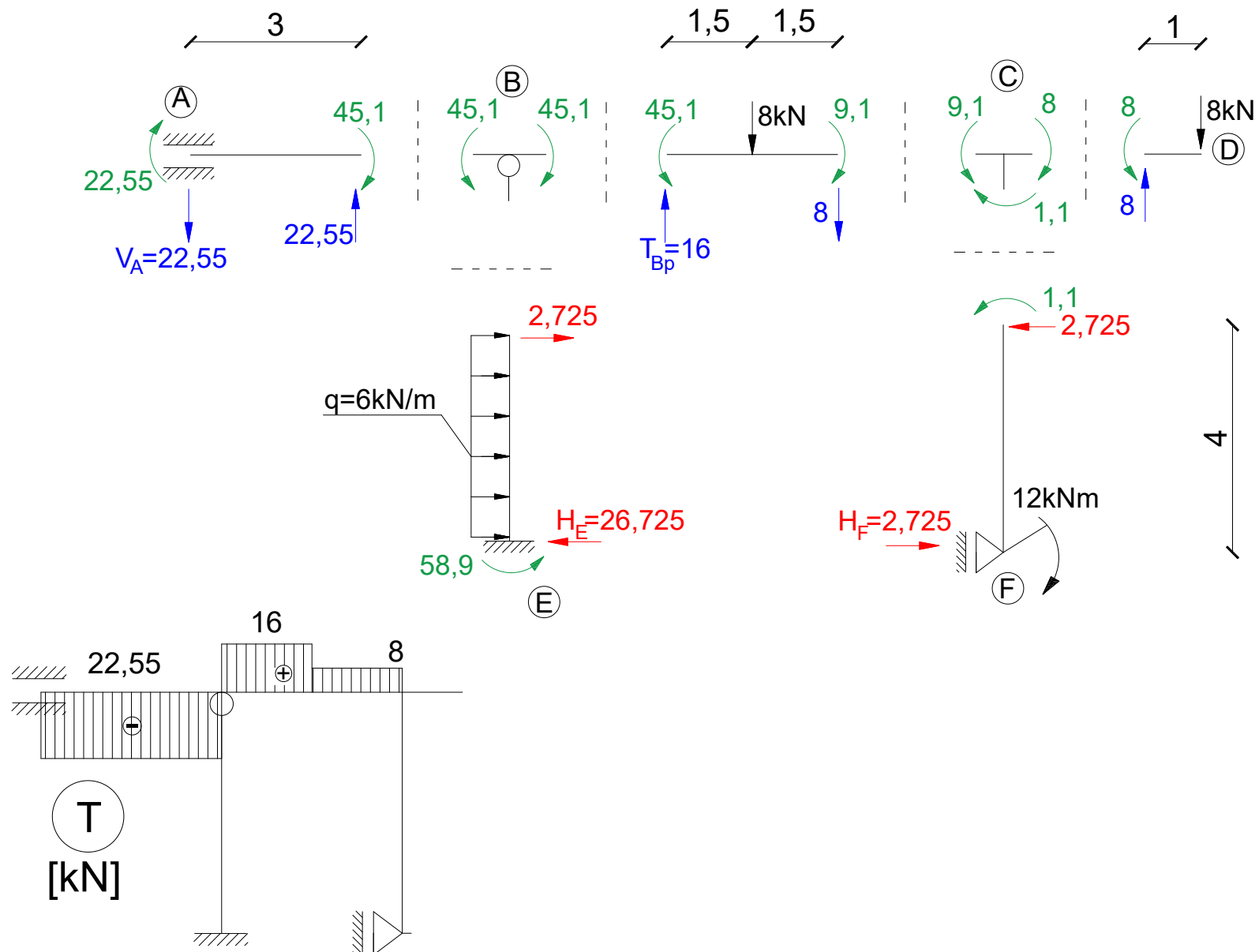
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



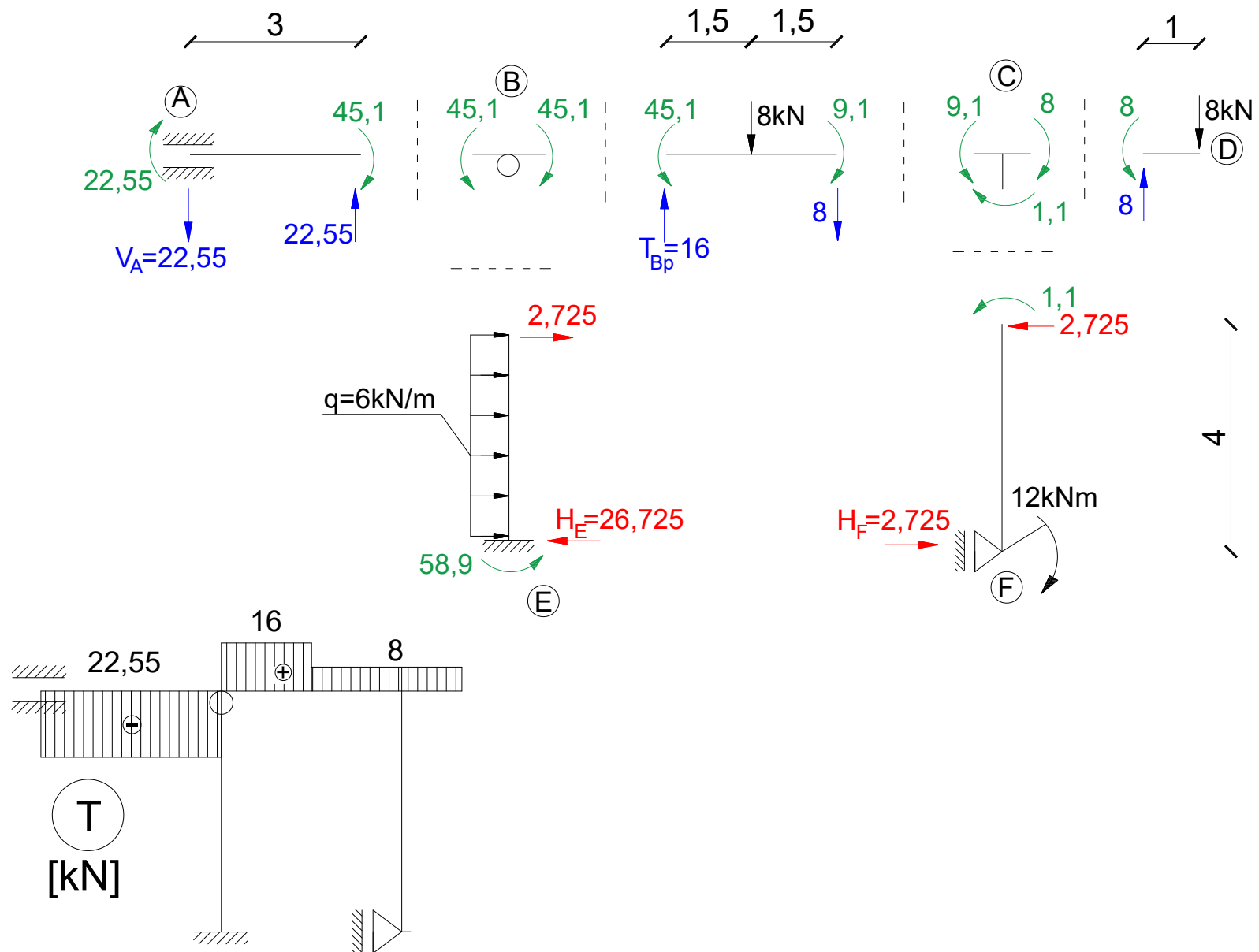
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



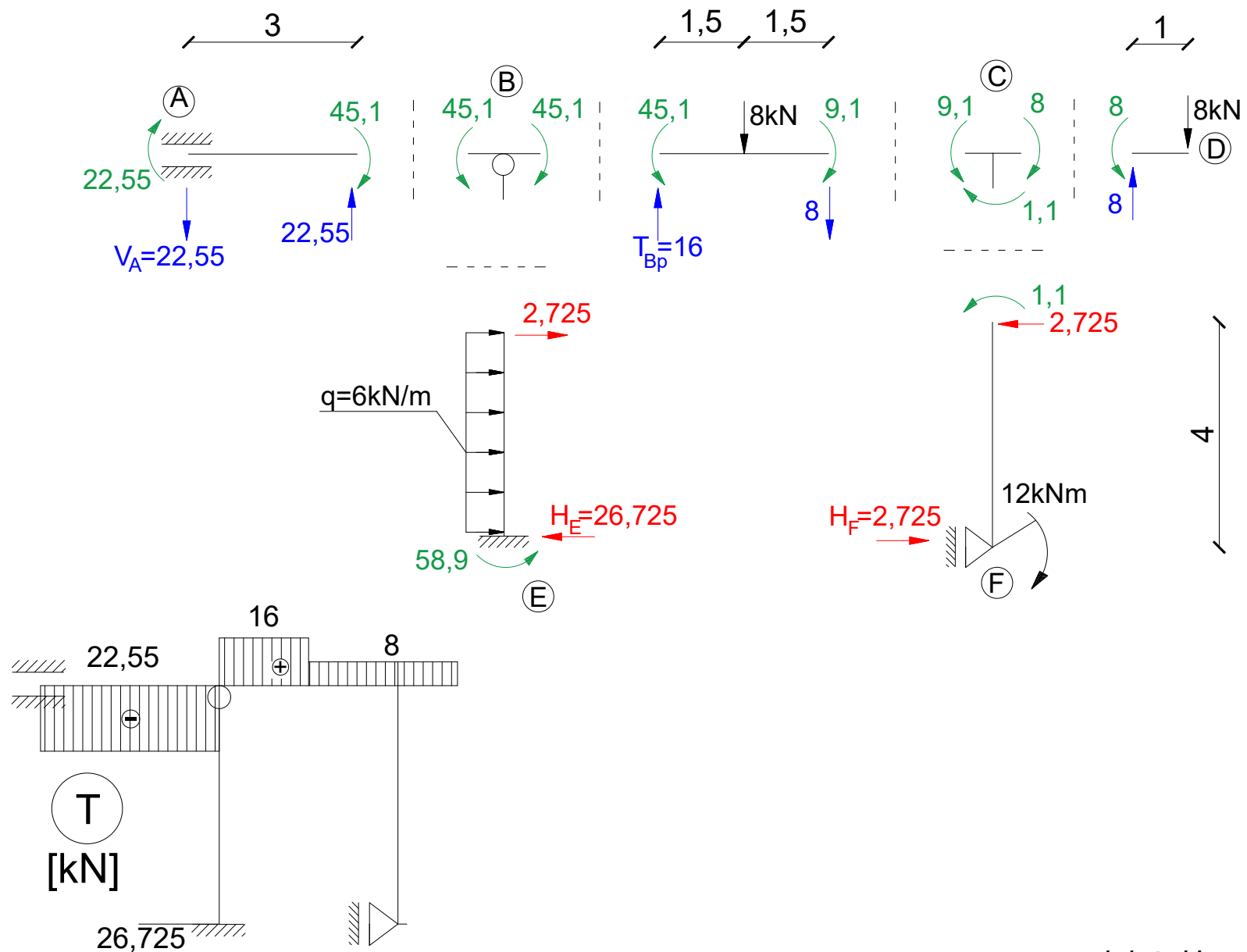
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



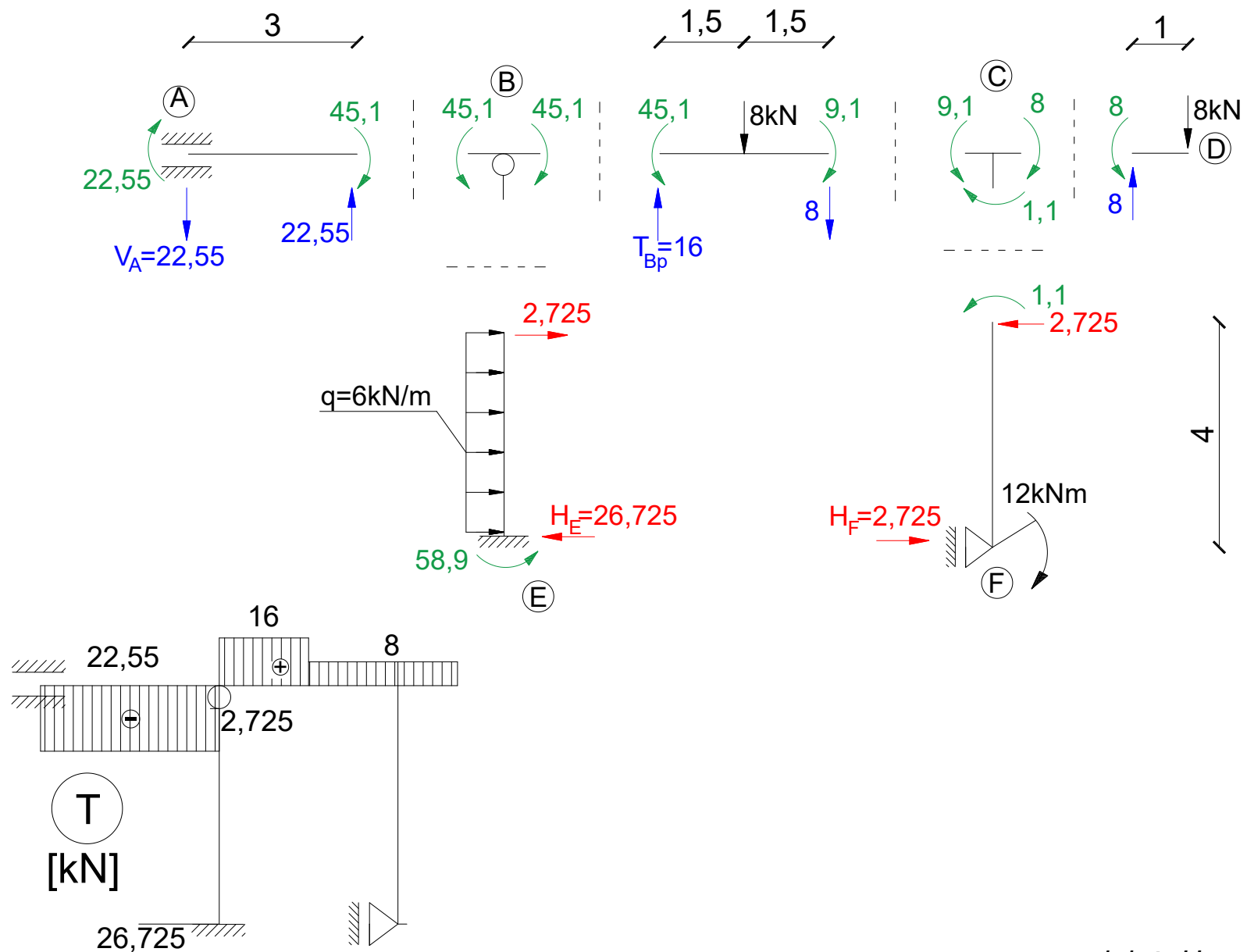
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



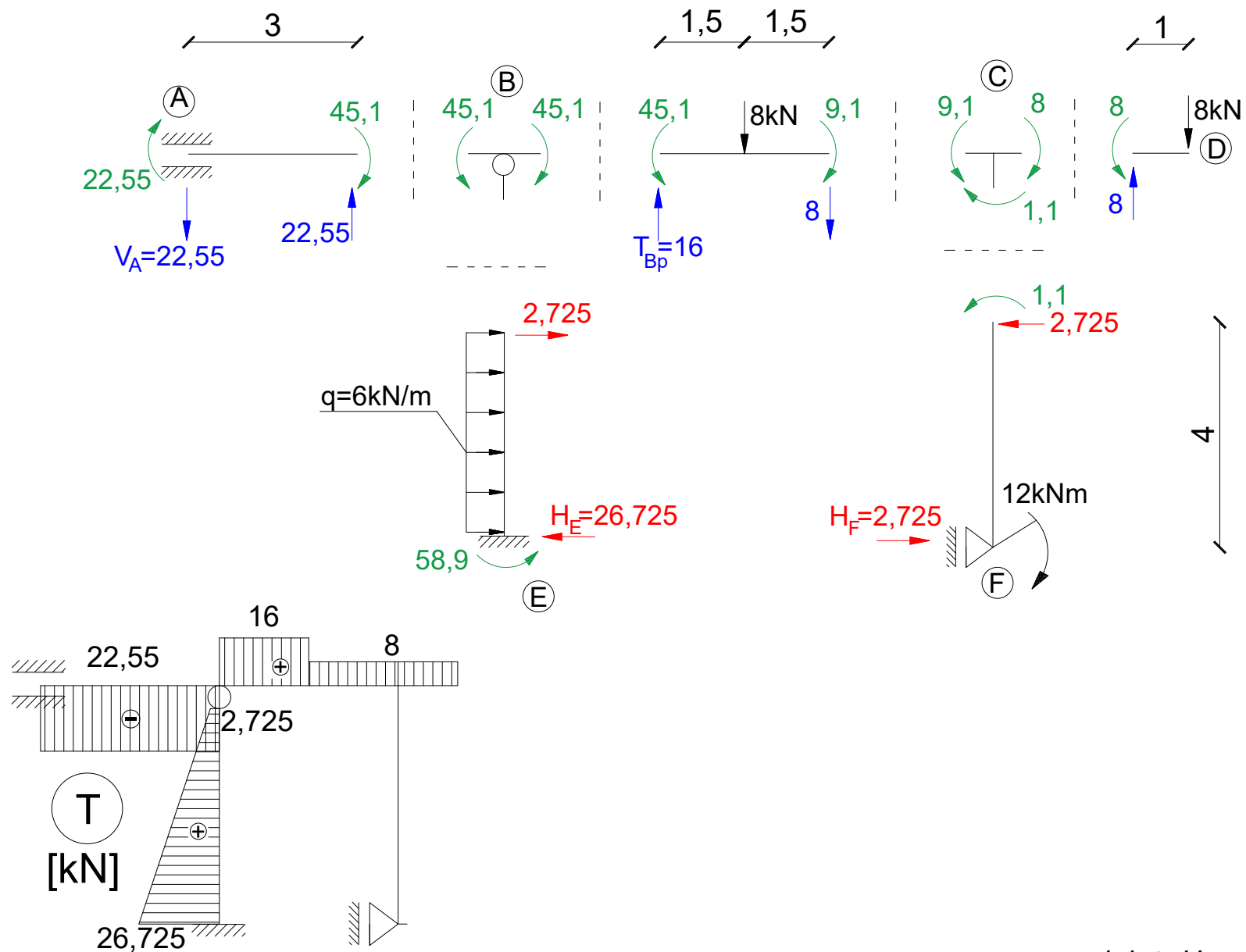
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



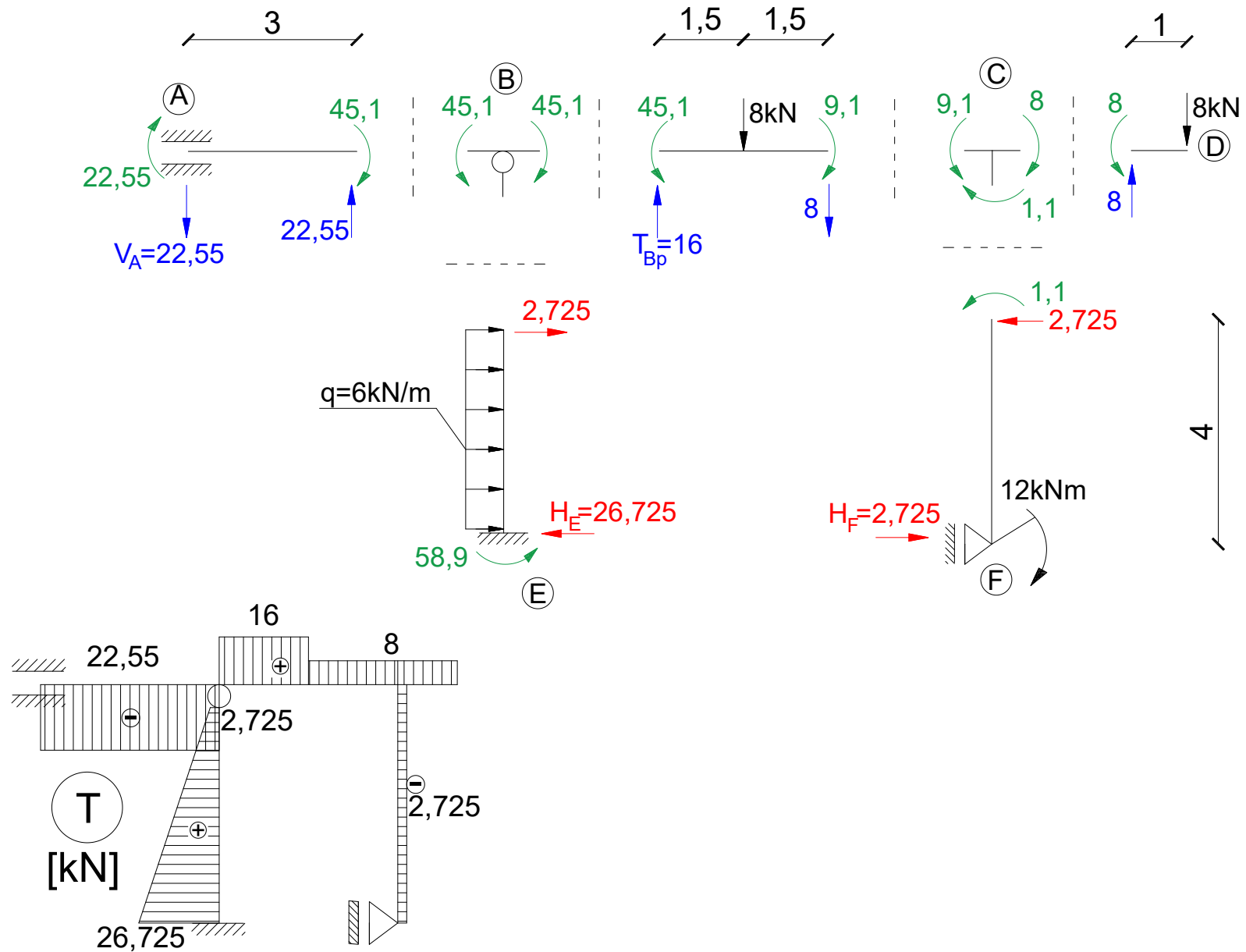
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



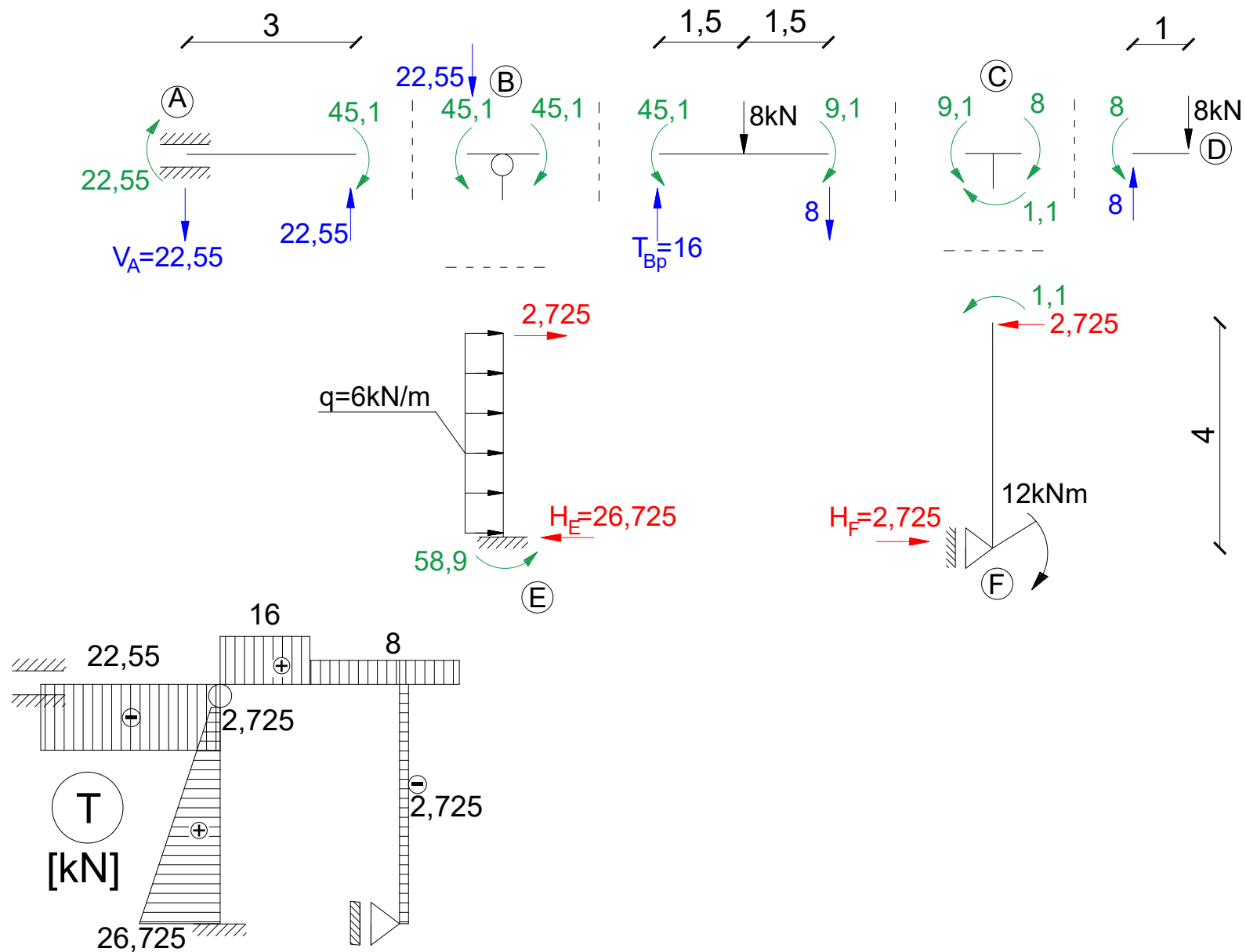
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



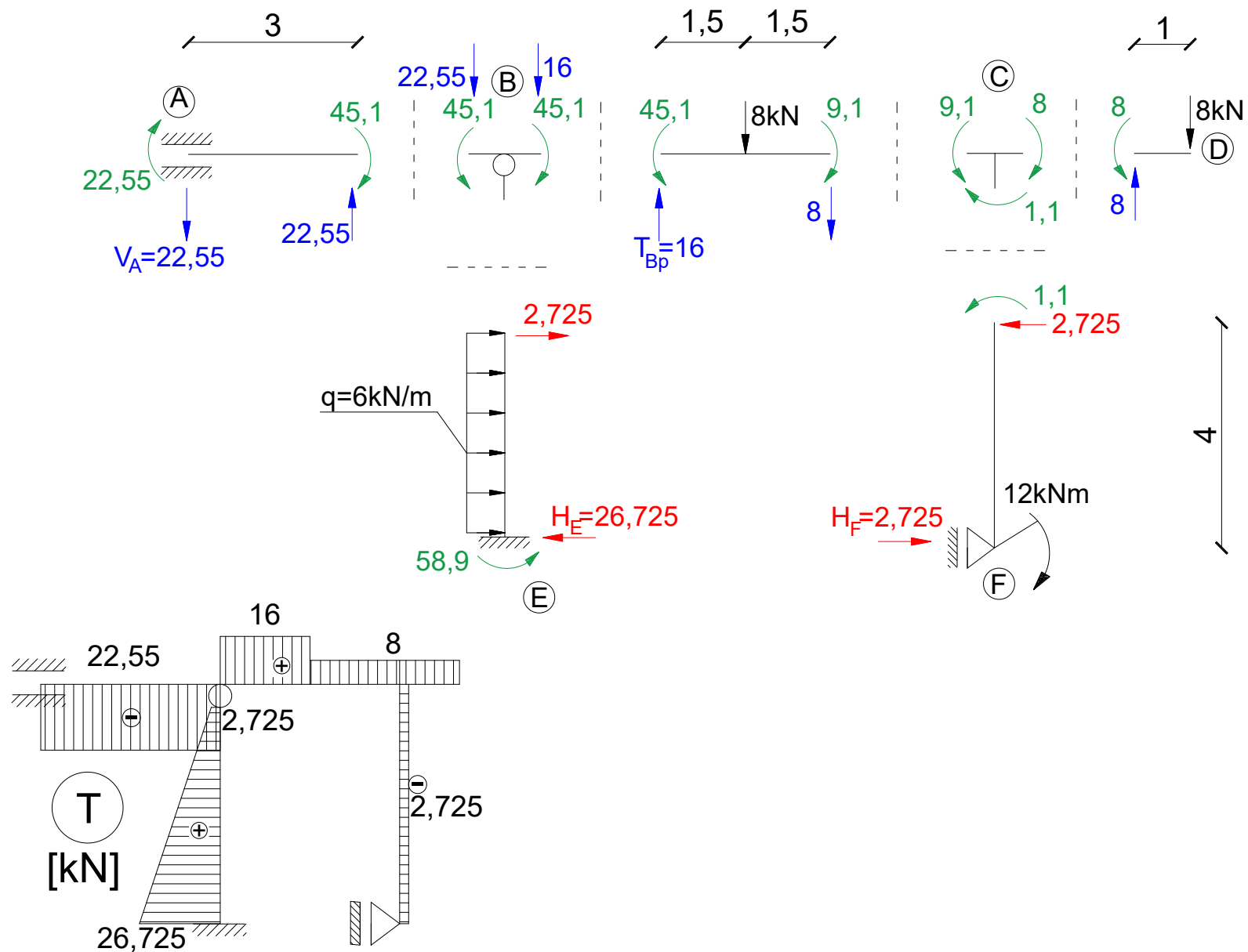
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



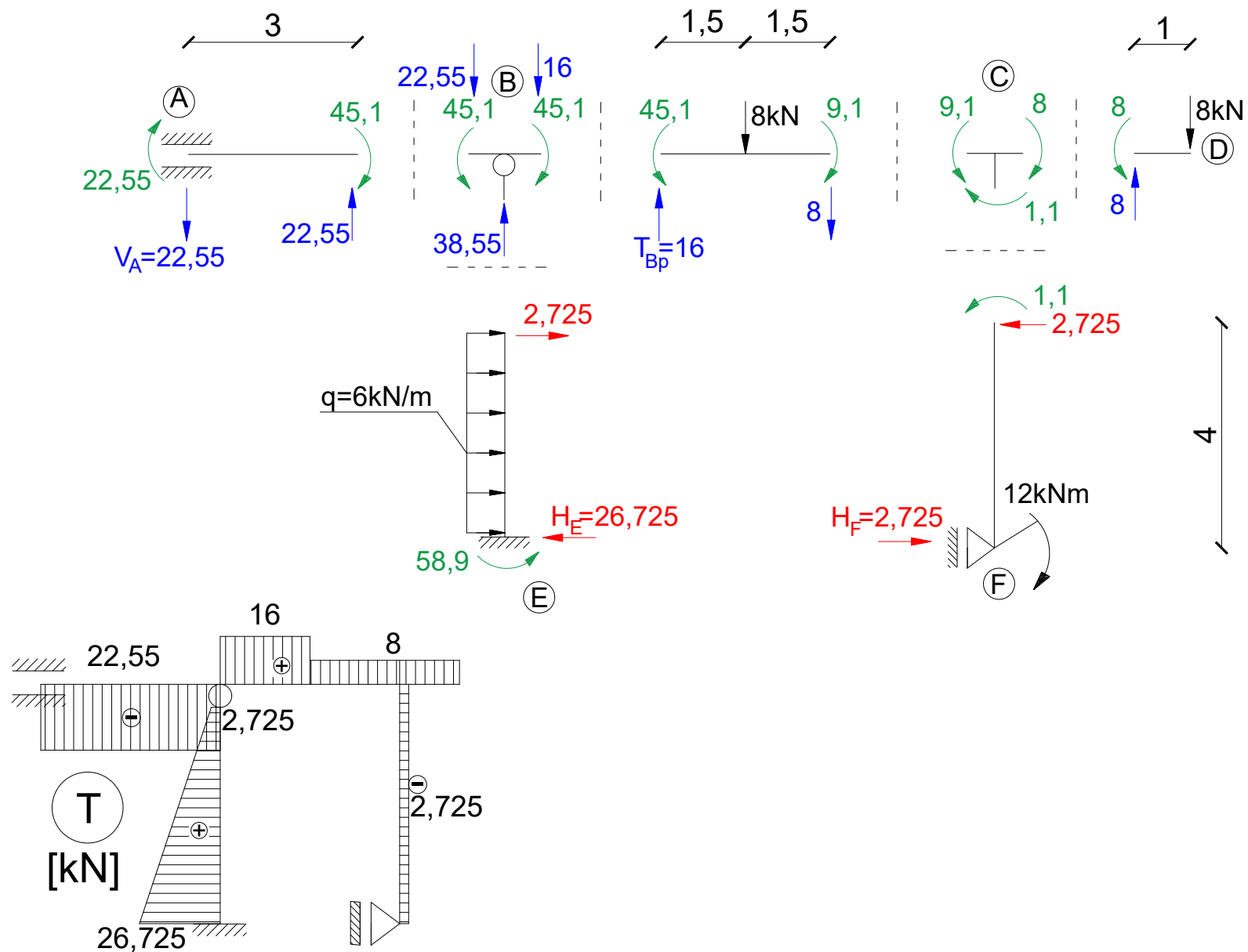
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



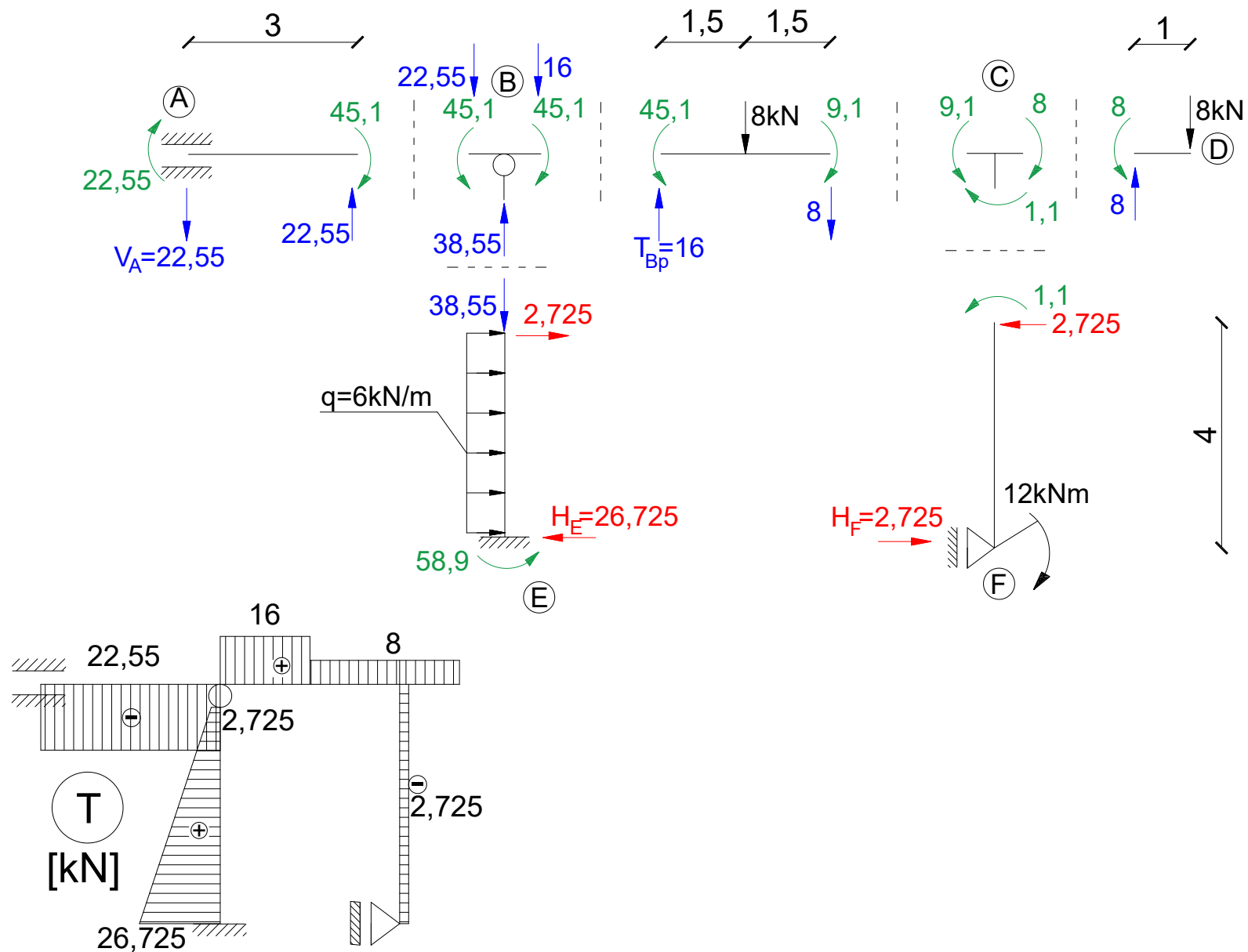
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



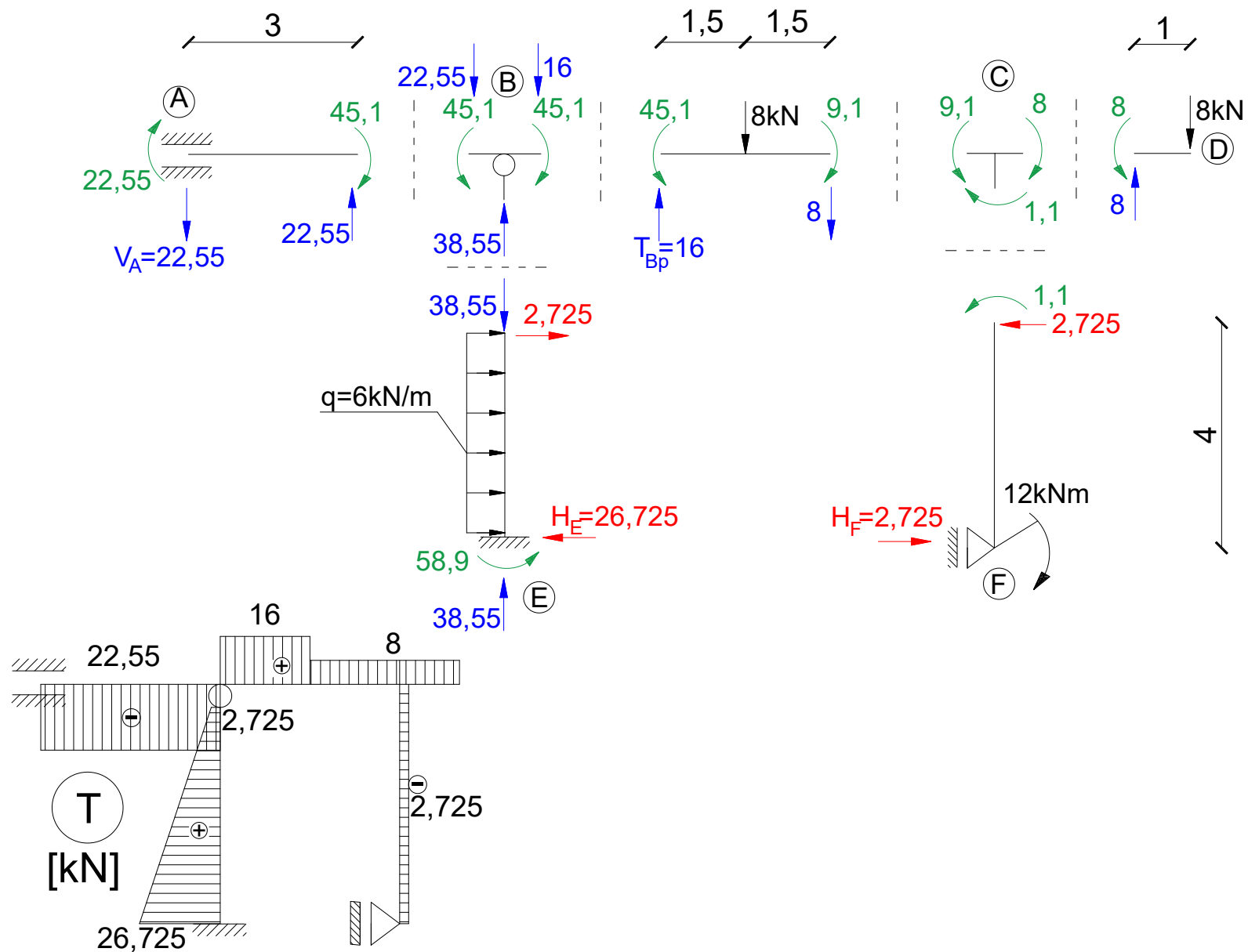
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



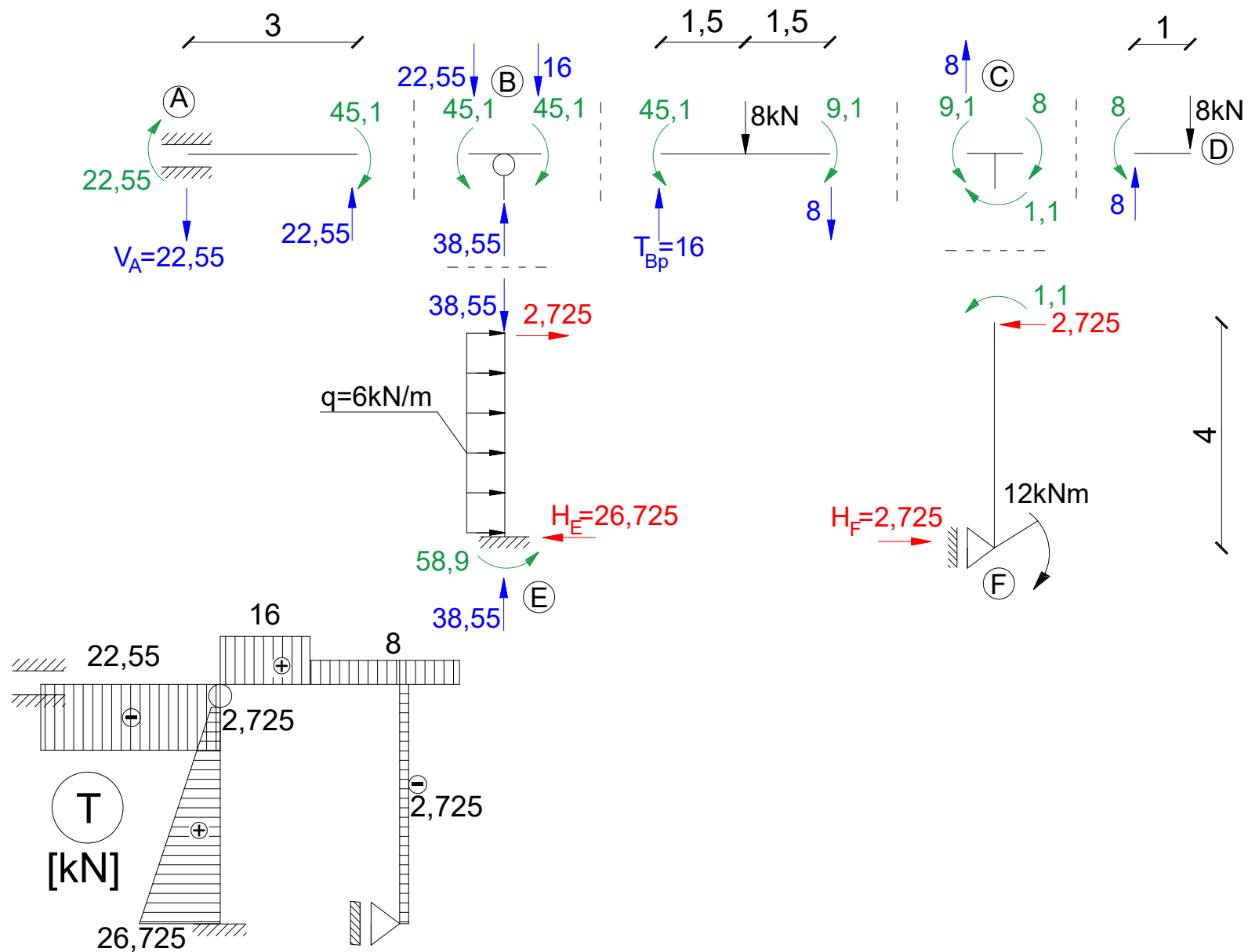
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



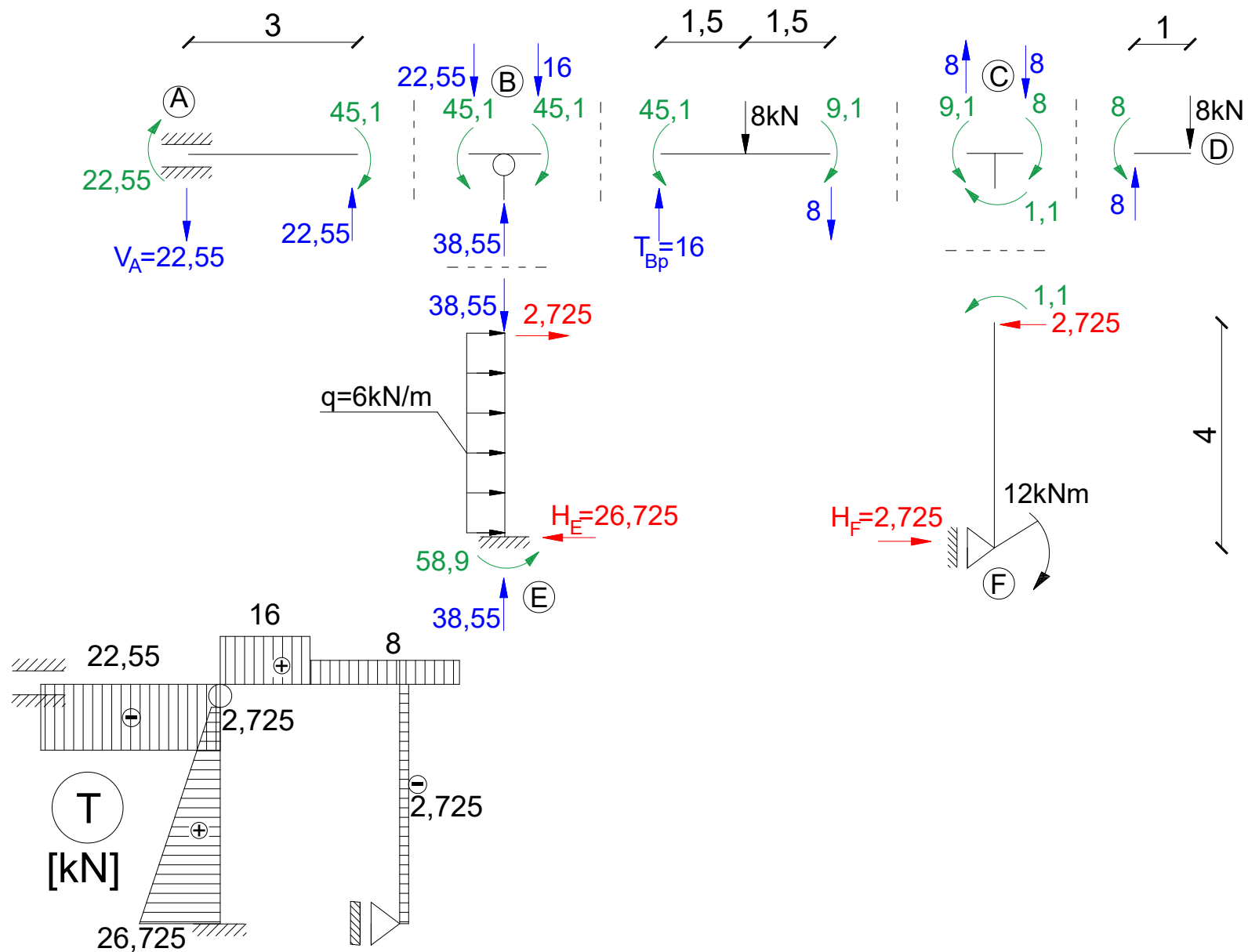
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



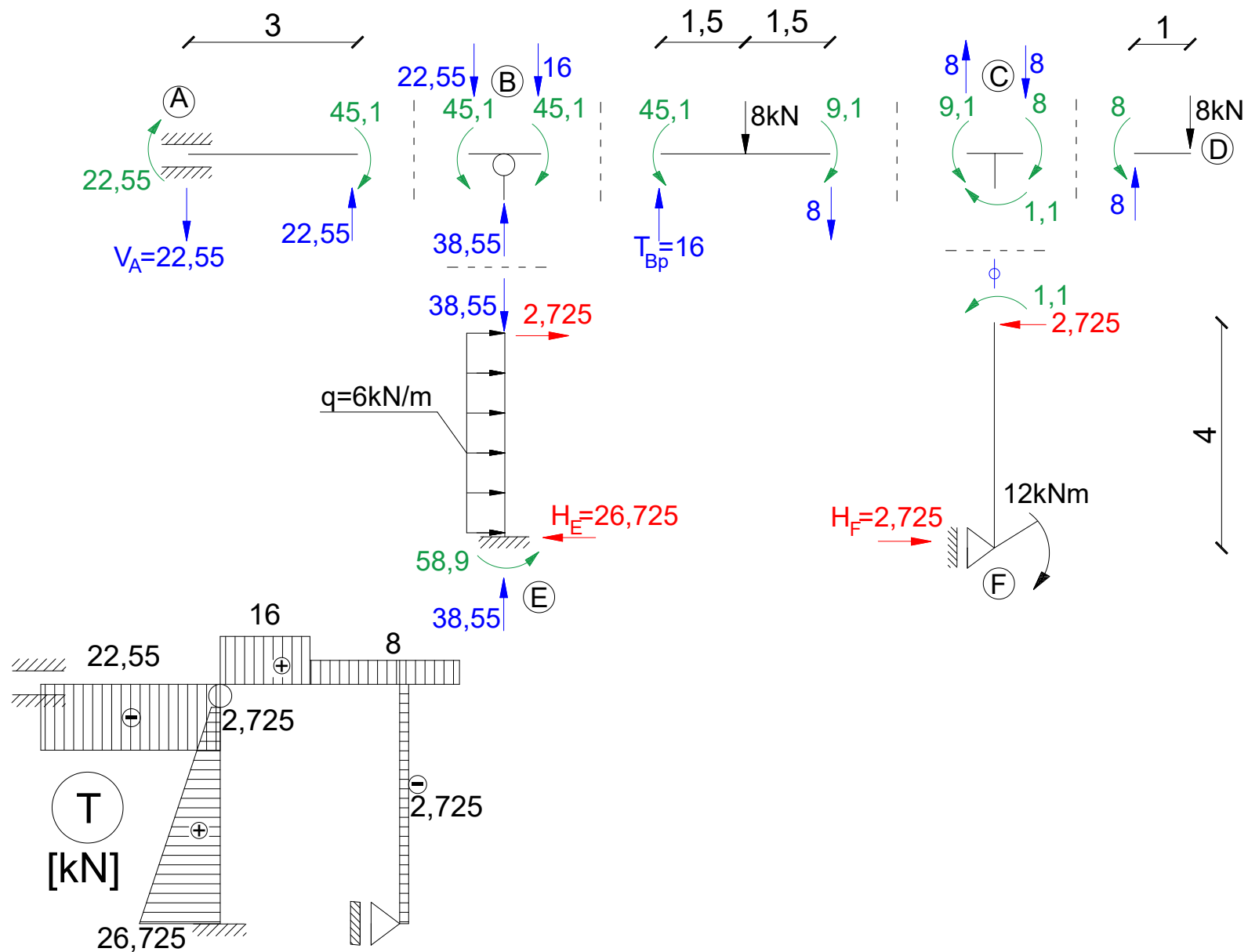
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



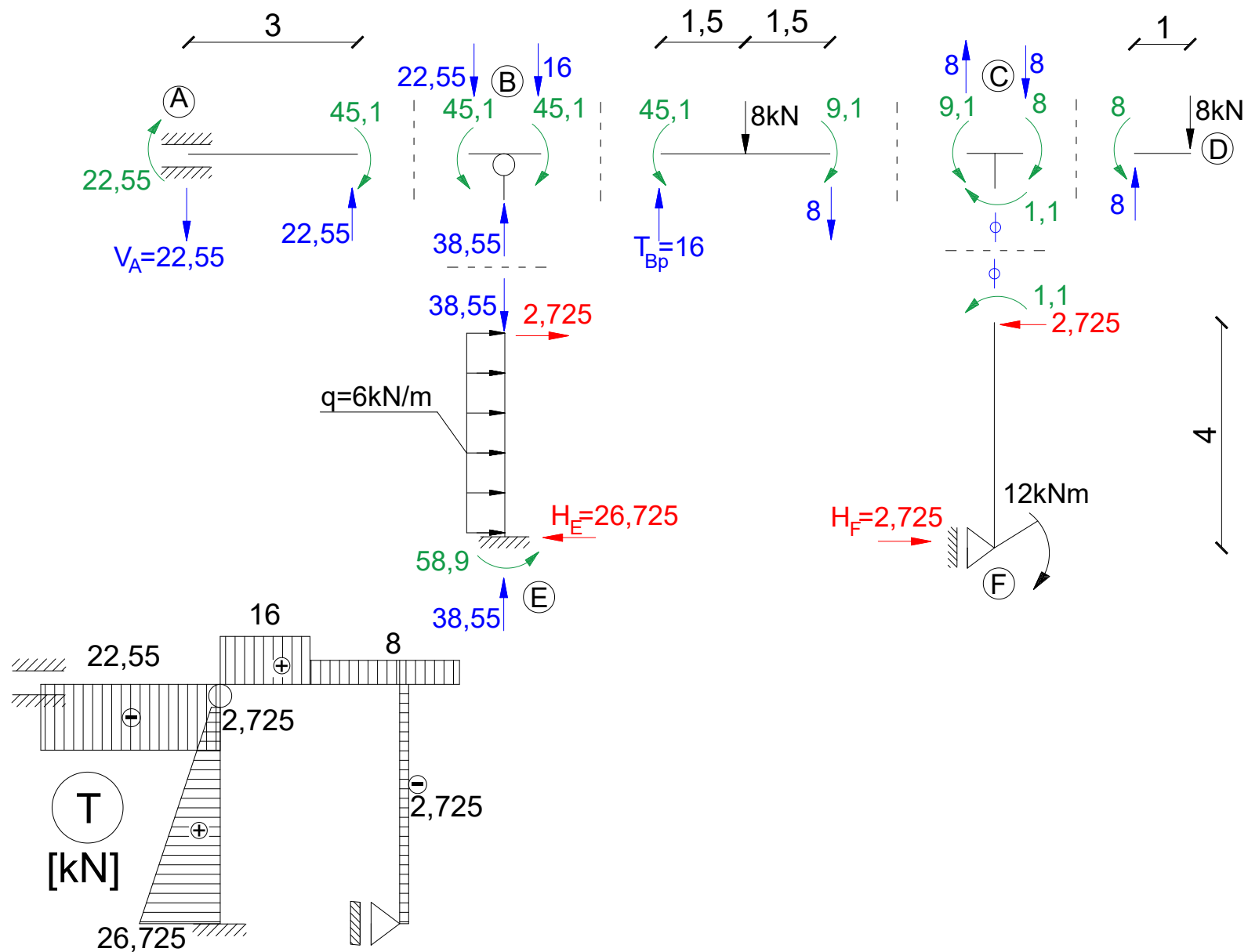
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



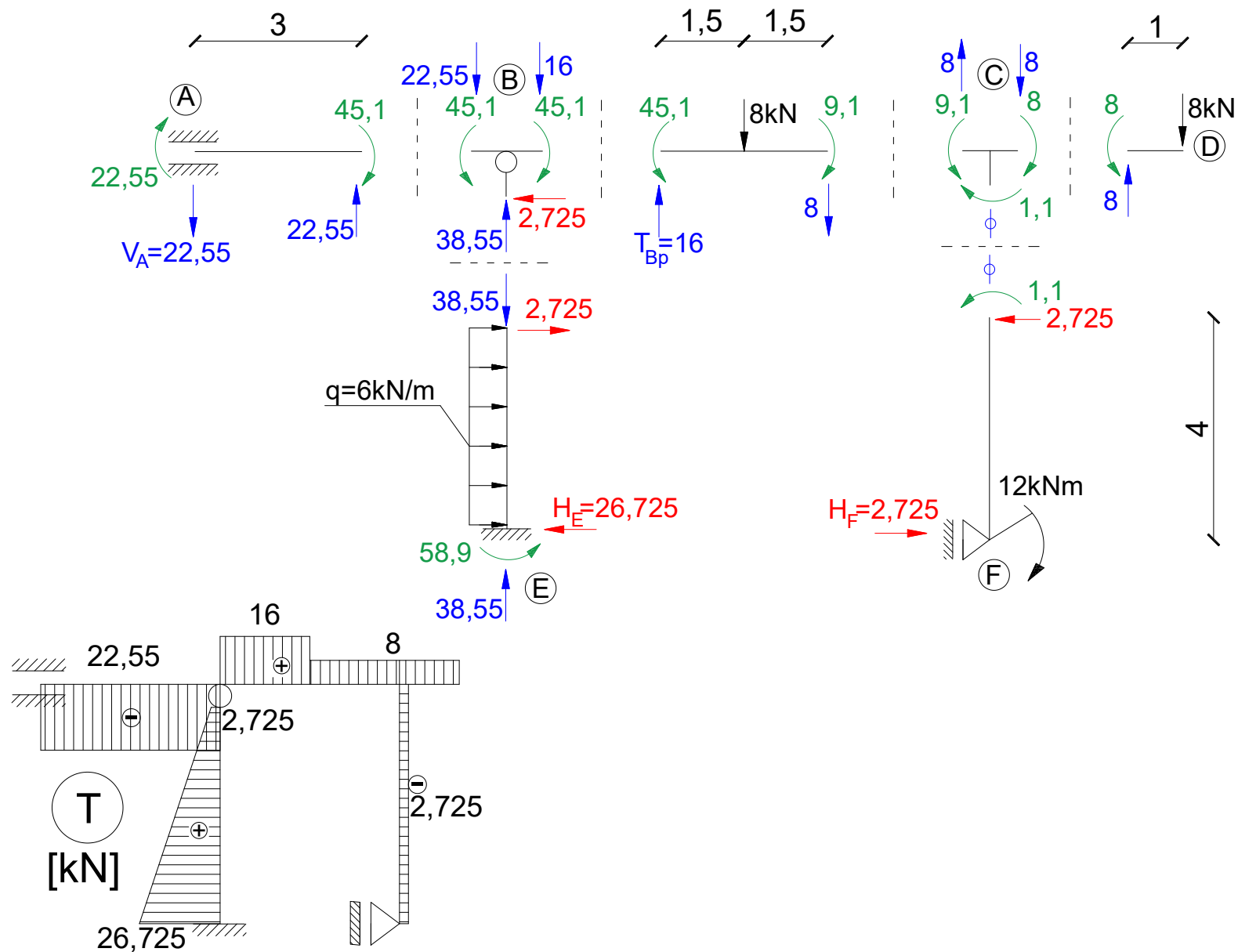
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



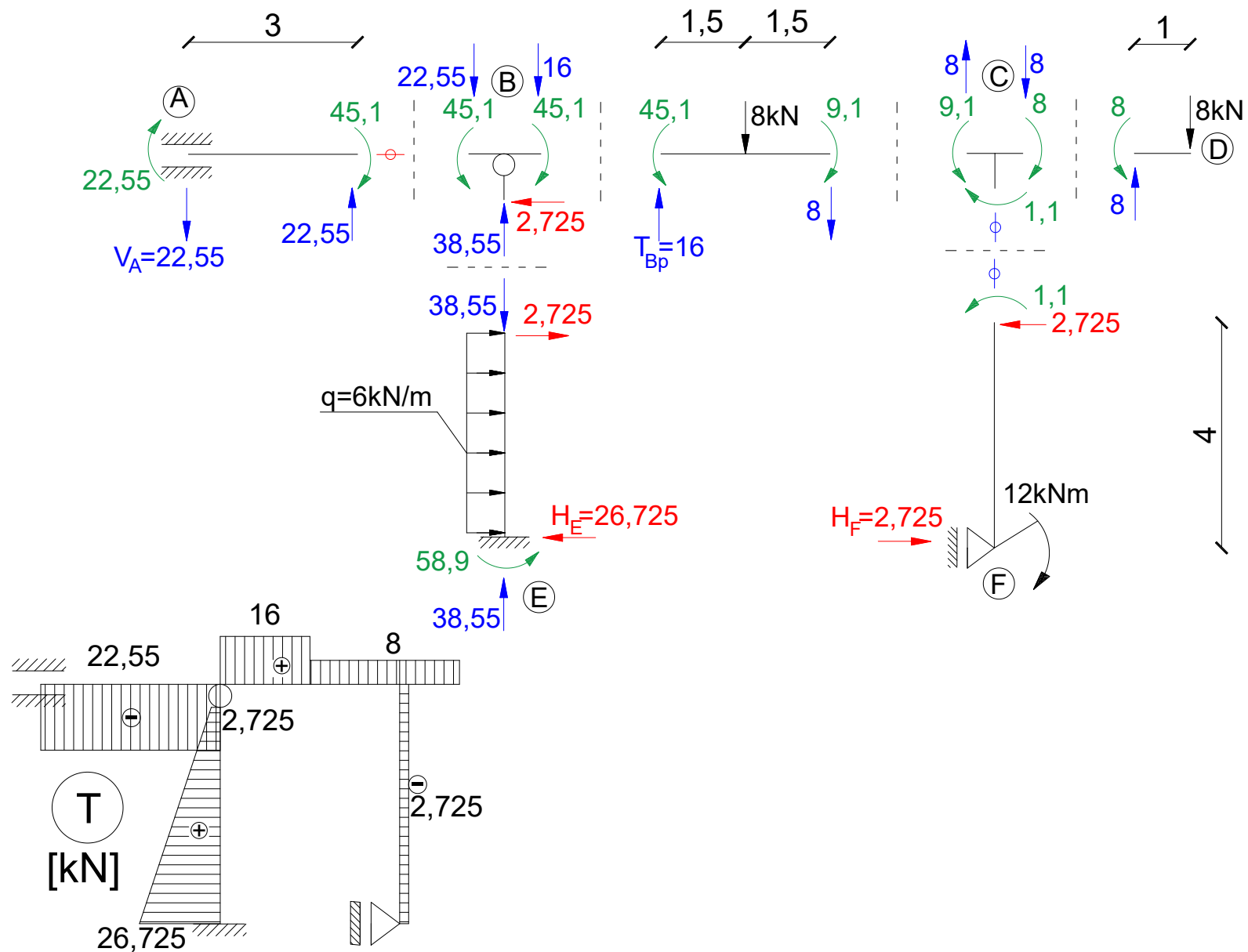
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



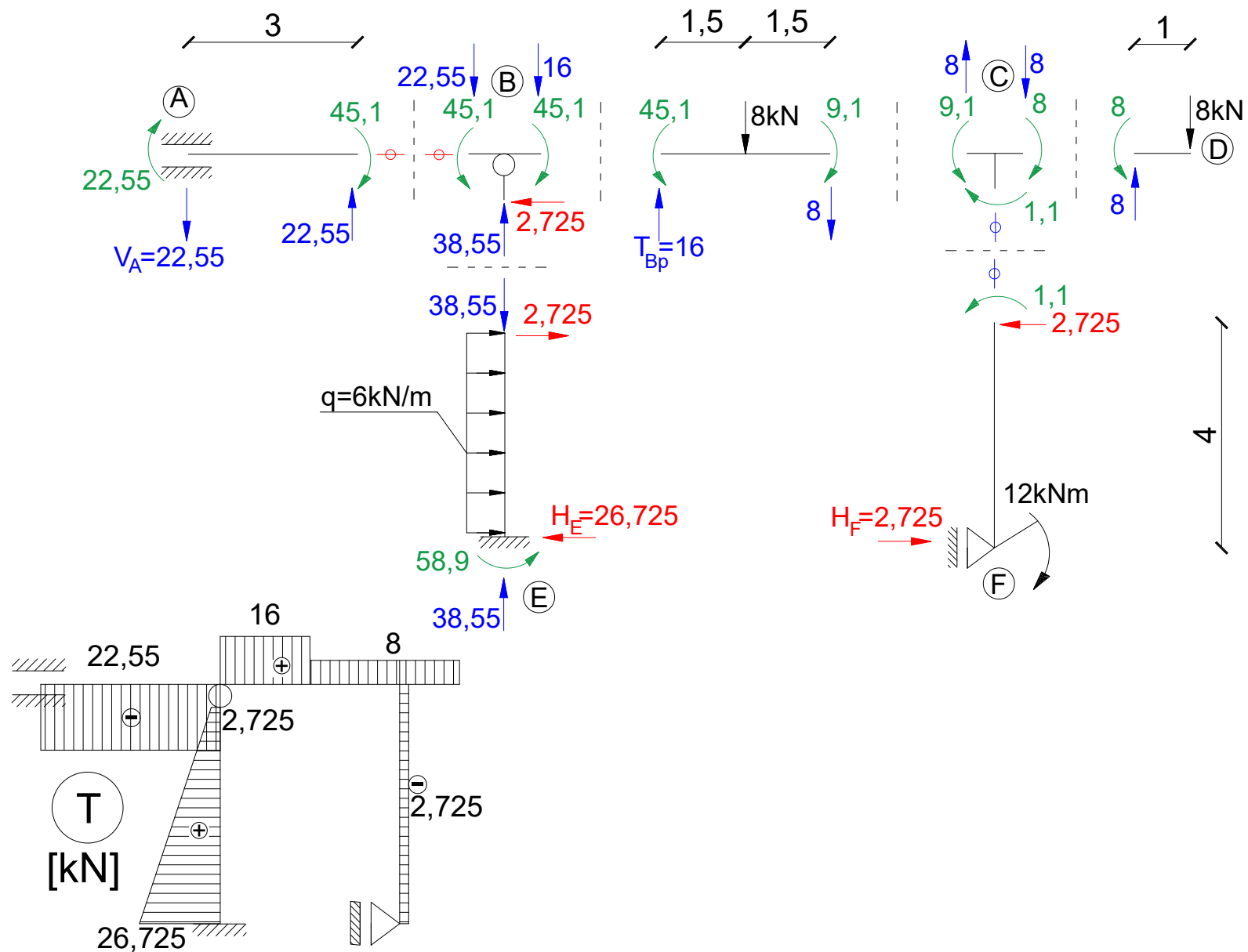
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



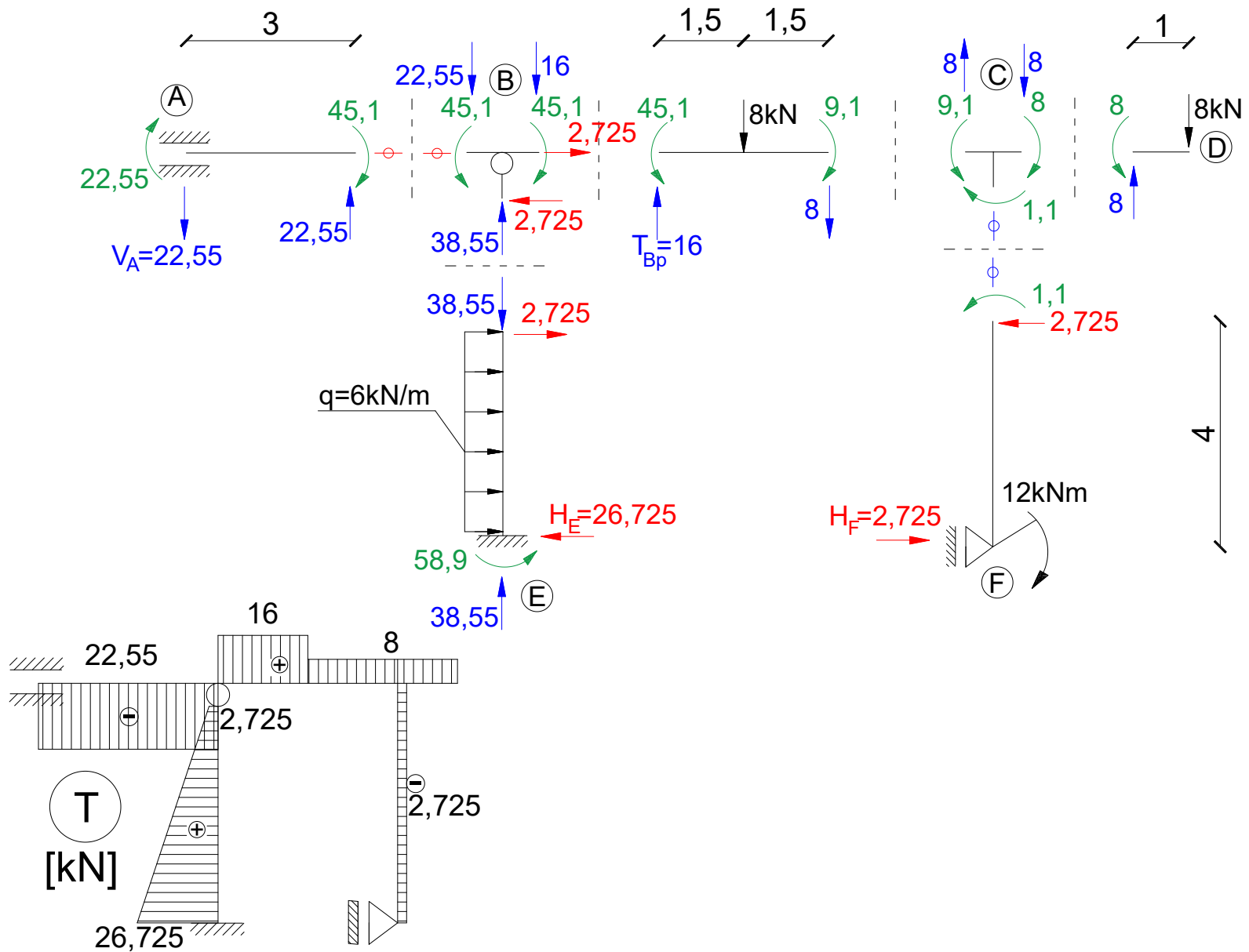
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



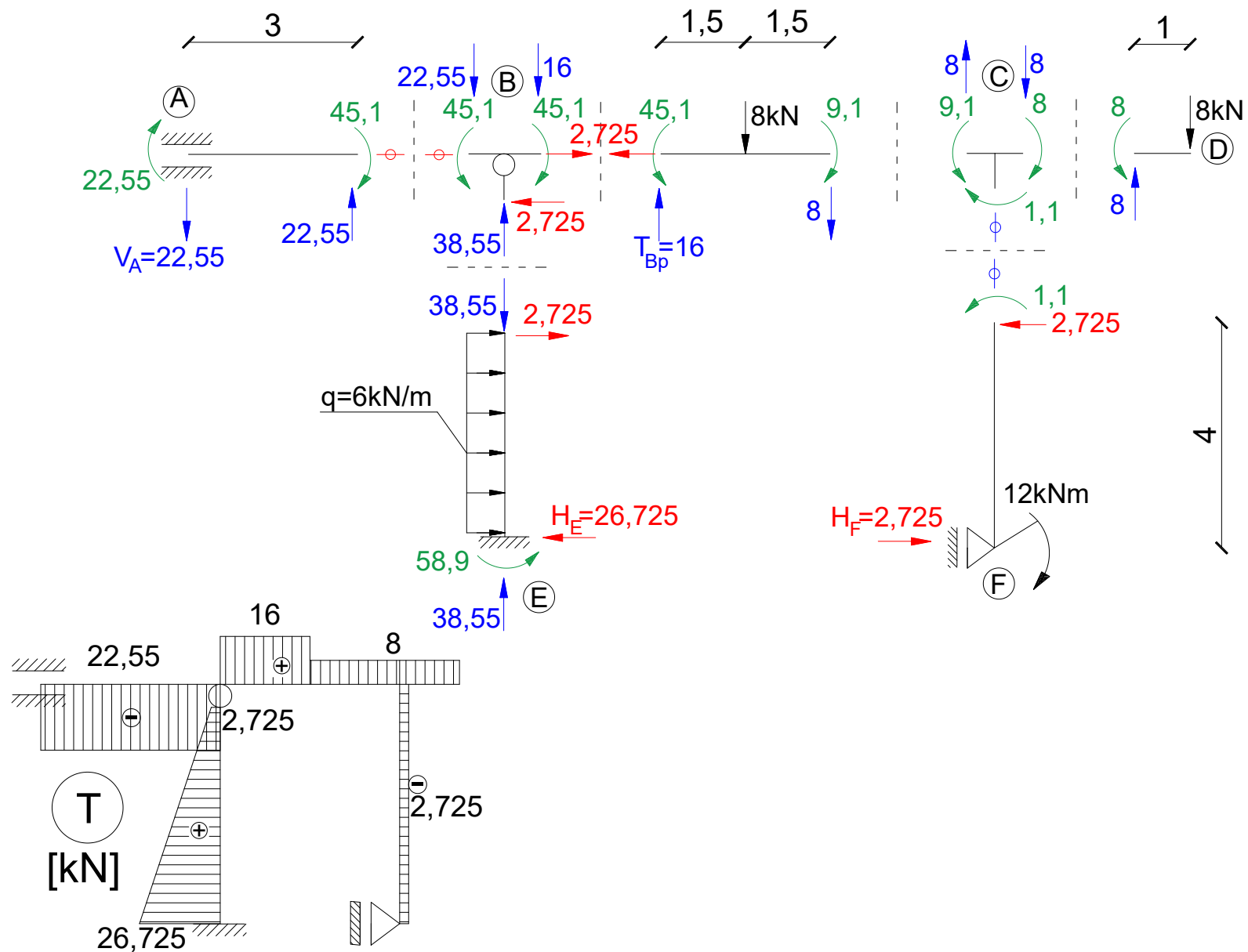
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



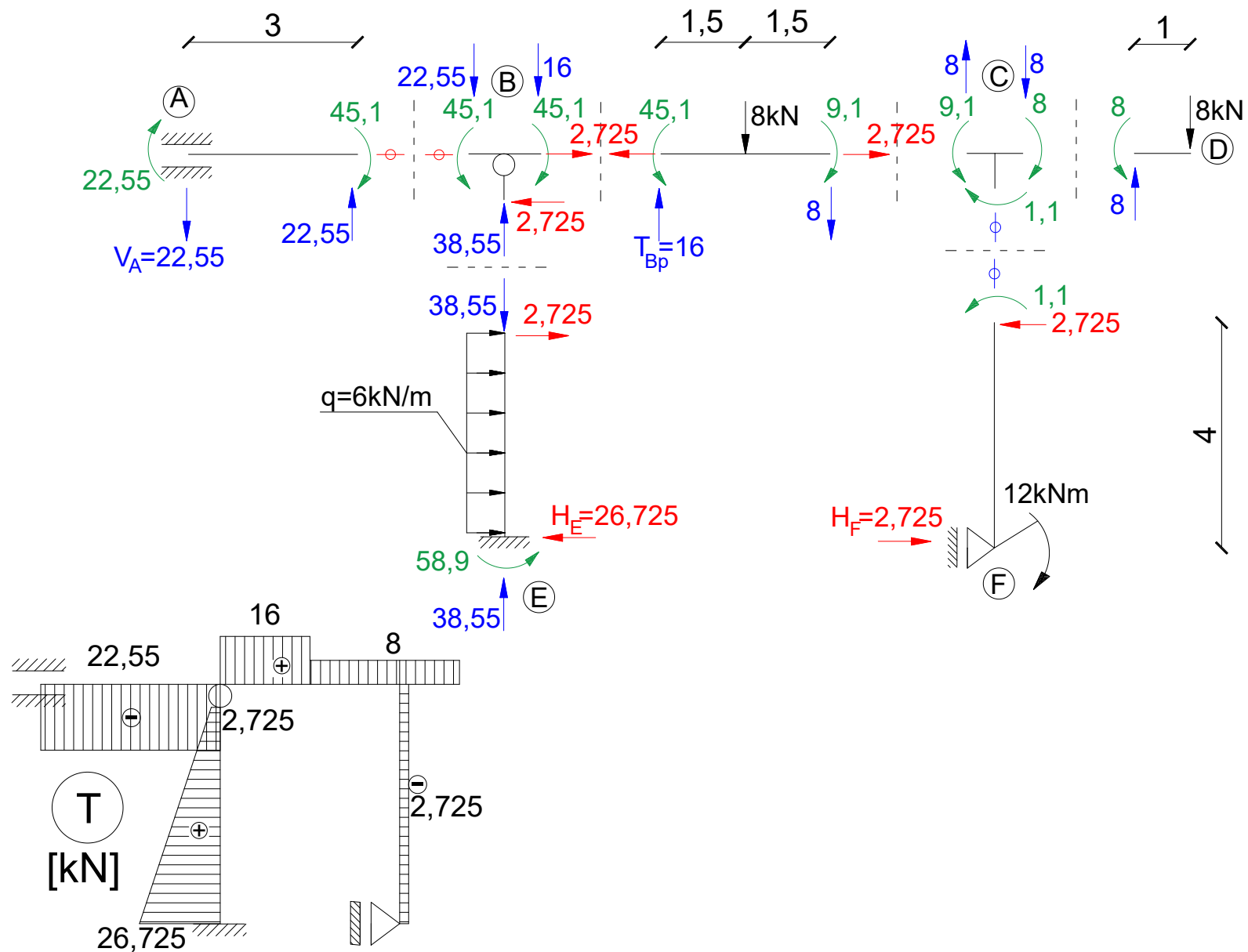
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



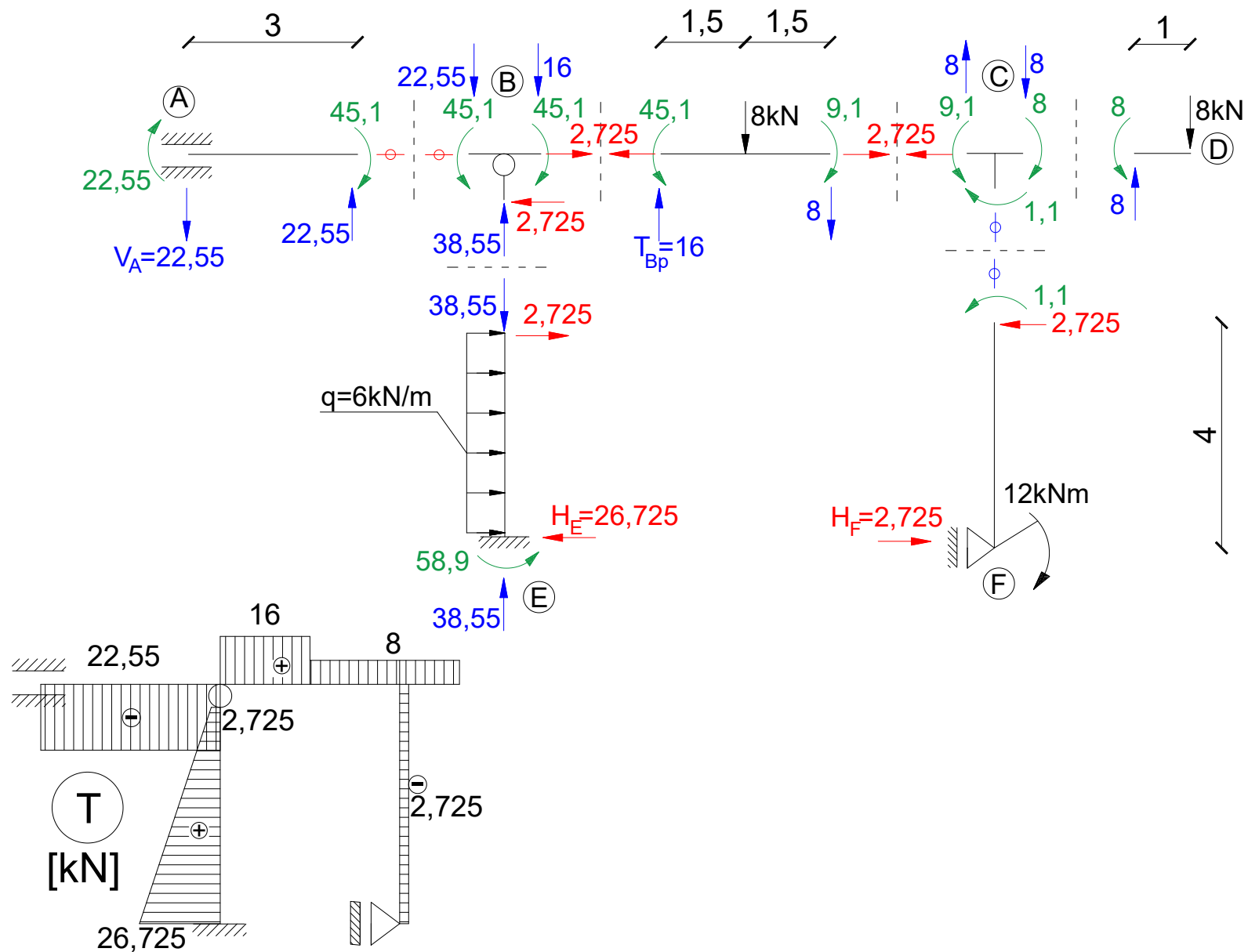
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



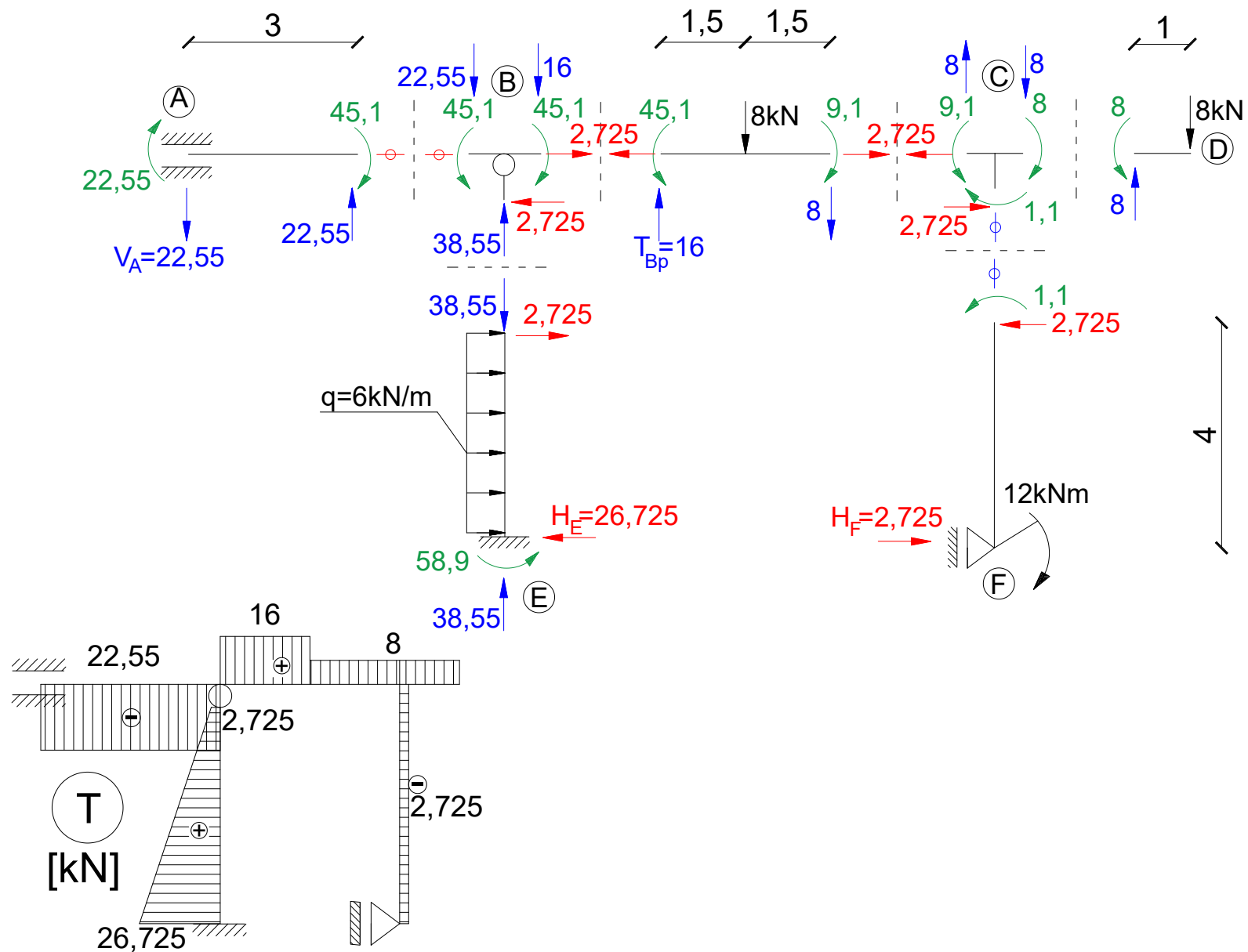
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



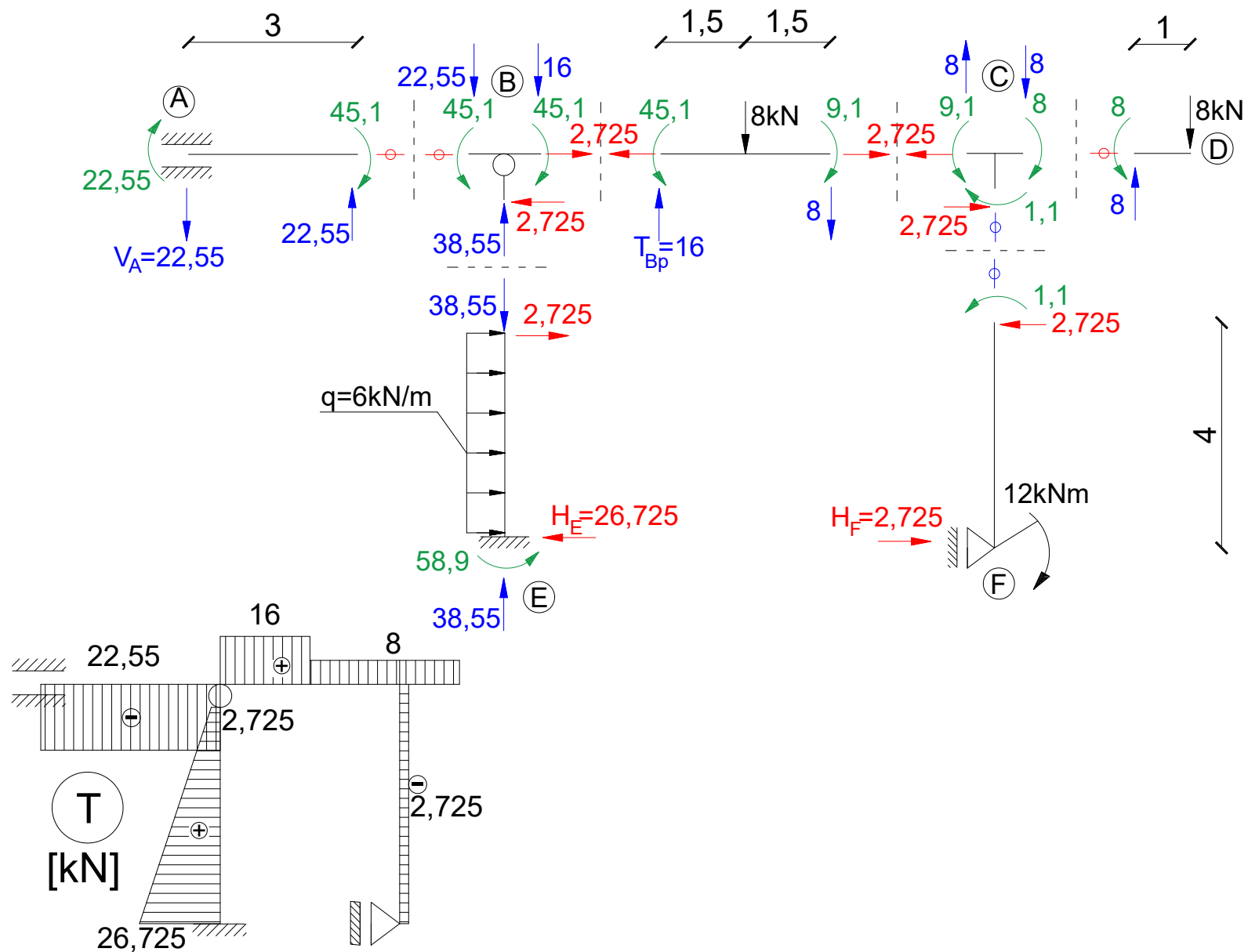
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



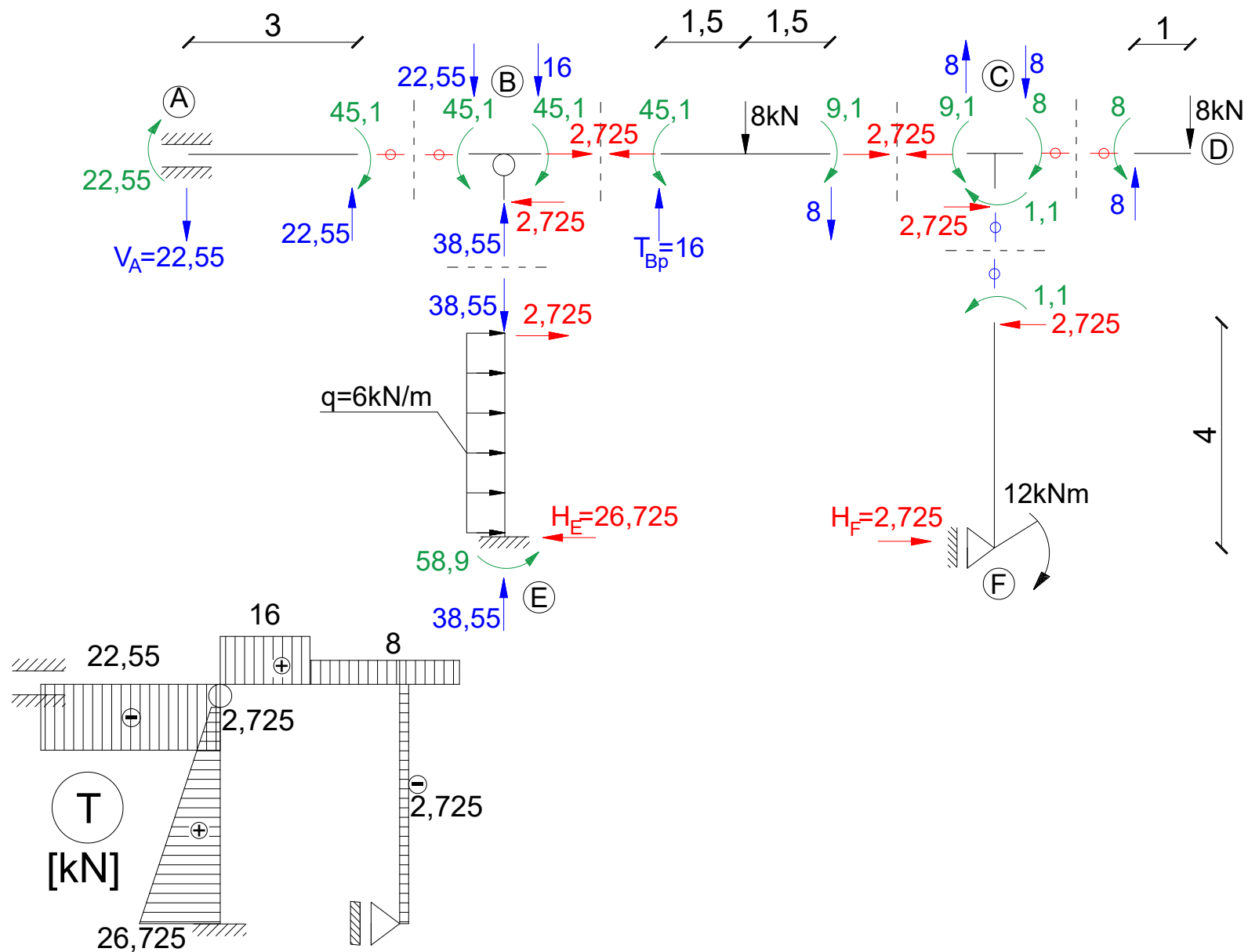
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



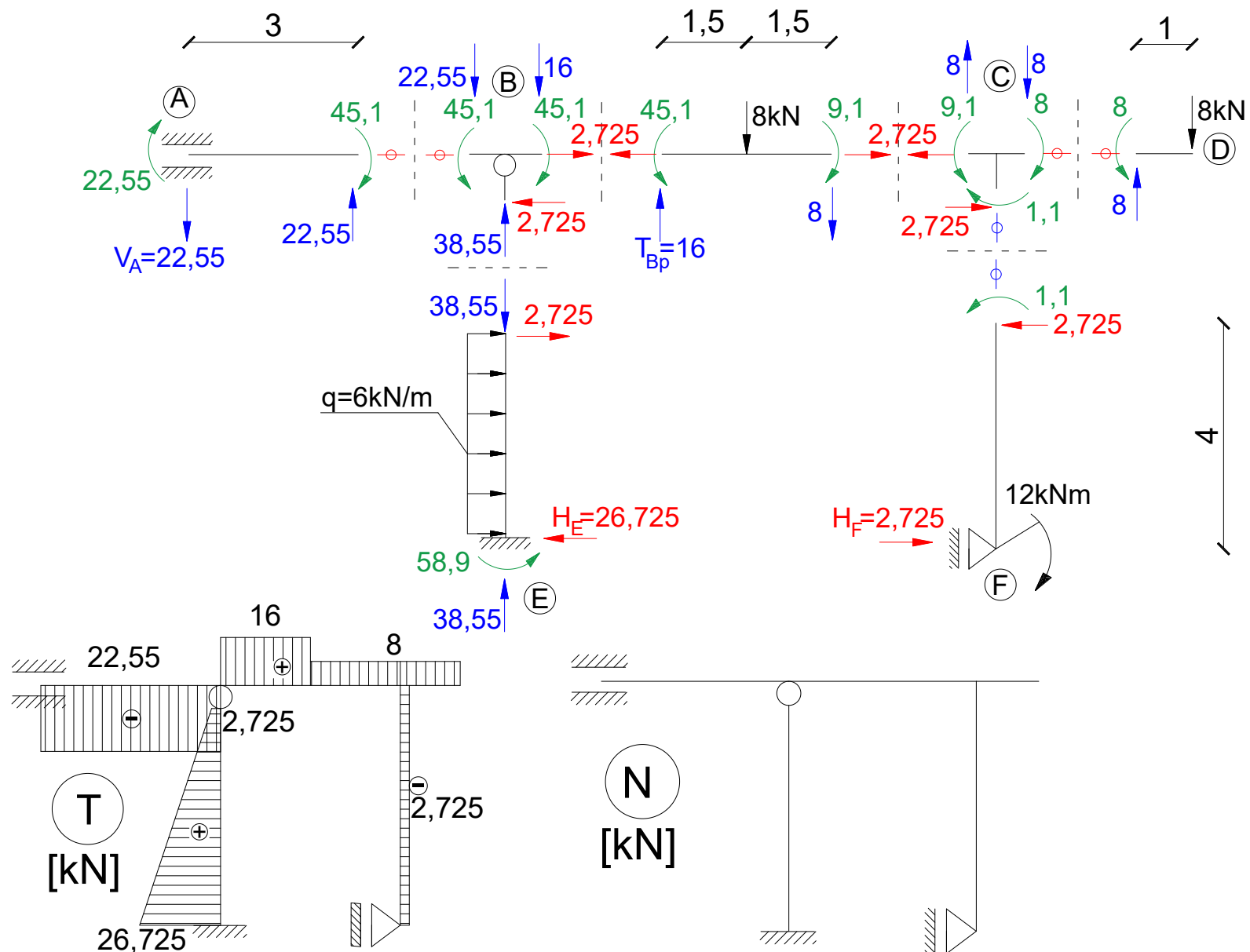
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



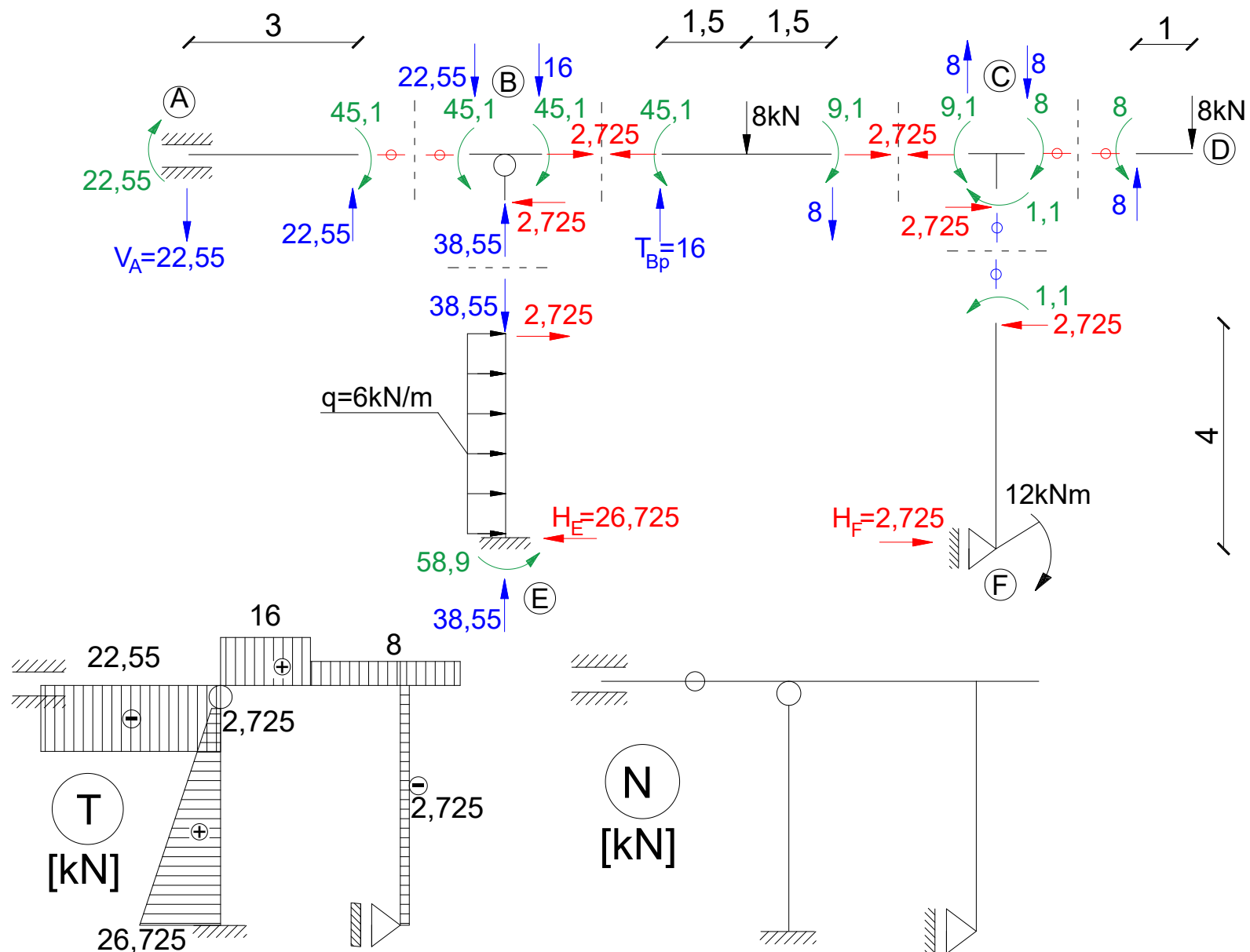
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



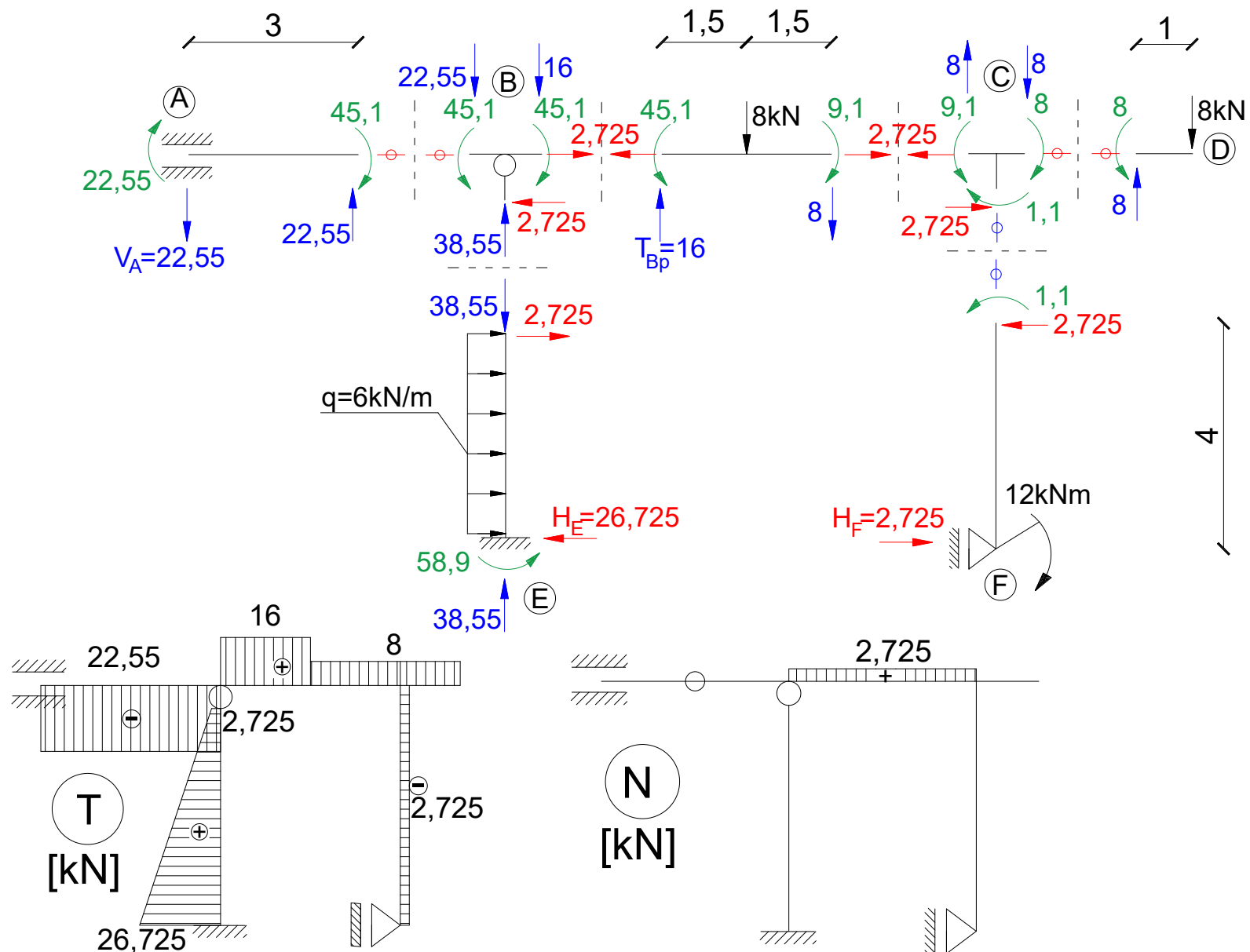
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



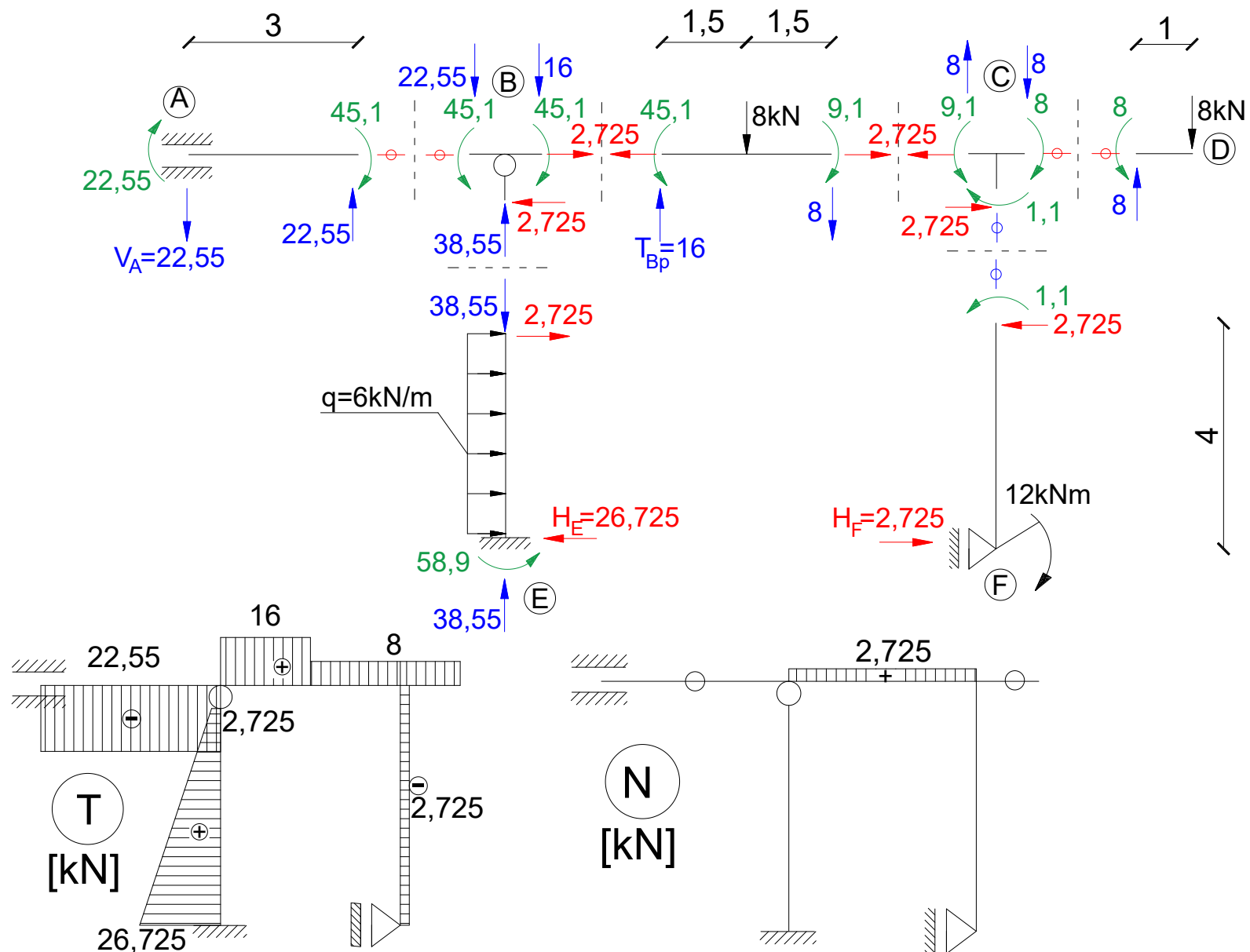
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



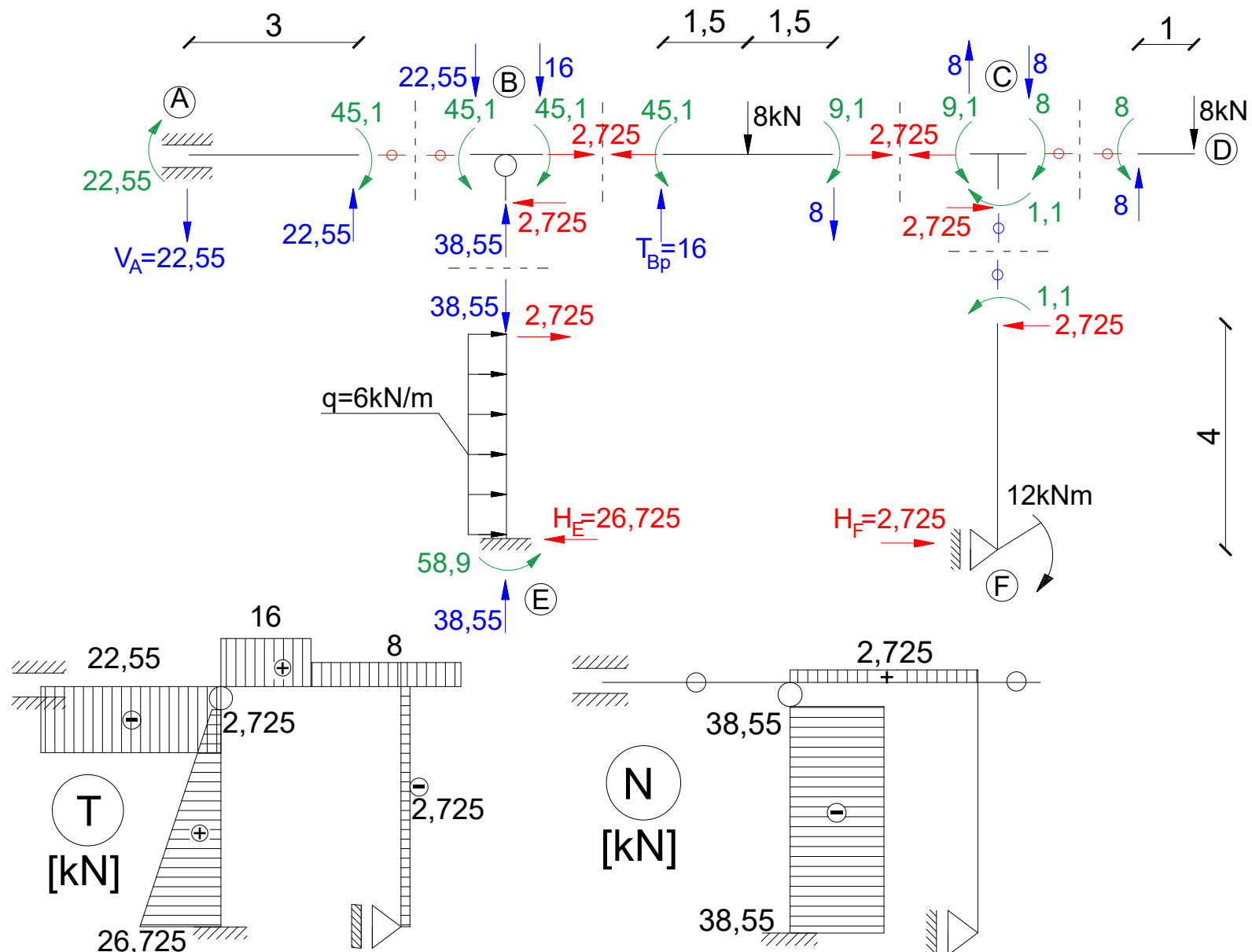
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



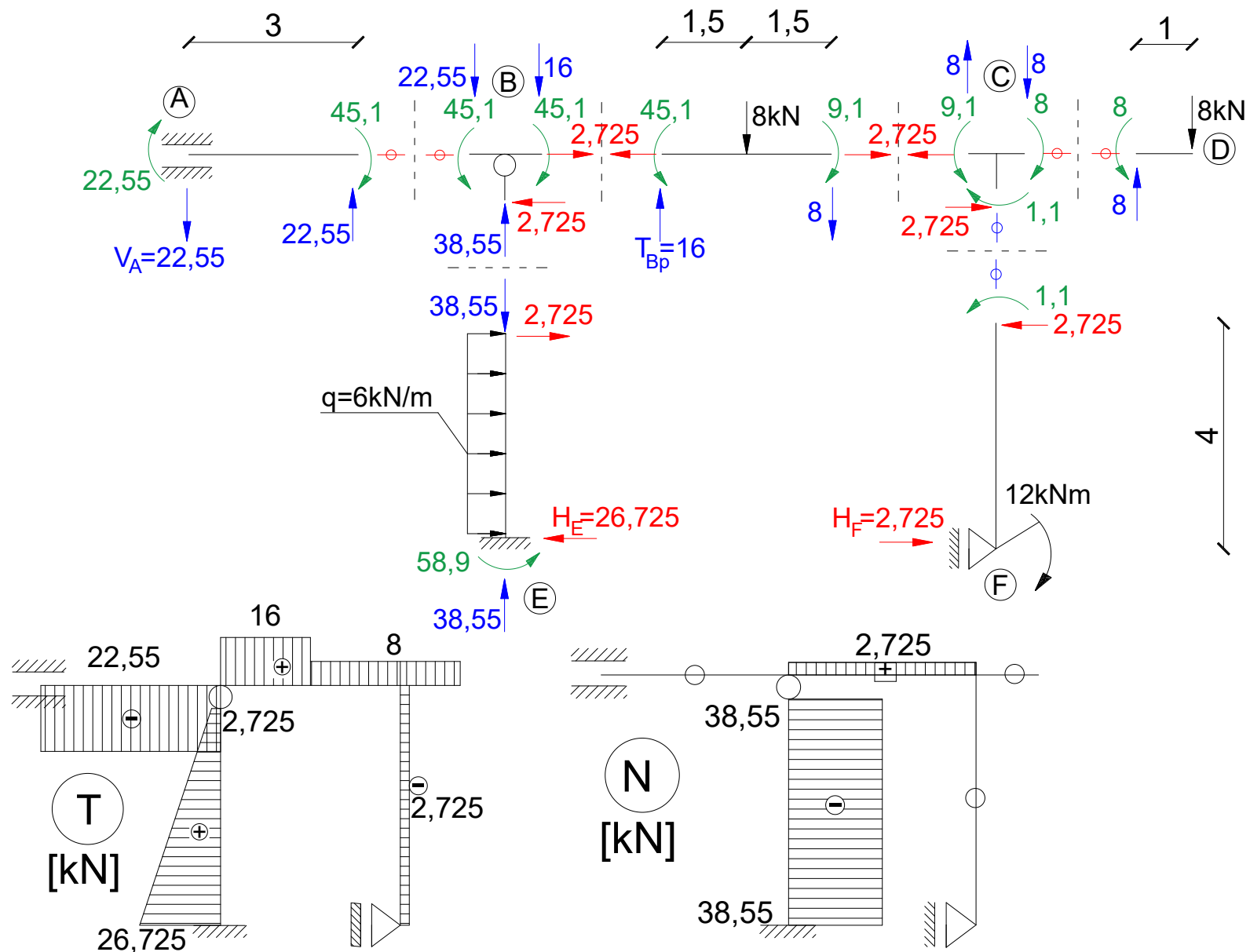
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Twierdzenia redukcyjne:

I twierdzenie redukcyjne:

Aby obliczyć przemieszczenie w układzie statycznie niewyznaczalnym, mnożymy końcowy wykres momentów od obciążeń rzeczywistych, otrzymany dla układu statycznie niewyznaczalnego – M , przez wykres momentów od obciążenia wirtualnego postawionego na schemacie podstawowym $\bar{M}_i$.

$$\delta = \int_L \frac{M \bar{M}_i}{EI} dL$$

Zastosowanie:

- Sprawdzanie poprawności wykresu momentów dla ramy statycznie niewyznaczalnej,
- liczenie przemieszczeń, gdy w treści zadania należy wykonać końcowy wykres momentów.

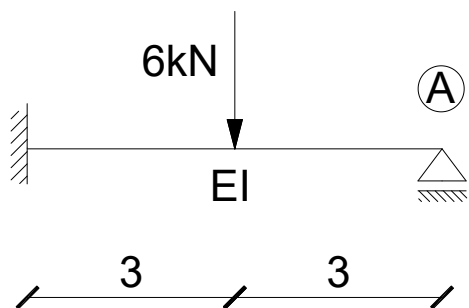
Twierdzenia redukcyjne:

I twierdzenie redukcyjne – tok postępowania przy liczeniu przemieszczeń:

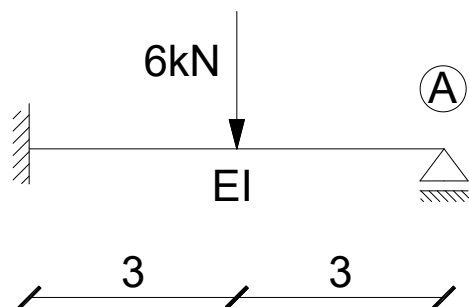
- liczymy stopień statycznej niewyznaczalności układu,
- dobieramy schemat podstawowy statycznie wyznaczalny,
- rysujemy wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych i od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego,
- liczymy współczynniki układu równań metody sił,
- rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy końcowy wykres momentów M
- rysujemy wykres momentów od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego $\bar{M}_i$,
- liczymy wartość przemieszczenia:

$$\delta = \int_L \frac{M \bar{M}_i}{EI} dL$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

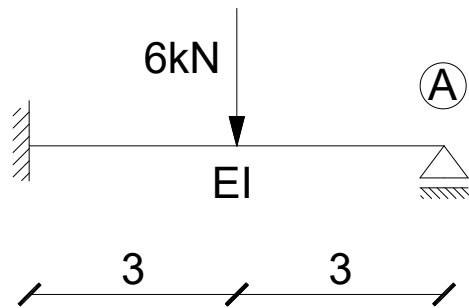


Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

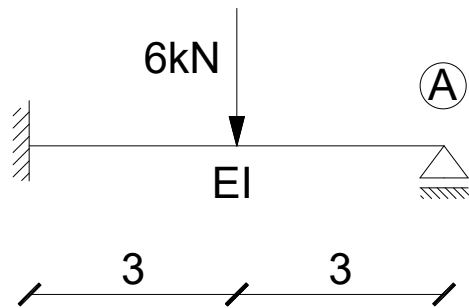
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

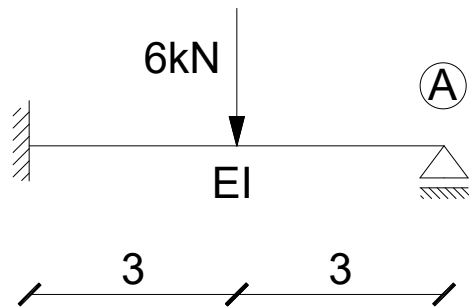


Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



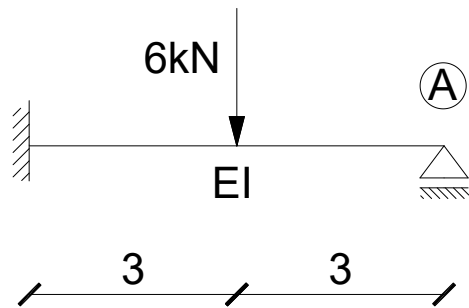
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

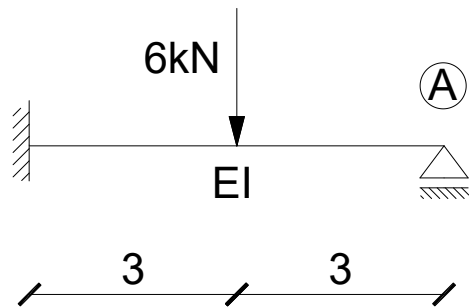
$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



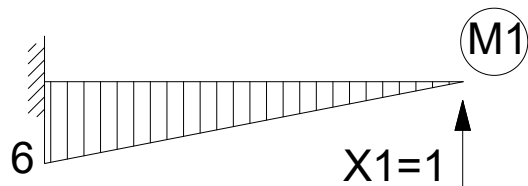
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

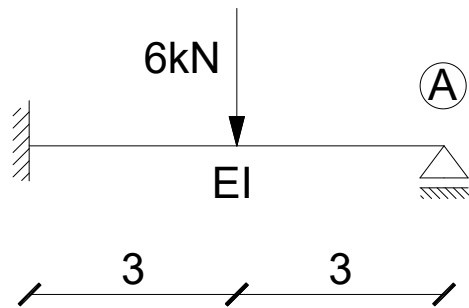
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



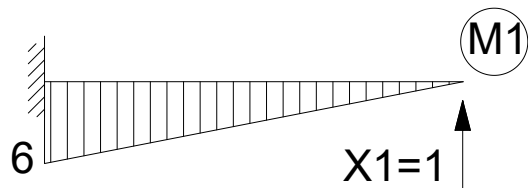
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

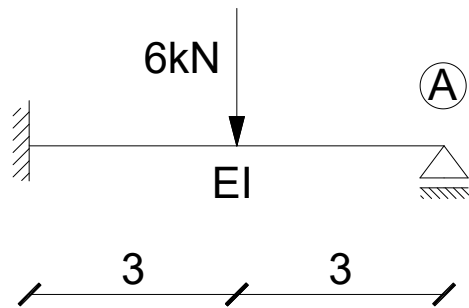


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:

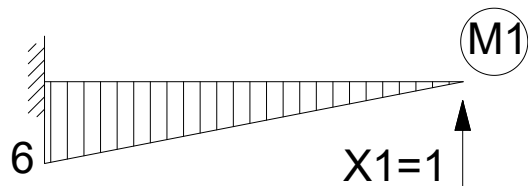
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

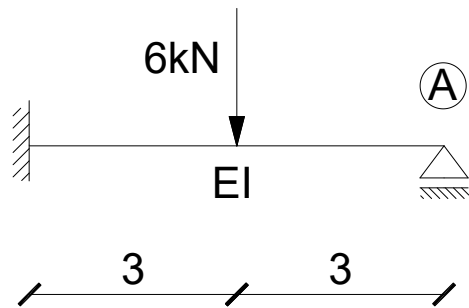


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:

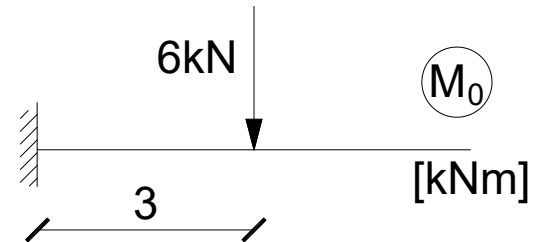


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



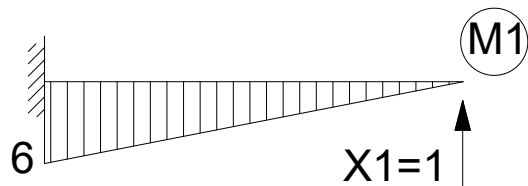
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

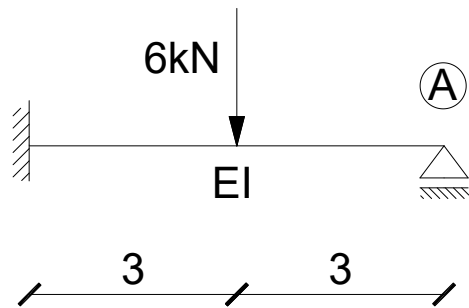


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:

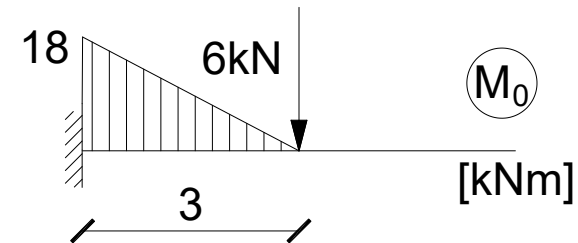


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



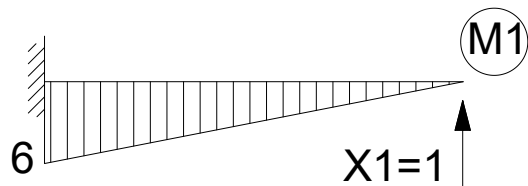
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

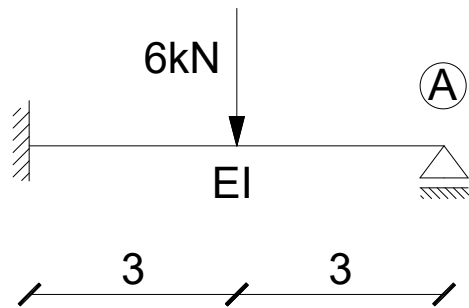


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:

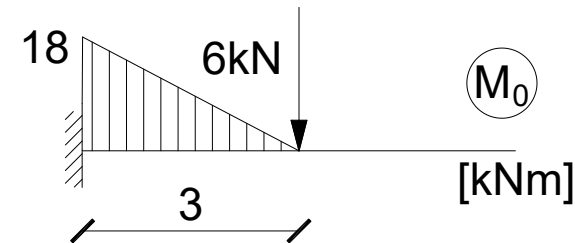


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



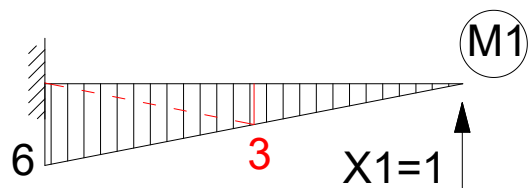
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

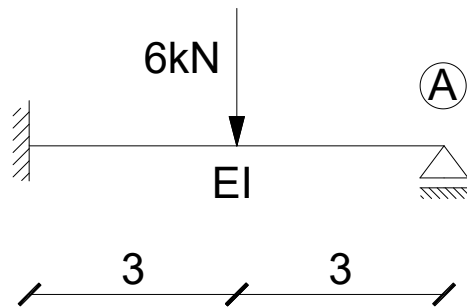


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



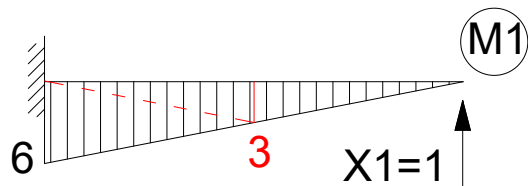
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

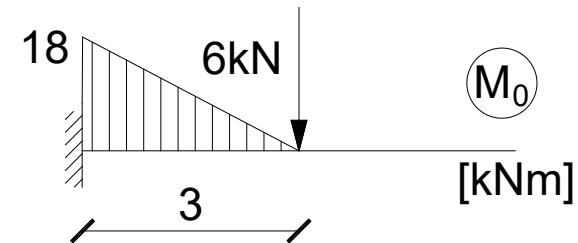
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



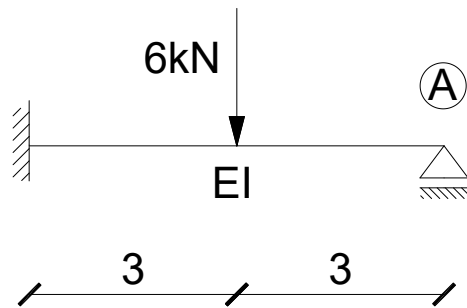
Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = -\frac{135}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



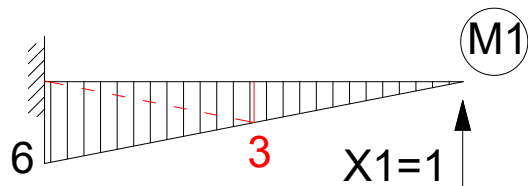
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

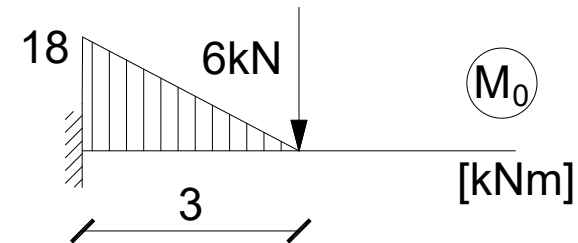
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:

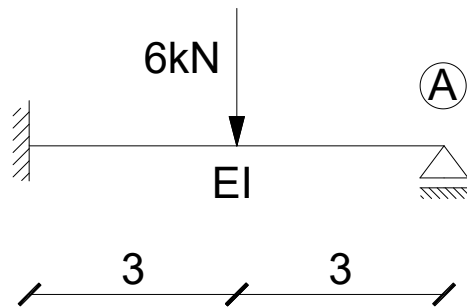


$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = -\frac{135}{EI}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



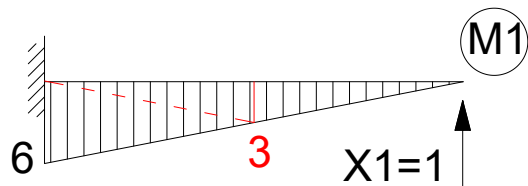
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

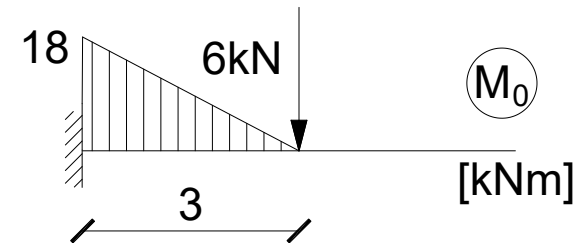
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



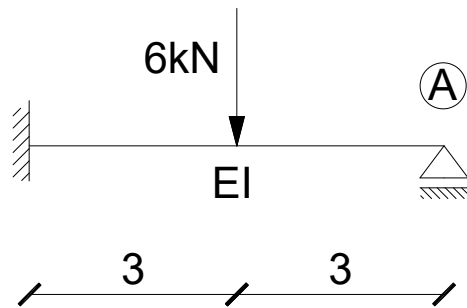
$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = -\frac{135}{EI}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



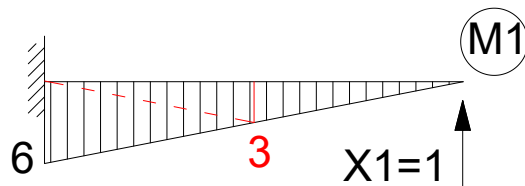
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

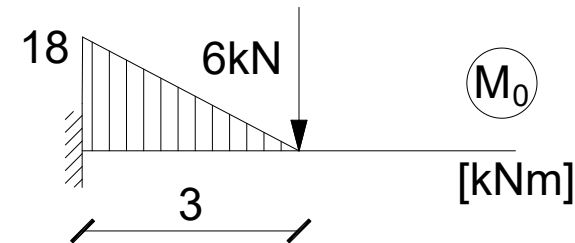
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = -\frac{135}{EI}$$

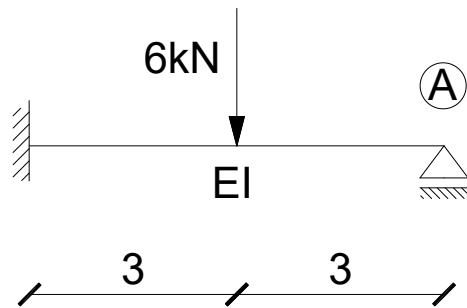
Rozwiązanie równania metody sił:

$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



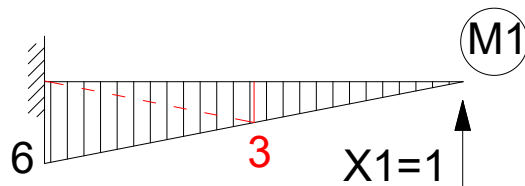
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

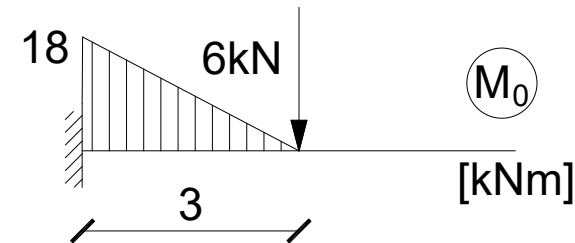
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = -\frac{135}{EI}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

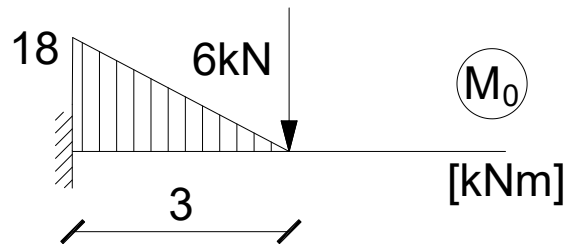
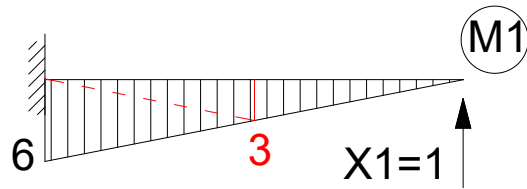
$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Rozwiązanie równania metody sił:

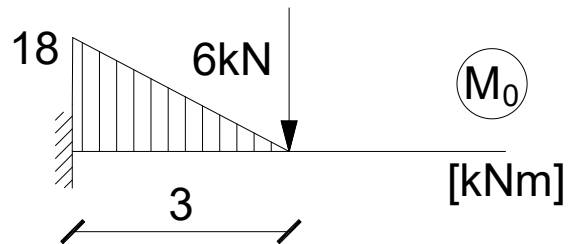
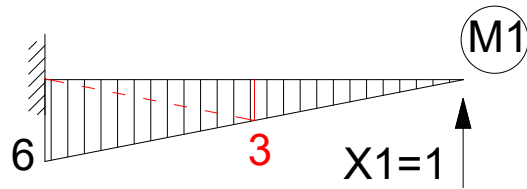
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 kN$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18$$

Rozwiązanie równania metody sił:

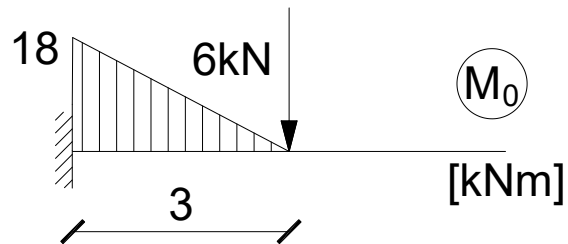
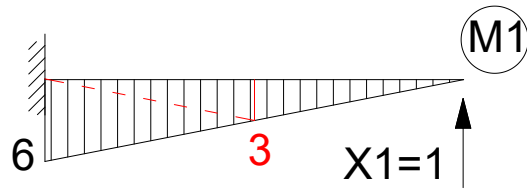
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

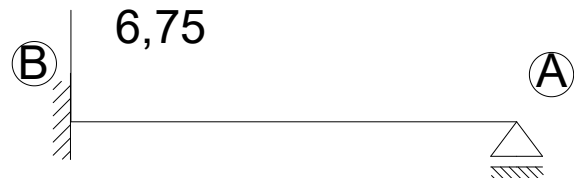
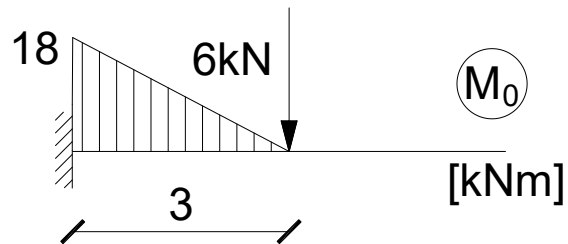
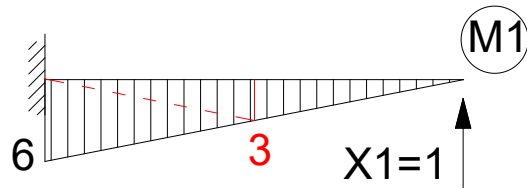
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

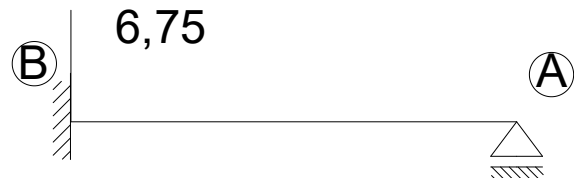
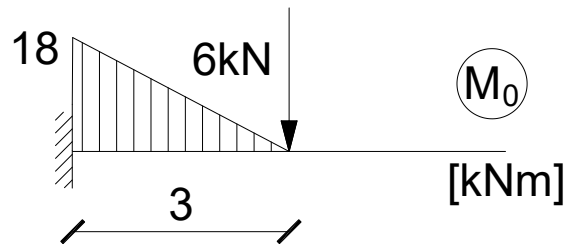
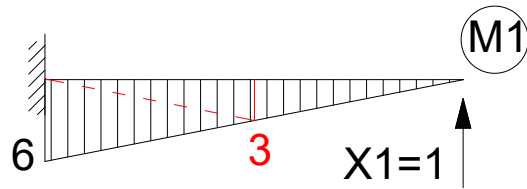
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875$$

Rozwiązanie równania metody sił:

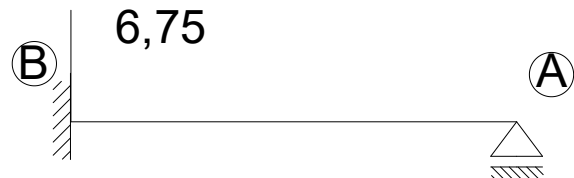
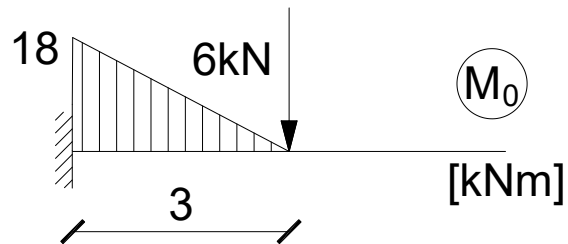
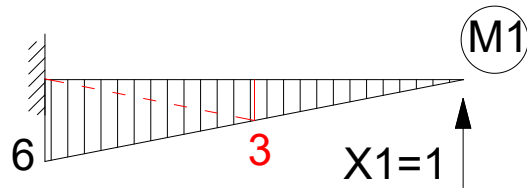
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

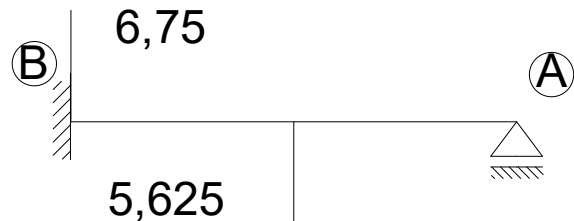
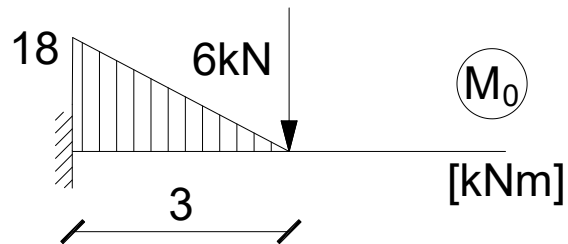
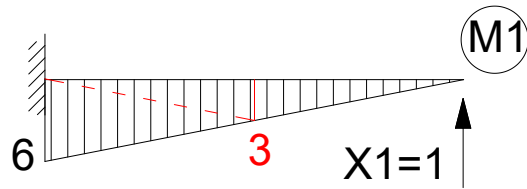
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

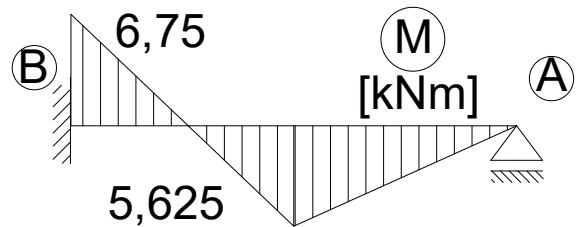
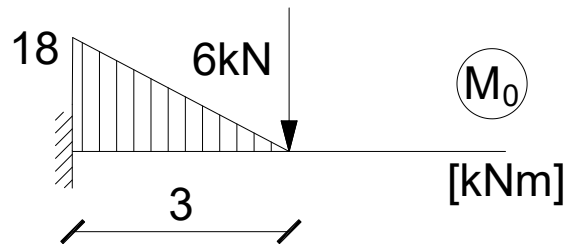
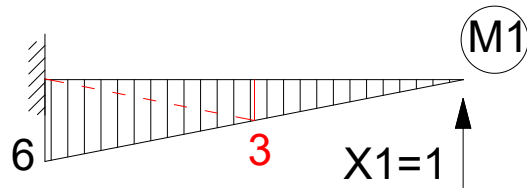
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

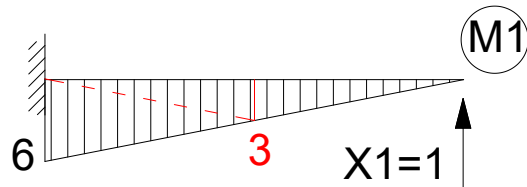
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

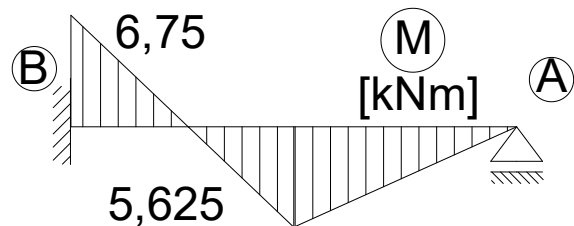
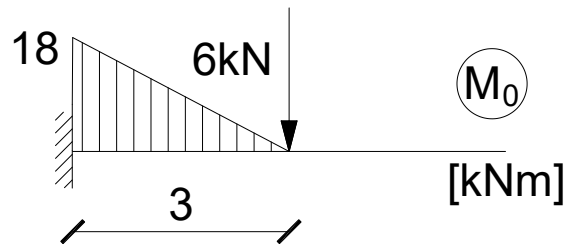
$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:

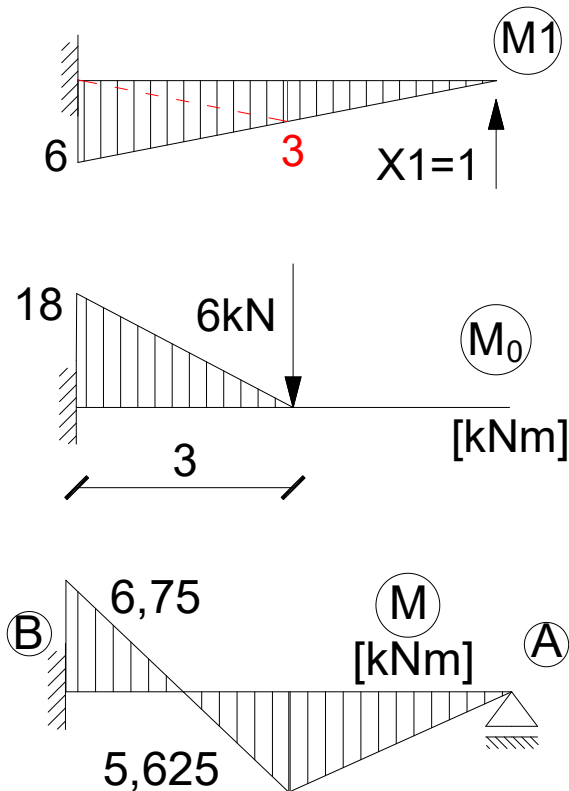


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

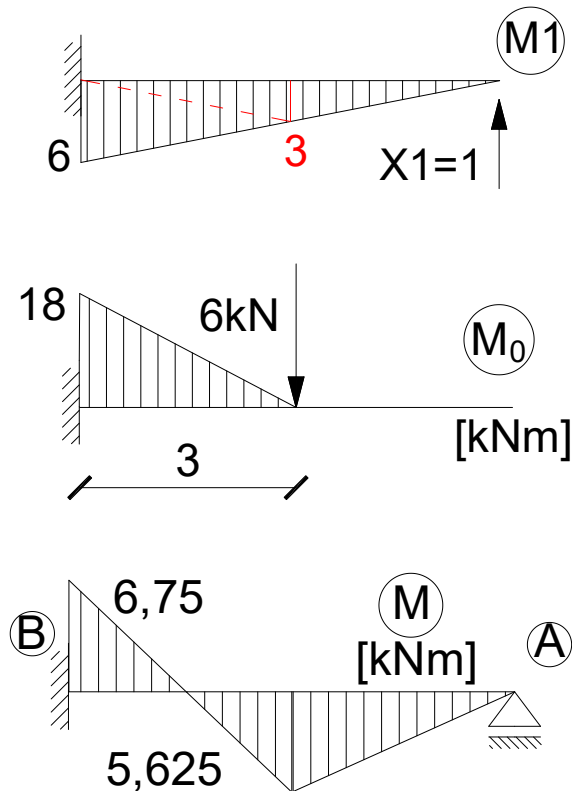
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

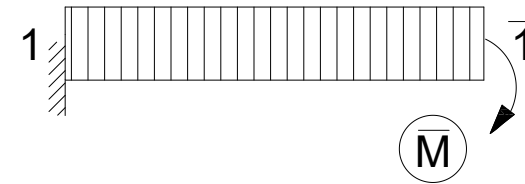
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

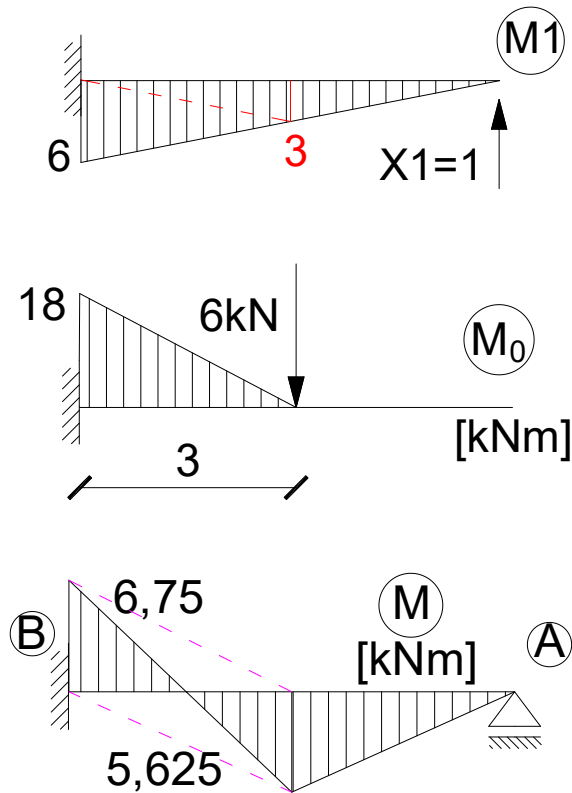
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

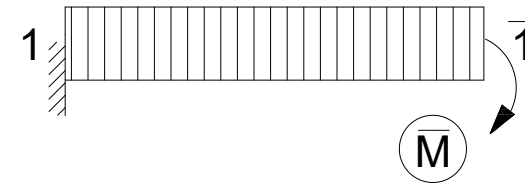
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

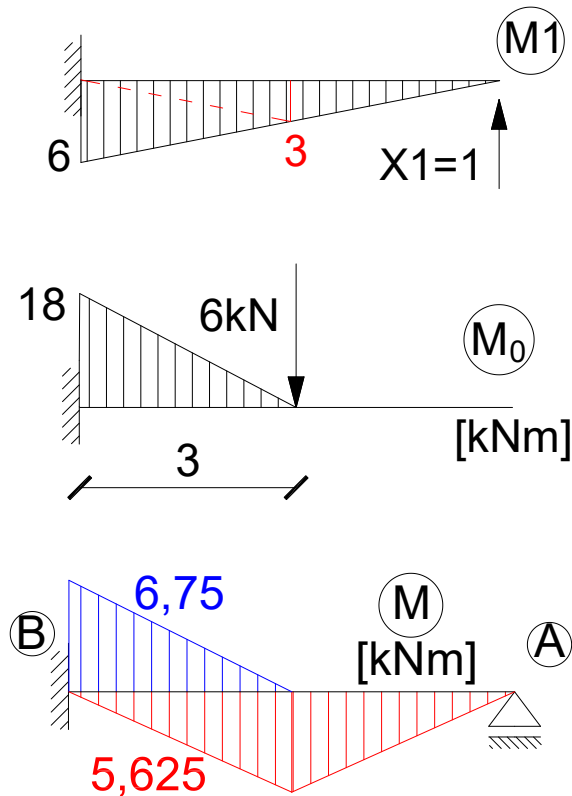
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

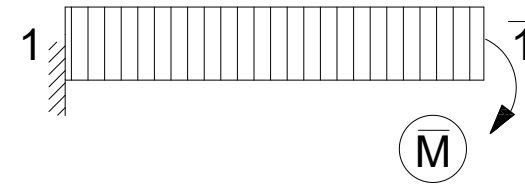
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

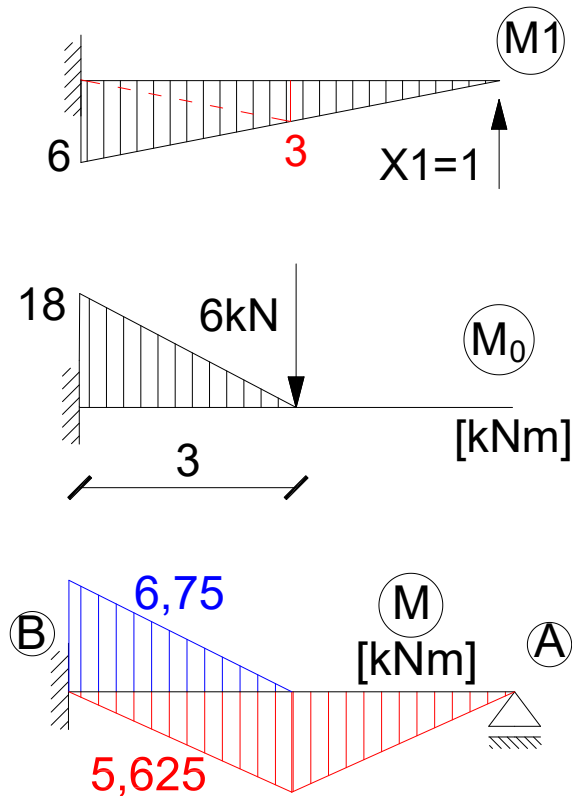
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

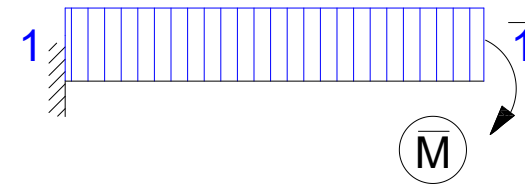
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

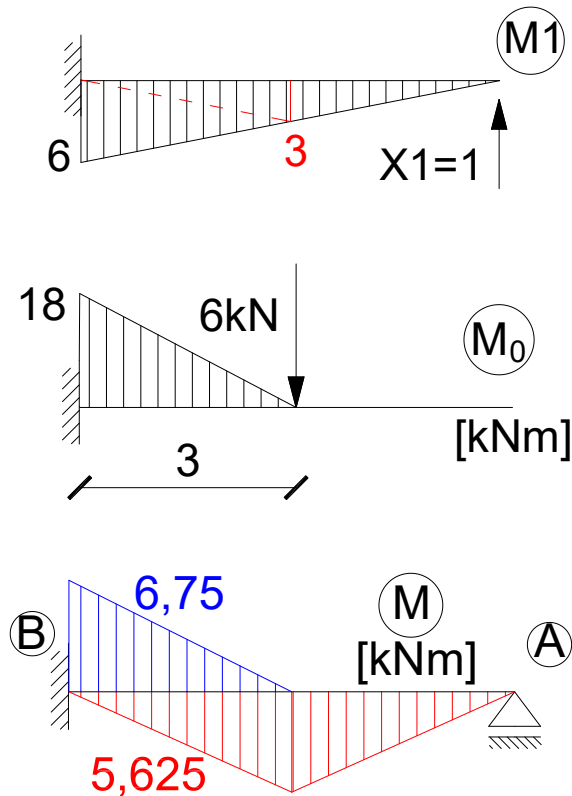
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

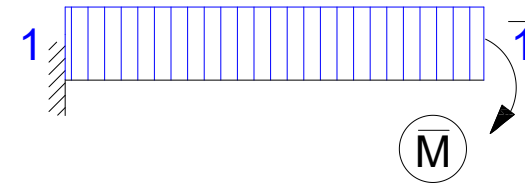
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

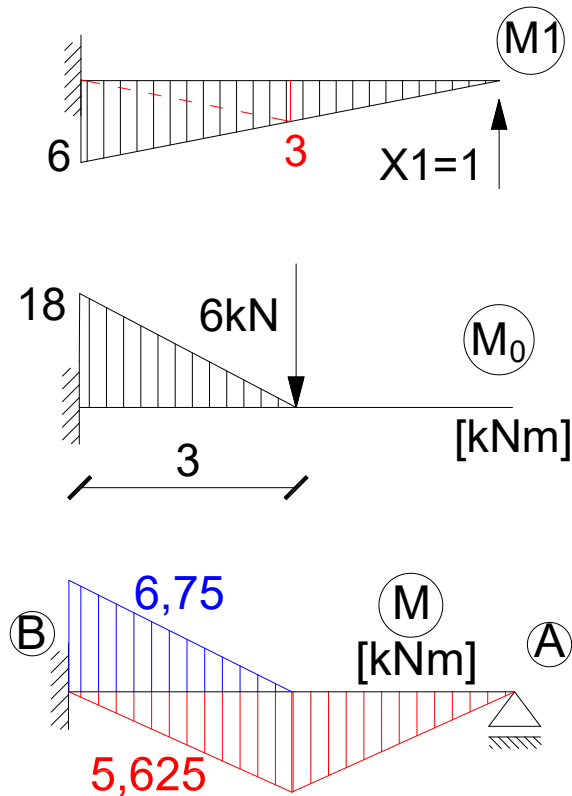
Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Kąt obrotu na podporze A:

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:

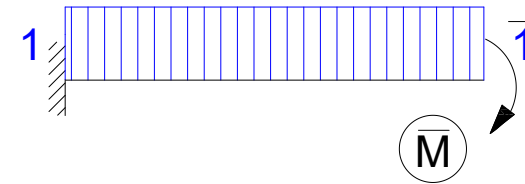


$$\varphi_A = \frac{1}{EI}$$

$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

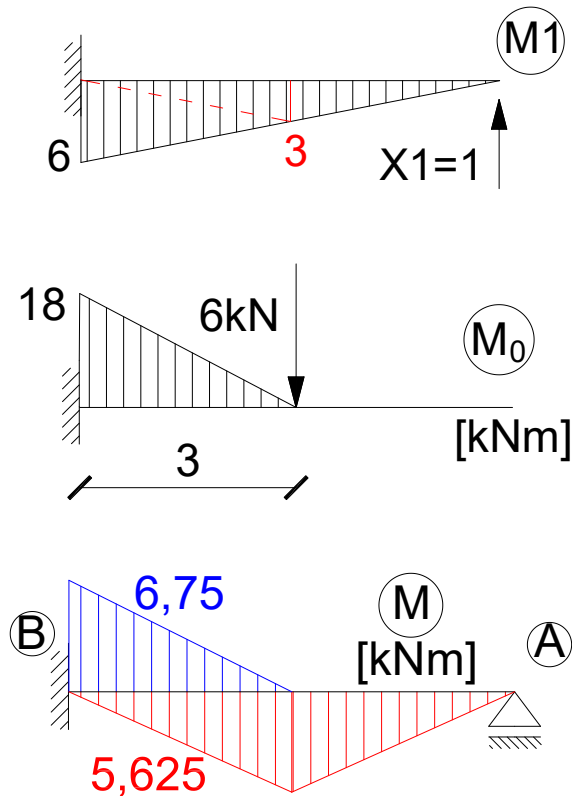
Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



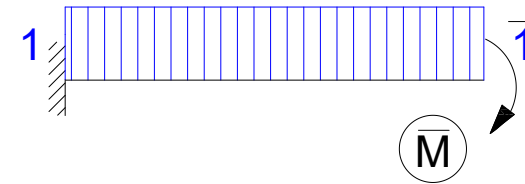
Kąt obrotu na podporze A:

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Kąt obrotu na podporze A:

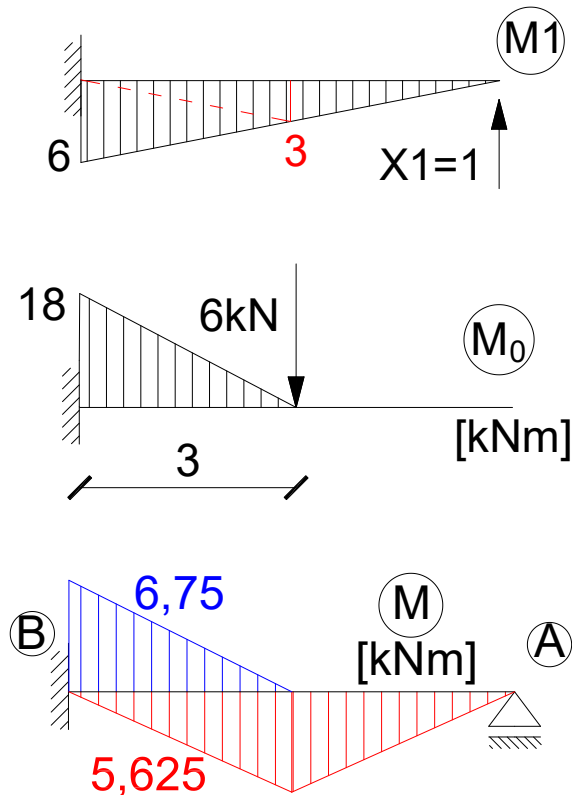
$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,75 \cdot 1 \right)$$

$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

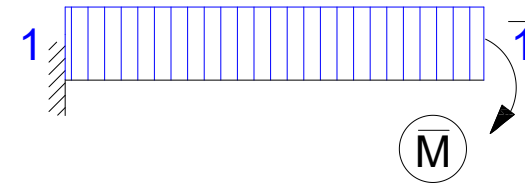
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Kąt obrotu na podporze A:

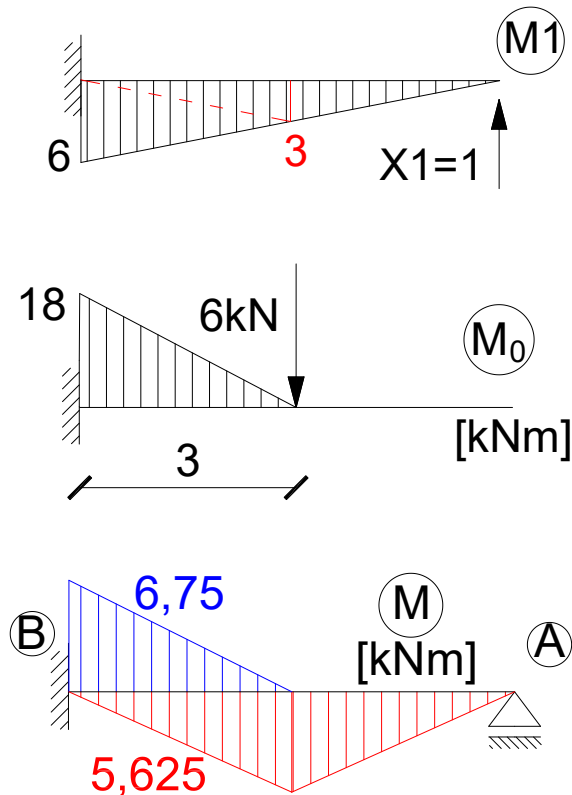
$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,75 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot 1 \right)$$

$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

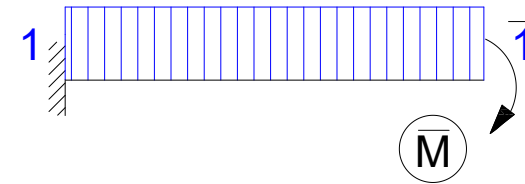
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Kąt obrotu na podporze A:

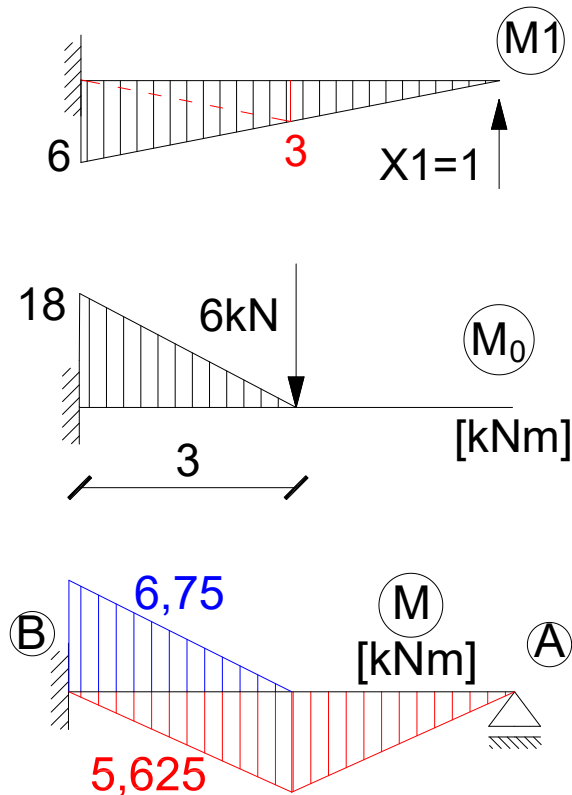
$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,75 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot 1 \right)$$

$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

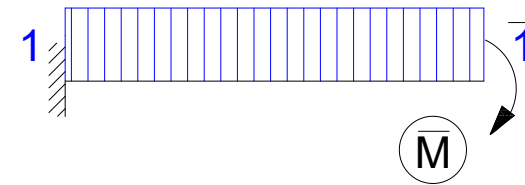
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Kąt obrotu na podporze A:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,75 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot 1 \right) = -\frac{6,75}{EI}$$

Twierdzenia redukcyjne:

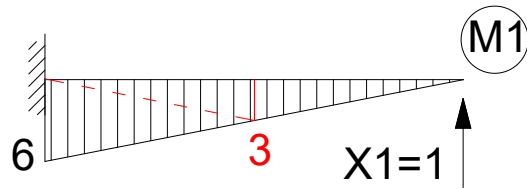
I twierdzenie redukcyjne – tok postępowania przy sprawdzaniu wykresu momentów:

- liczymy stopień statycznej niewyznaczalności układu,
- dobieramy schemat podstawowy statycznie wyznaczalny,
- rysujemy wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ i od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego,
- liczymy współczynniki układu równań metody sił,
- rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy końcowy wykres momentów M
- Całkujemy końcowy wykres momentów otrzymany dla układu statycznie niewyznaczalnego M przez kolejne wykresy od jednostkowych nadliczbowych i sprawdzamy warunki poprawności wykresów:

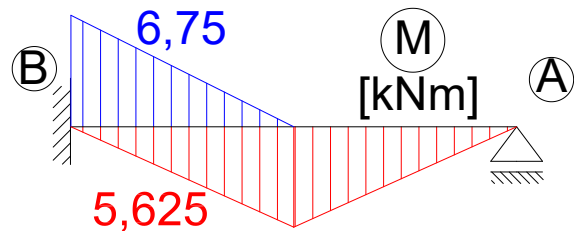
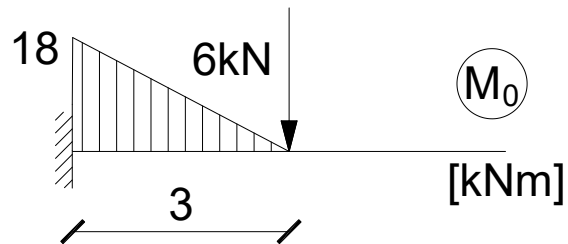
$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = 0, \quad \int_L \frac{MM_2}{EI} dL = 0, \dots, \int_L \frac{MM_n}{EI} dL = 0$$

Zadanie 2 . Sprawdzenie poprawności wykresu momentów z I twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Sprawdzenie z I twierdzenia redukcyjnego:

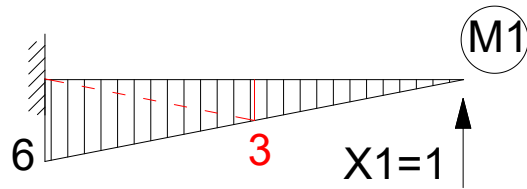


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

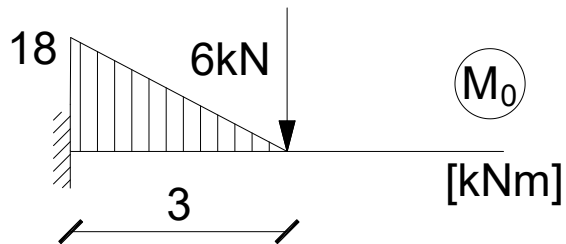
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie 2 . Sprawdzenie poprawności wykresu momentów z I twierdzenia redukcyjnego.

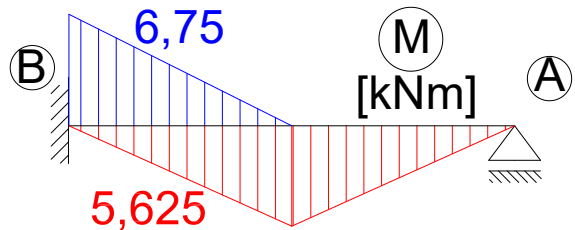
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Sprawdzenie z I twierdzenia redukcyjnego:



$$\int_L \frac{MM_1}{EI} =$$

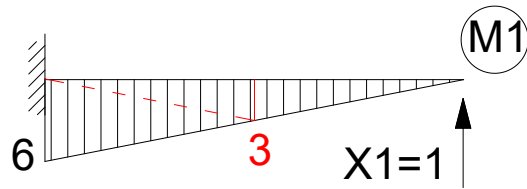


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

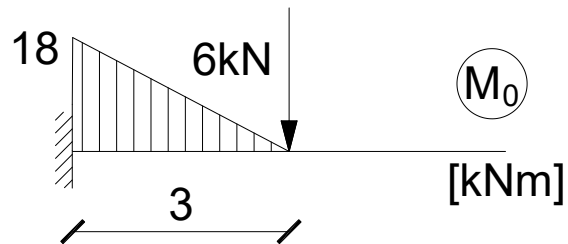
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie 2 . Sprawdzenie poprawności wykresu momentów z I twierdzenia redukcyjnego.

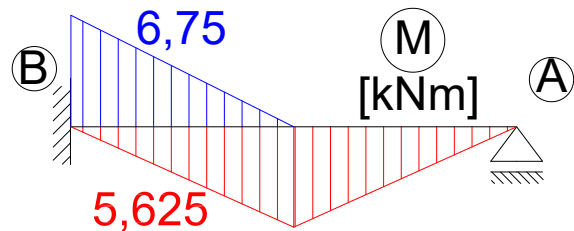
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Sprawdzenie z I twierdzenia redukcyjnego:



$$\int_L \frac{MM_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right)$$

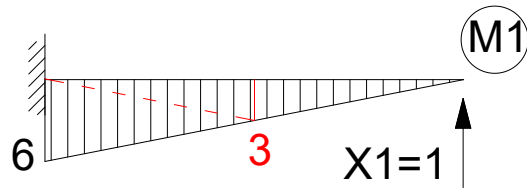


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

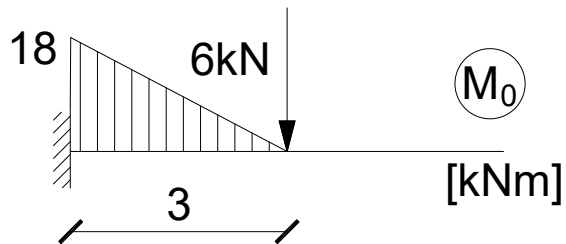
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie 2 . Sprawdzenie poprawności wykresu momentów z I twierdzenia redukcyjnego.

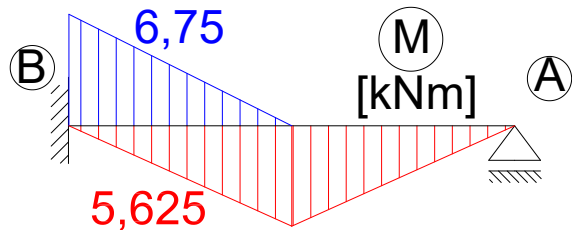
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Sprawdzenie z I twierdzenia redukcyjnego:



$$\int_L \frac{MM_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \right)$$

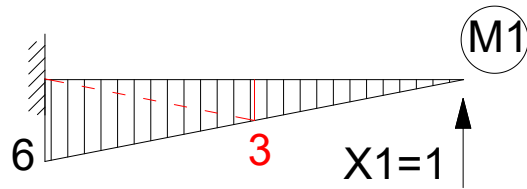


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

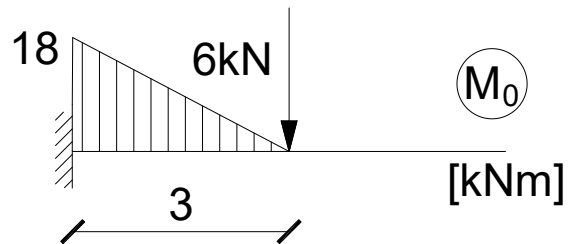
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie 2 . Sprawdzenie poprawności wykresu momentów z I twierdzenia redukcyjnego.

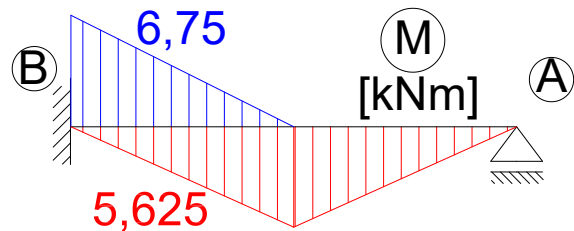
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Sprawdzenie z I twierdzenia redukcyjnego:



$$\int_L \frac{MM_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \right) - \frac{1}{2} \cdot 6,75 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right)$$

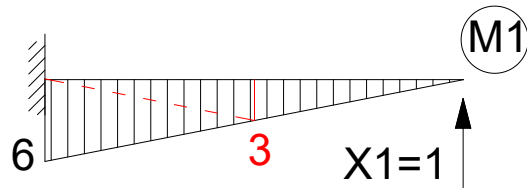


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

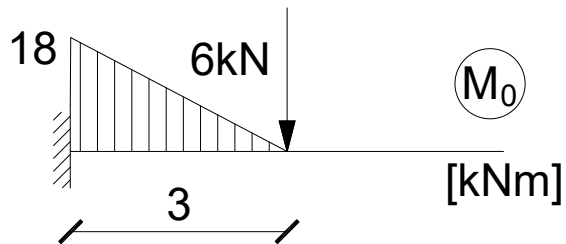
$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Zadanie 2 . Sprawdzenie poprawności wykresu momentów z I twierdzenia redukcyjnego.

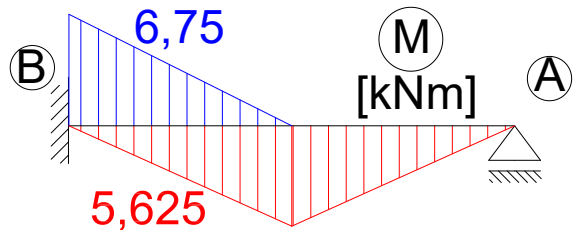
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Sprawdzenie z I twierdzenia redukcyjnego:



$$\int_L \frac{MM_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \right) = 0$$

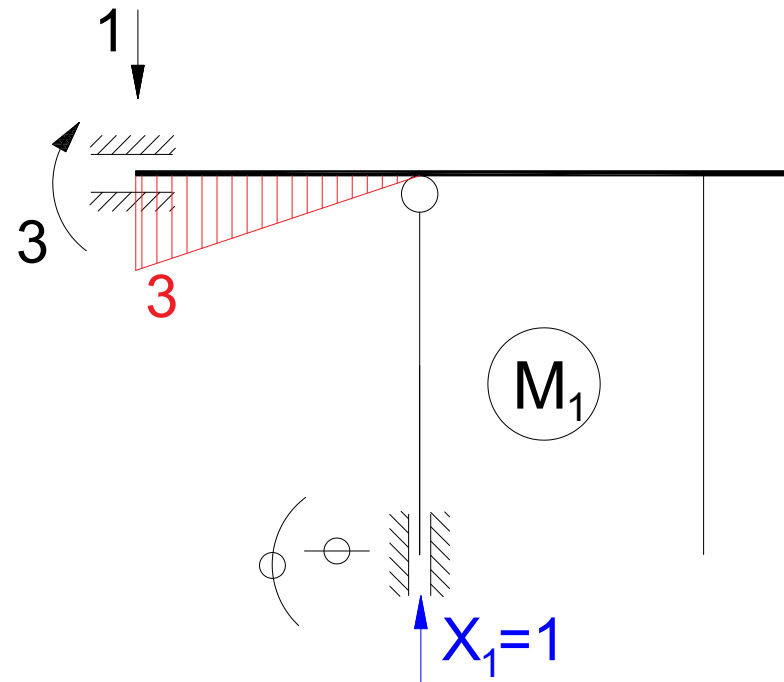
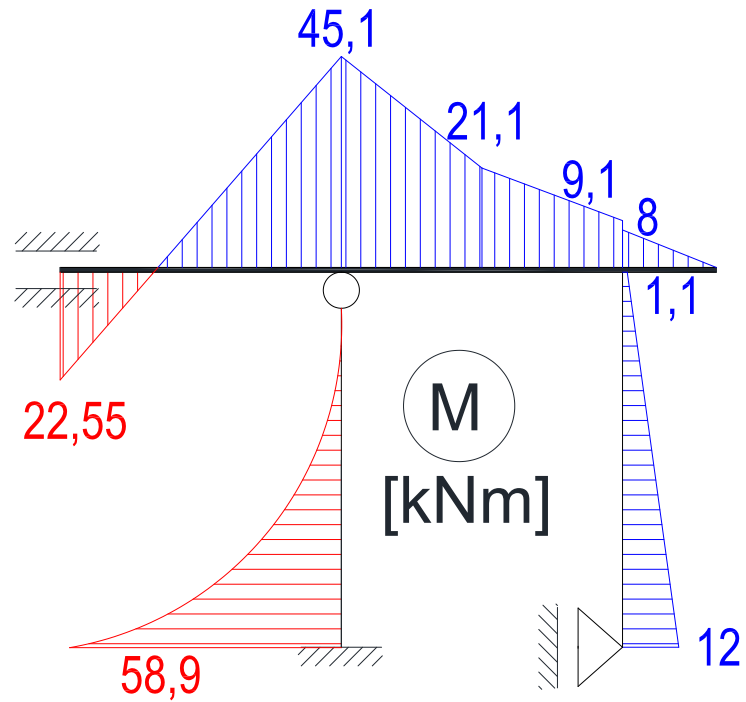


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

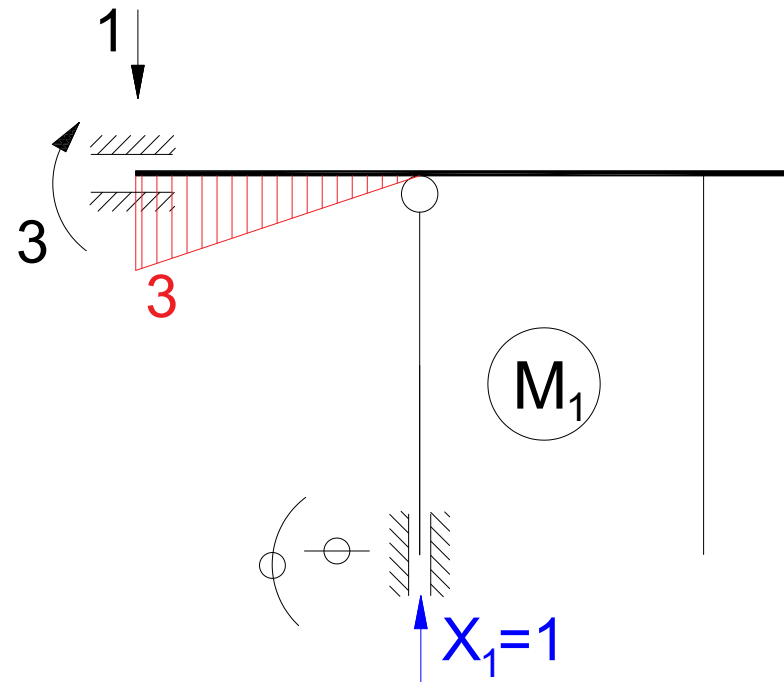
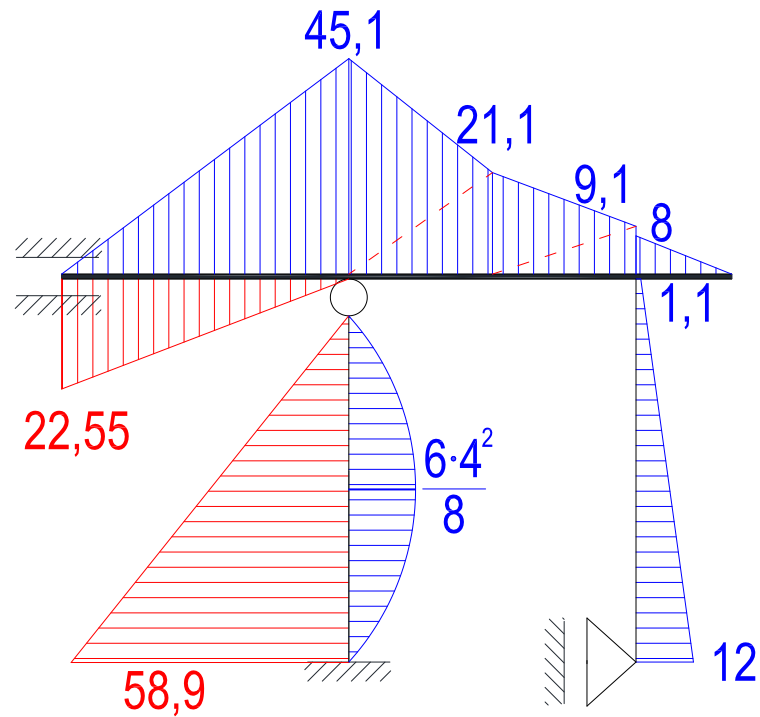
Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



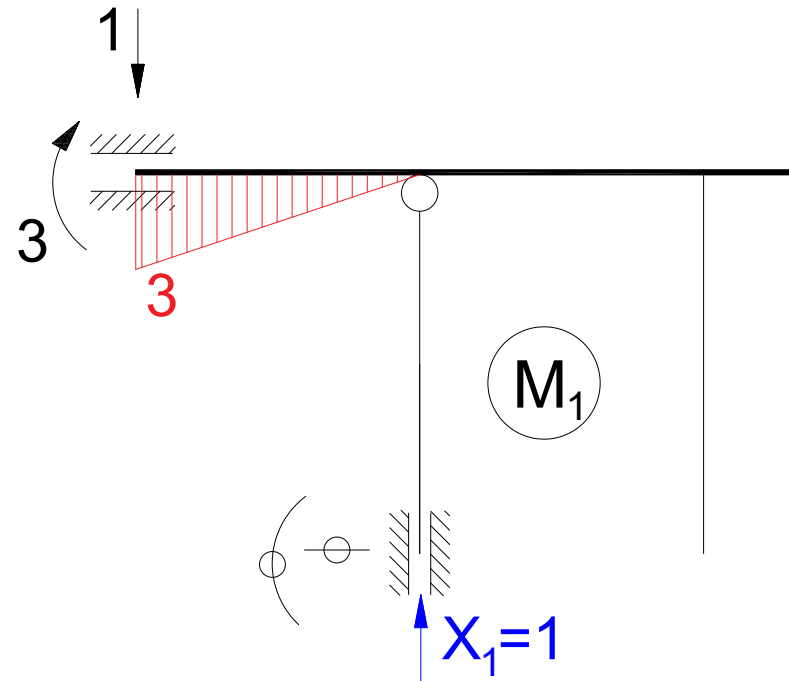
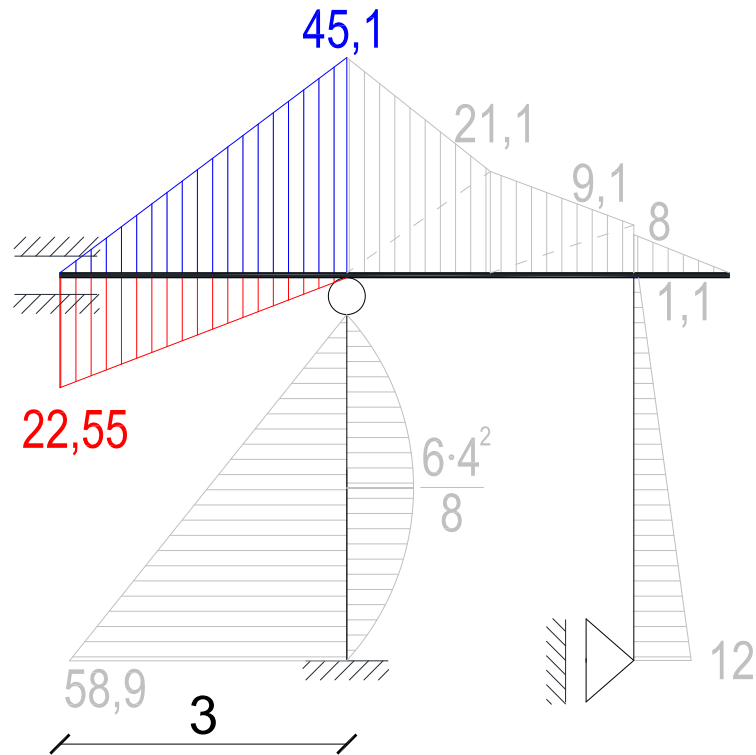
Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

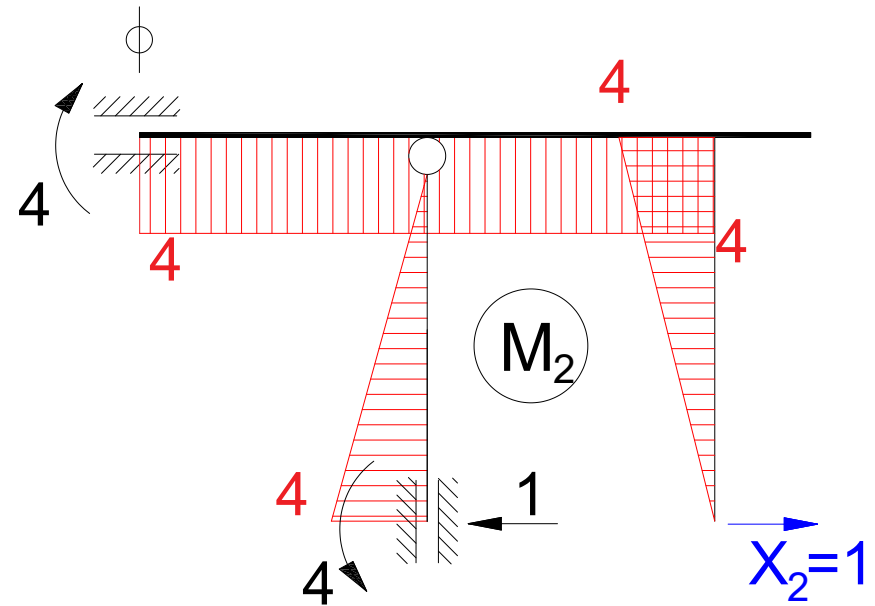
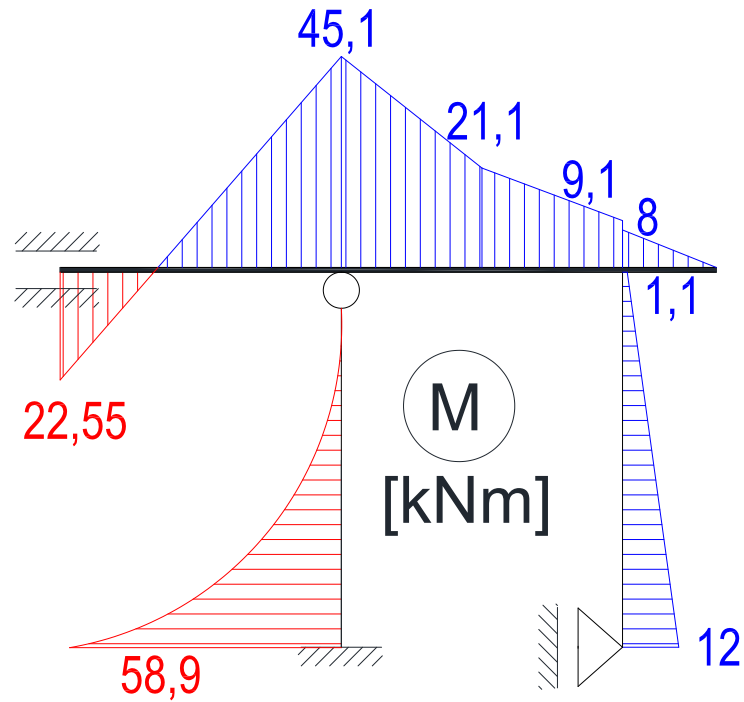


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = 0$$

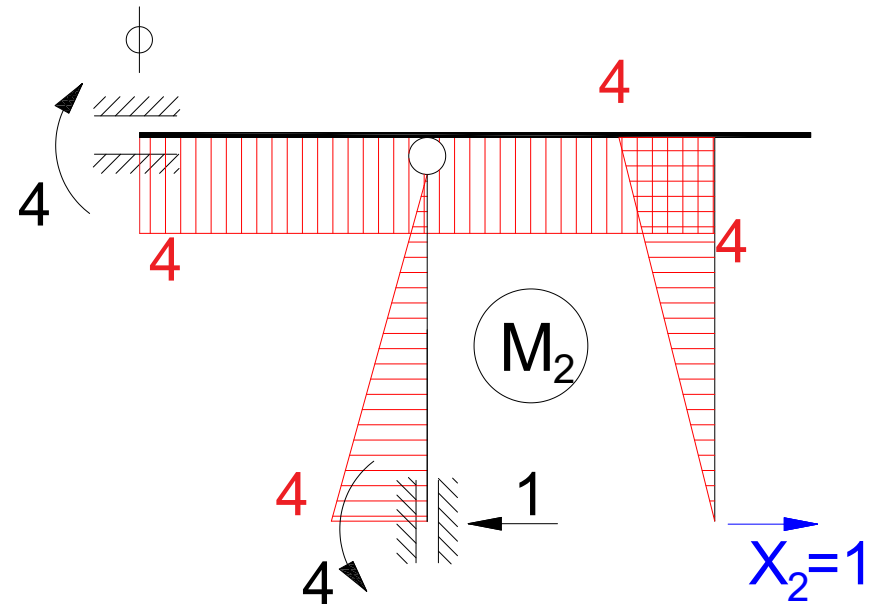
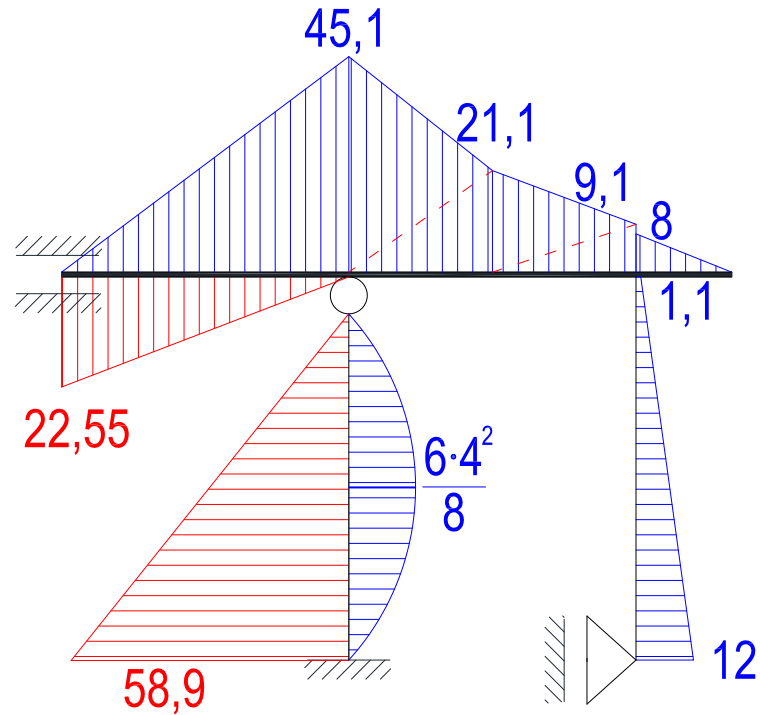
Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

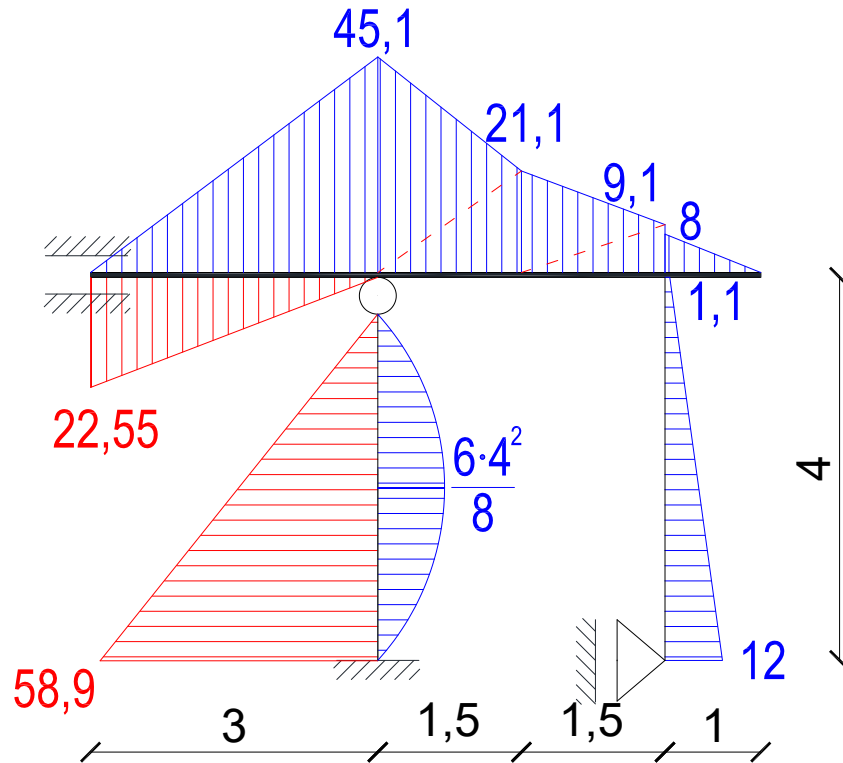


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL =$$

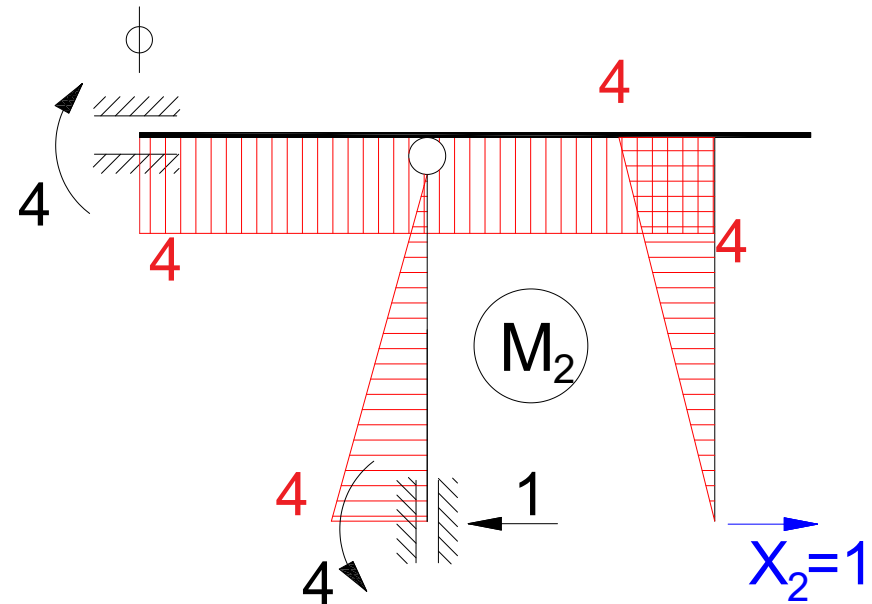
Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



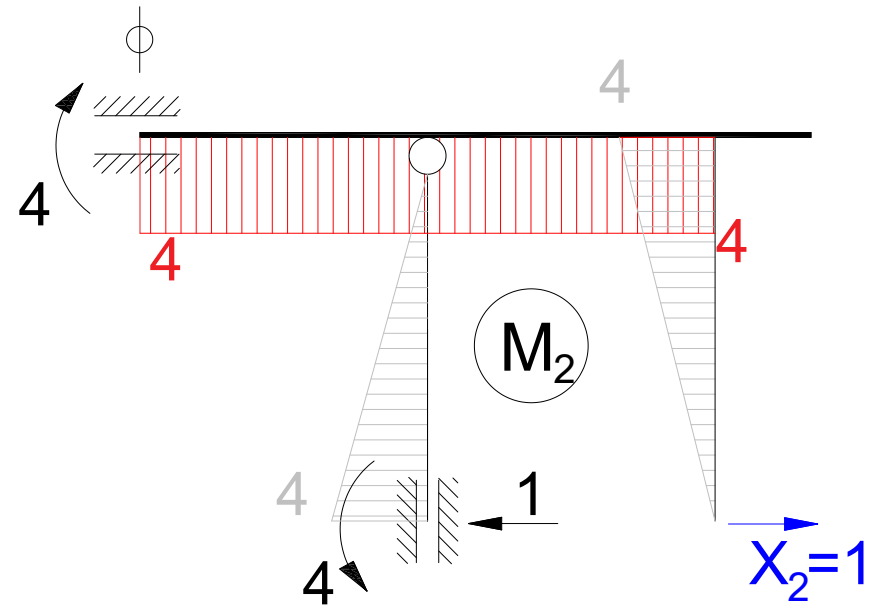
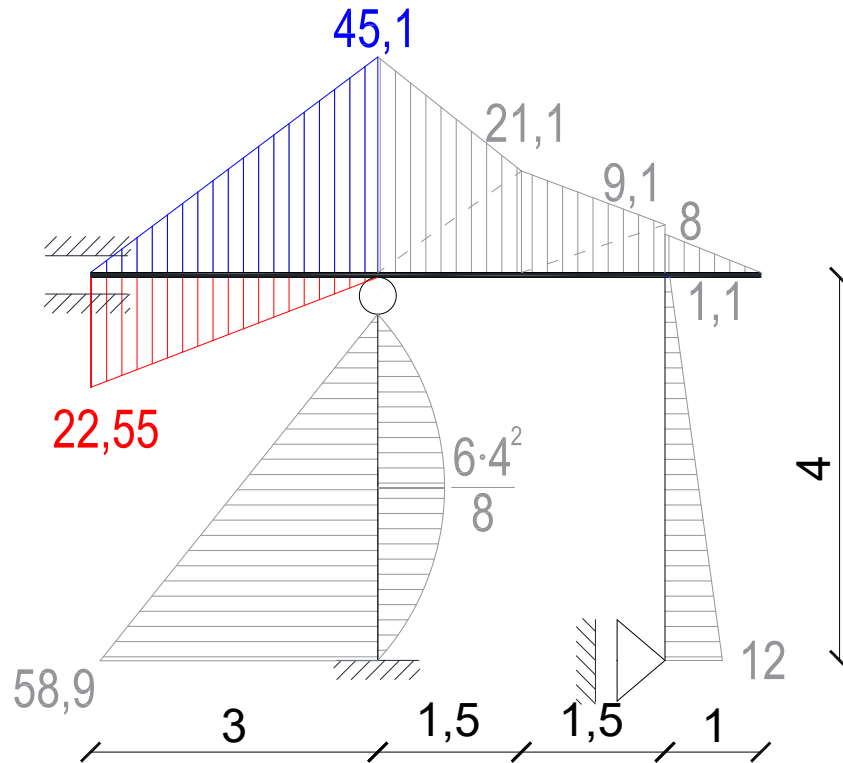
Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL =$$



Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

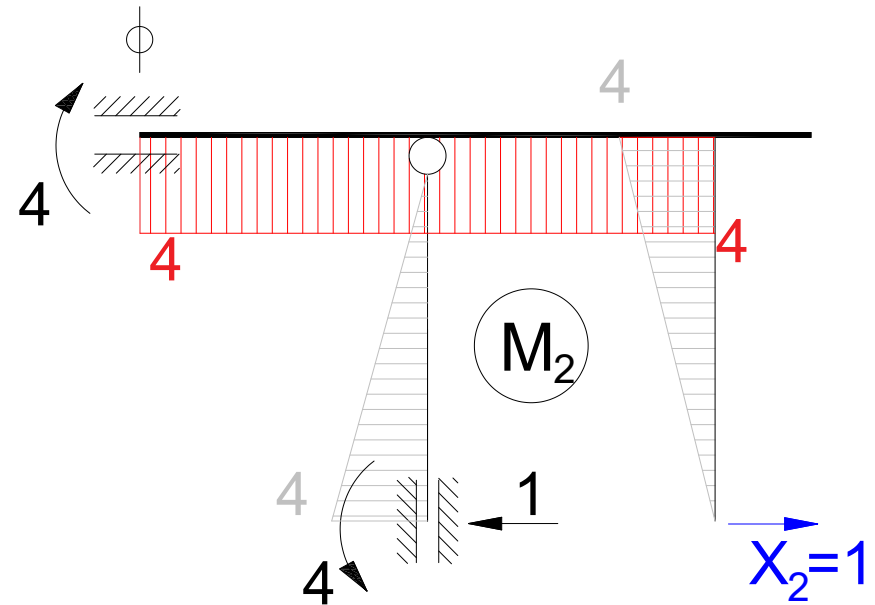
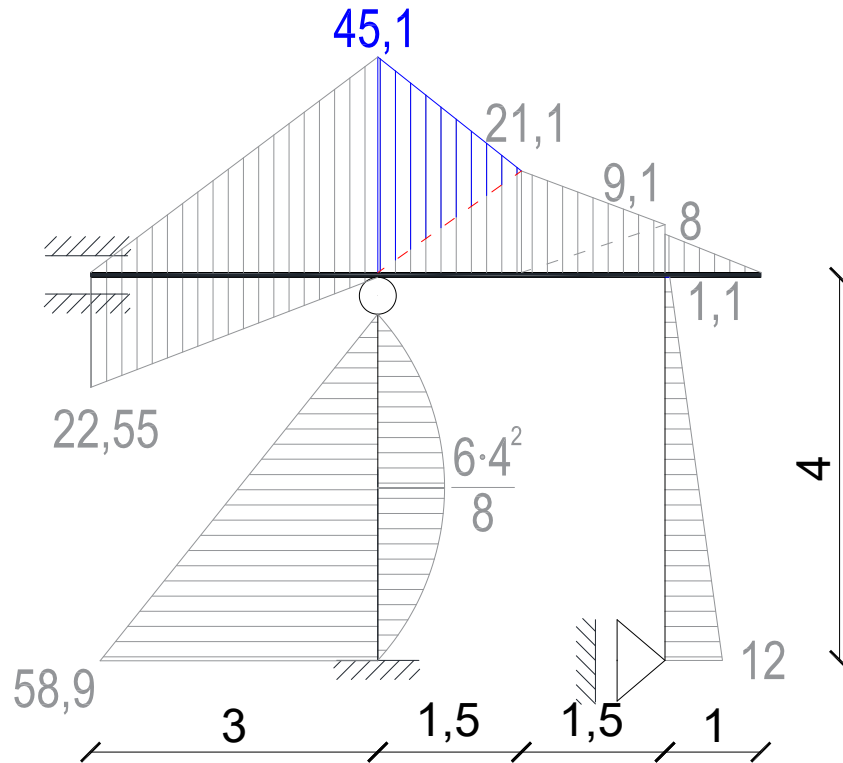


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

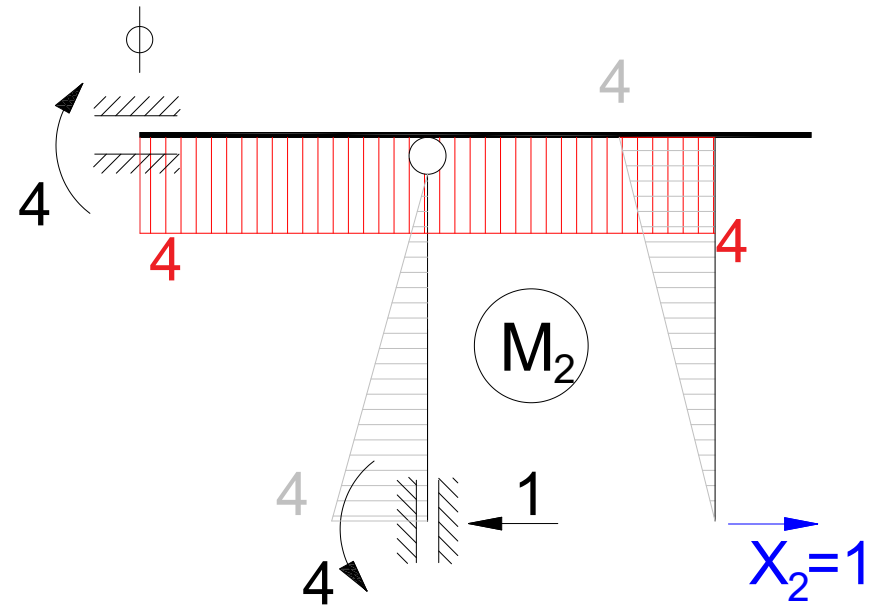
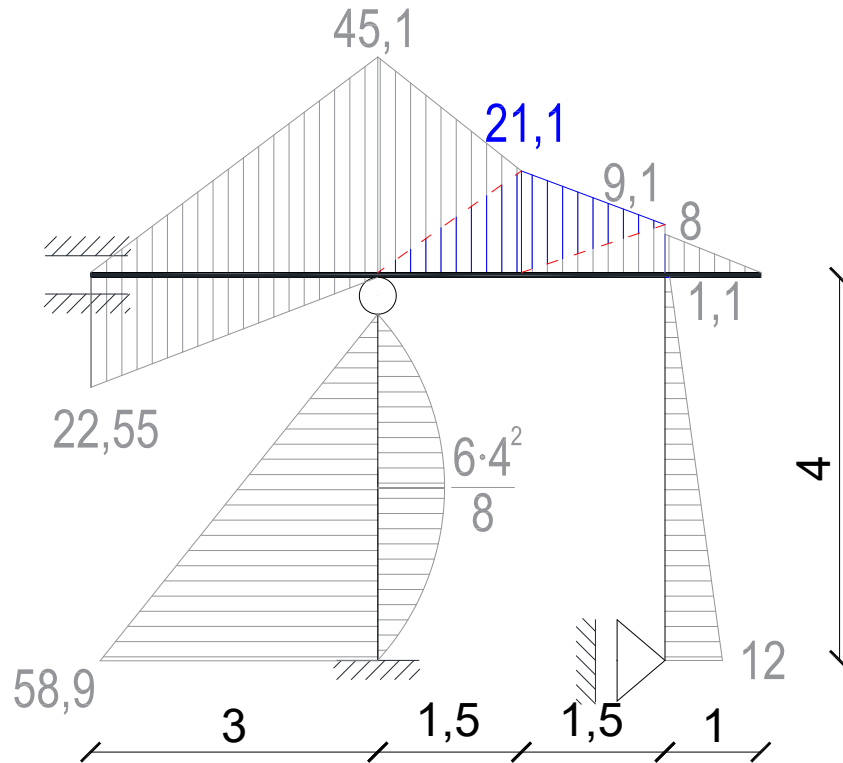


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

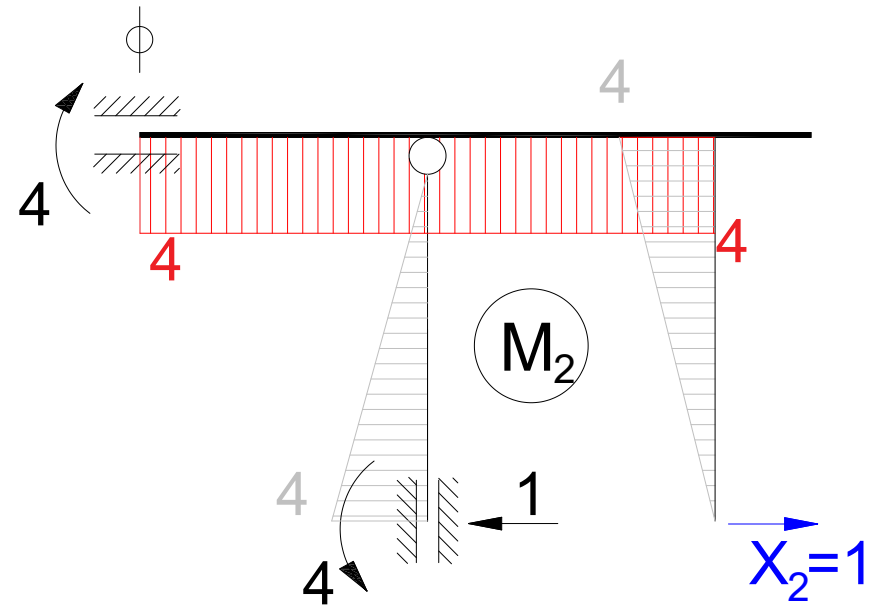
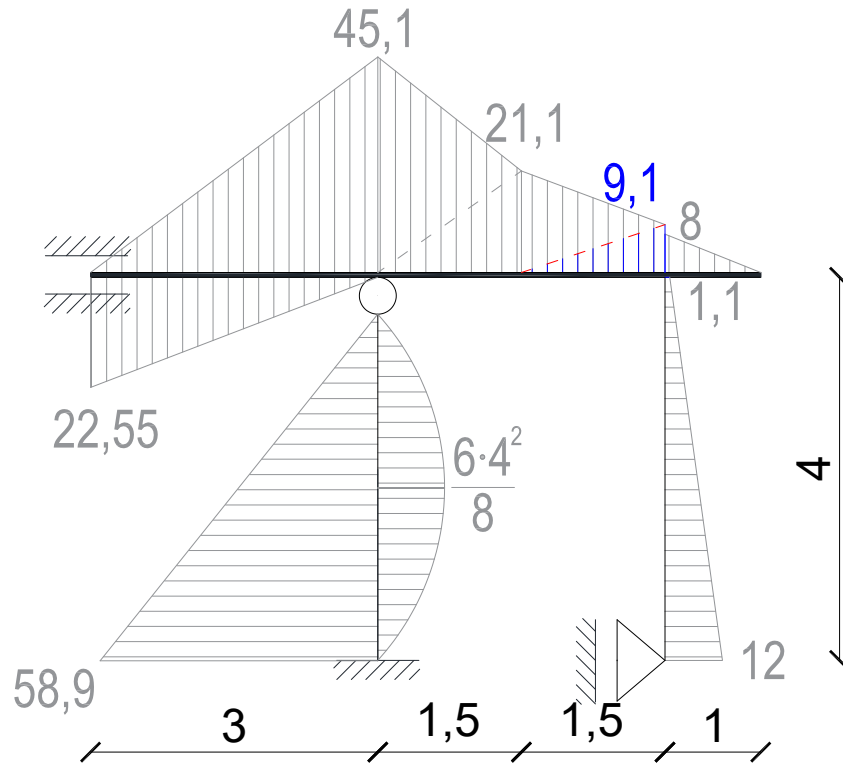


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 1,5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 21,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 2 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

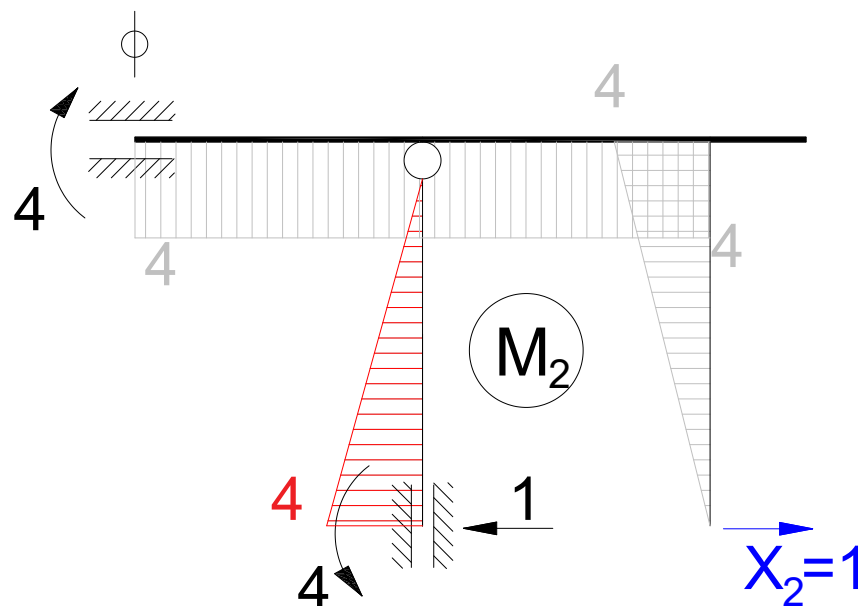
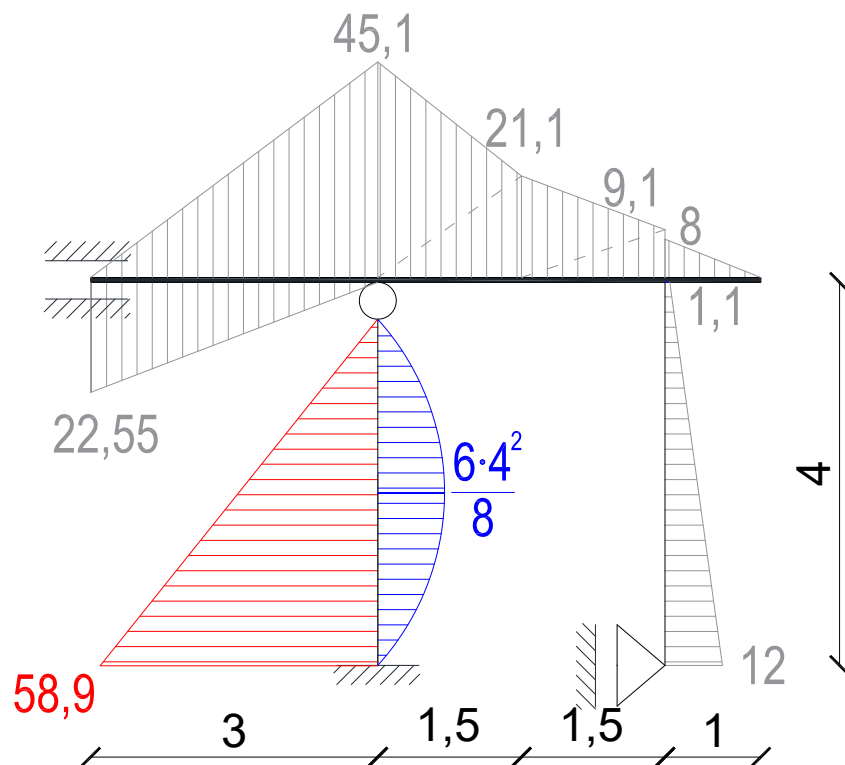


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 1,5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 21,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

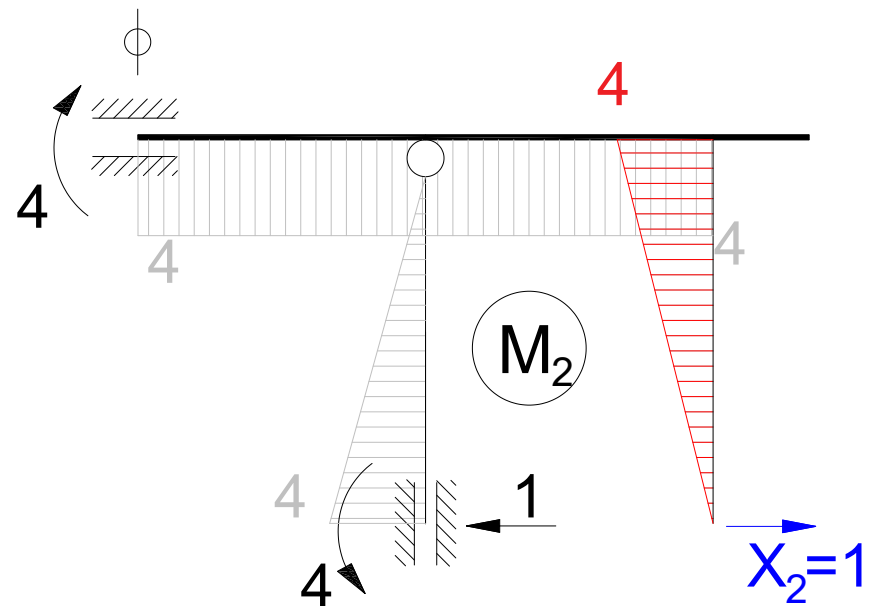
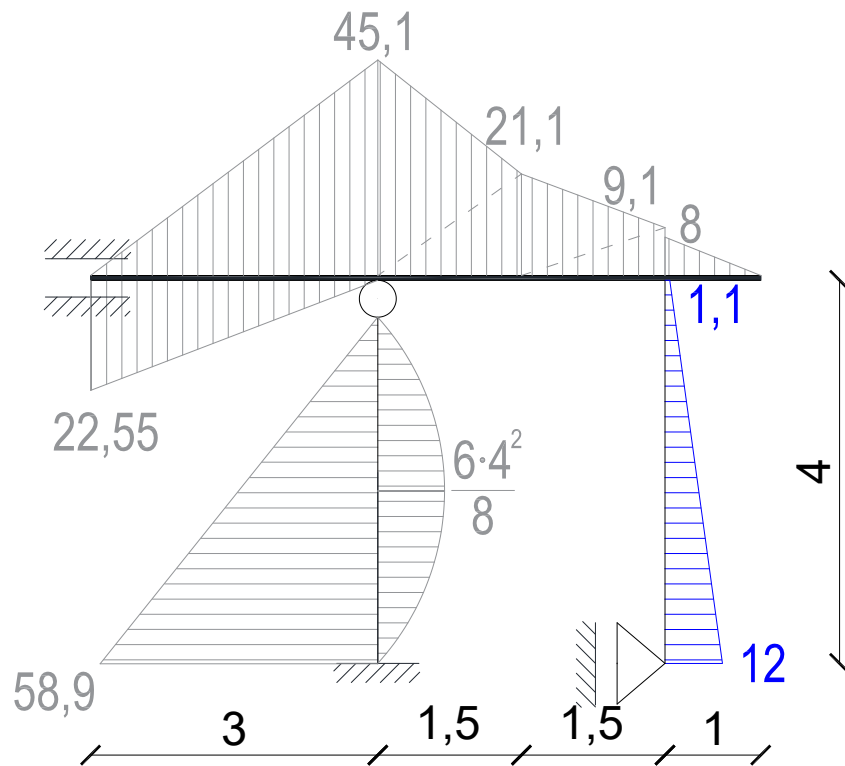


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 1,5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 21,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 58,9 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

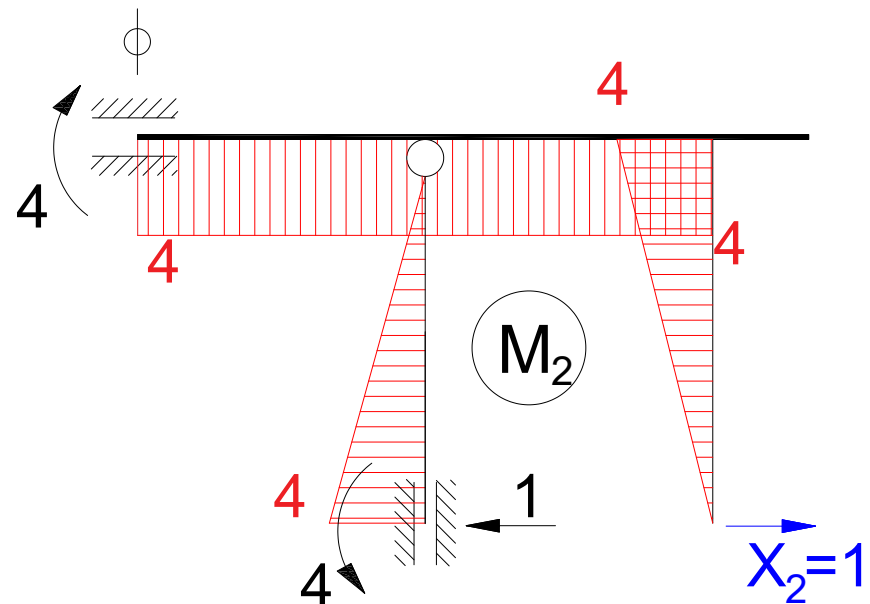
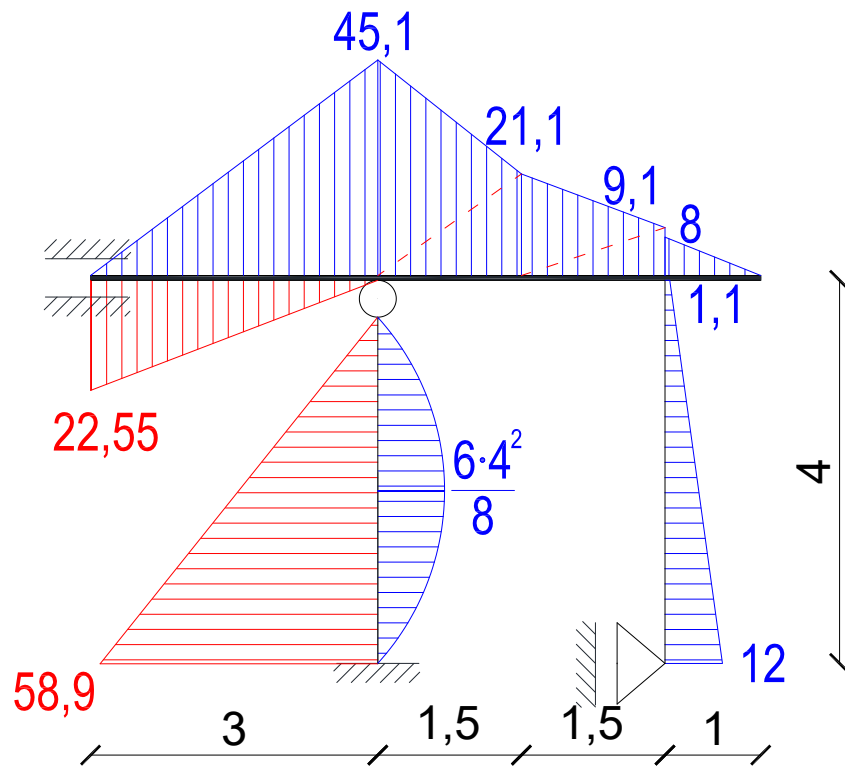


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 1,5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 21,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 58,9 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,1 + \frac{1}{3} \cdot 12 \right) \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



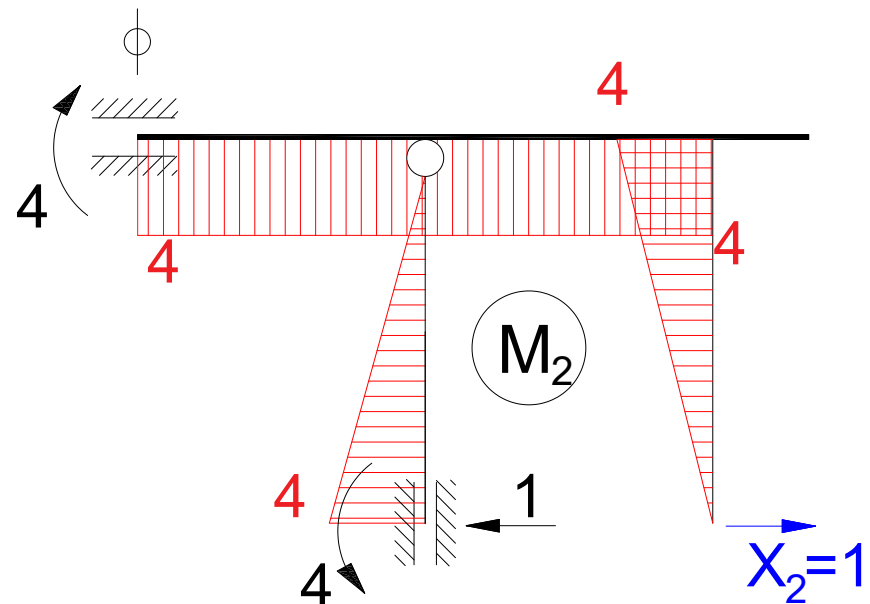
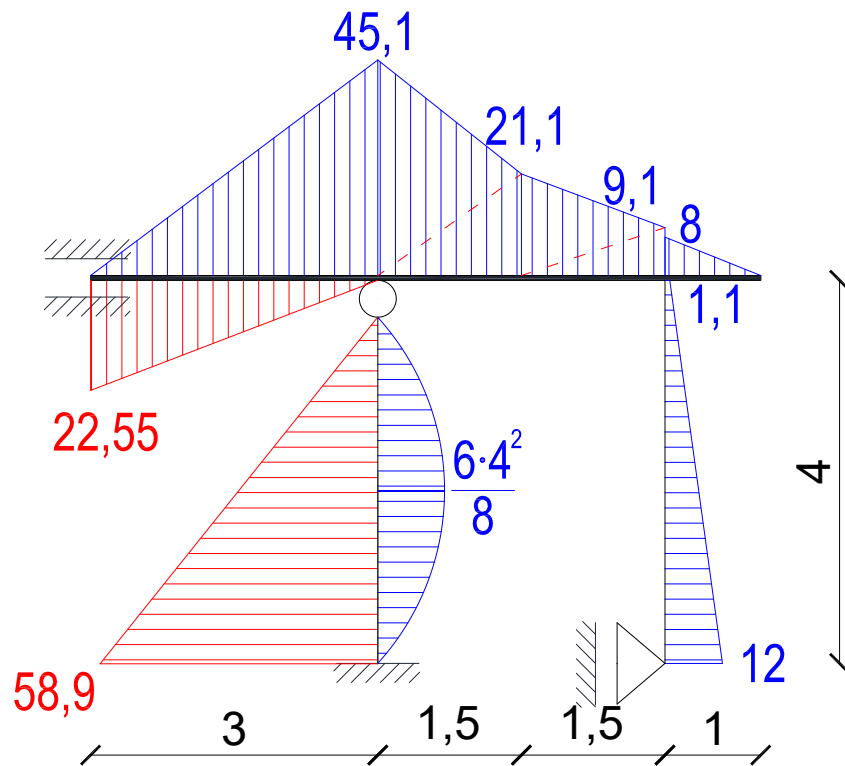
Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 1,5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 21,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 58,9 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,1 + \frac{1}{3} \cdot 12 \right) \right) = \frac{0,017}{EI}$$

dr inż. Hanna Weber

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,55 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 45,1 \cdot 1,5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 21,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 1,5 \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 58,9 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,1 + \frac{1}{3} \cdot 12 \right) \right) = \frac{0,017}{EI} \approx 0$$

dr inż. Hanna Weber

Twierdzenia redukcyjne:

II twierdzenie redukcyjne:

Aby obliczyć przemieszczenie w układzie statycznie niewyznaczalnym, mnożymy wykres momentów od obciążeń rzeczywistych postawionych na schemacie podstawowym statycznie wyznaczalnym $-M_0$, przez końcowy wykres momentów od obciążenia wirtualnego otrzymany dla schematu statycznie niewyznaczalnego – $\bar{M}$.

$$\delta = \int_L \frac{M_0 \bar{M}}{EI} dL$$

Zastosowanie:

- liczenie przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym bez konieczności wyznaczania końcowego wykresu momentów od obciążenia rzeczywistego.

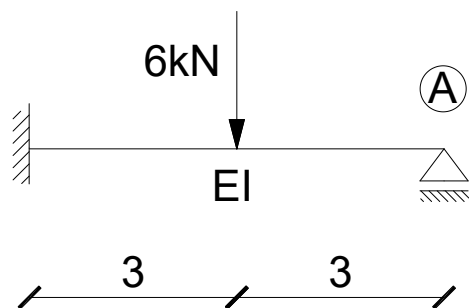
Twierdzenia redukcyjne:

II twierdzenie redukcyjne – tok postępowania przy liczeniu przemieszczeń:

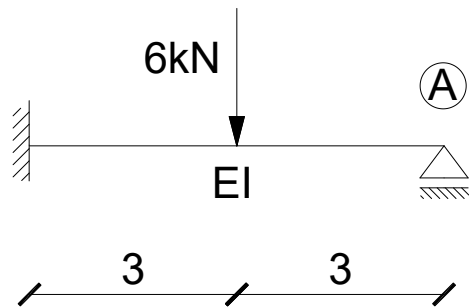
- liczymy stopień statycznej niewyznaczalności układu,
- dobieramy schemat podstawowy statycznie wyznaczalny,
- rysujemy wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych i od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego,
- liczymy współczynniki układu równań metody sił,
- rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy nadliczbowe,
- rysujemy końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego od obciążenia wirtualnego - $\overline{M}$,
- rysujemy wykres momentów od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego M_0 ,
- liczymy wartość przemieszczenia:

$$\delta = \int_L \frac{\overline{M} M_0}{EI} dL$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.

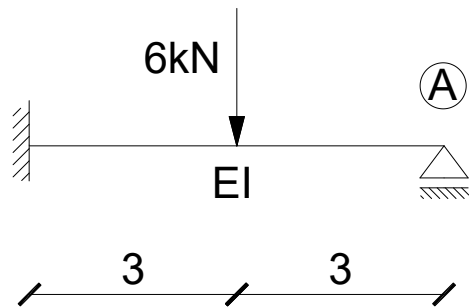


Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

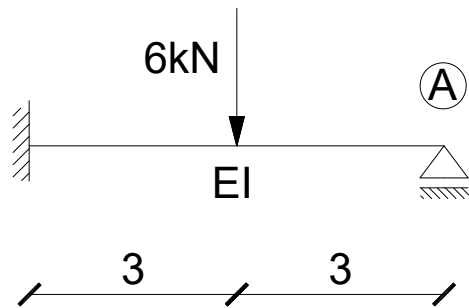
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.

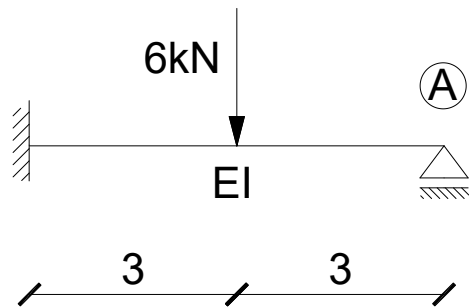


Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



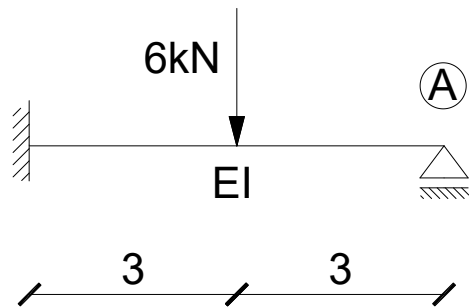
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

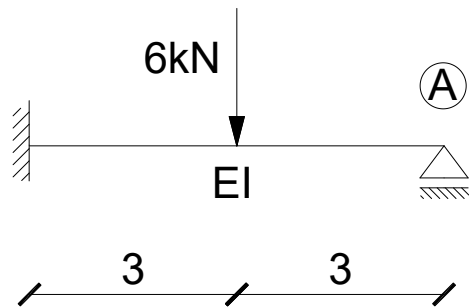
$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



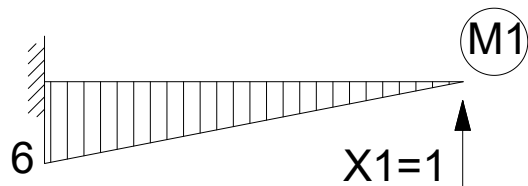
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

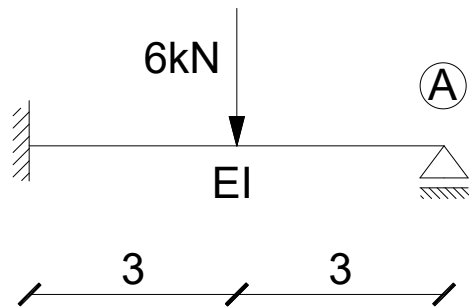
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



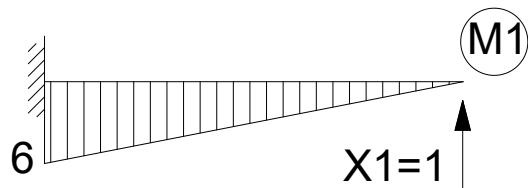
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

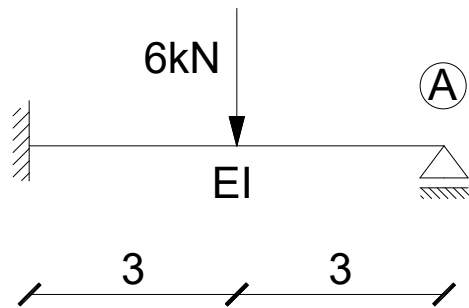


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:

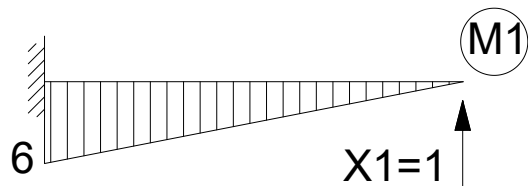
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

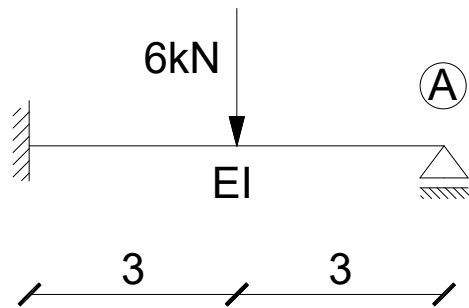


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:



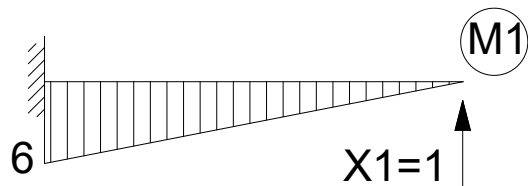
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

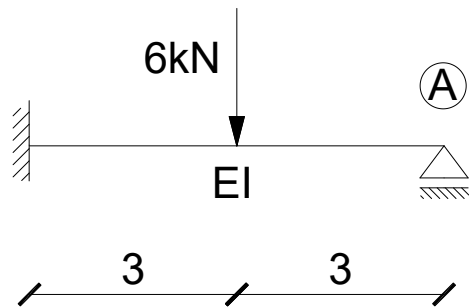


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:

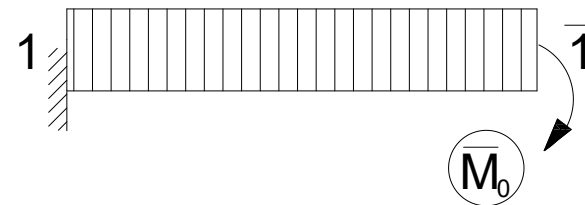


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:



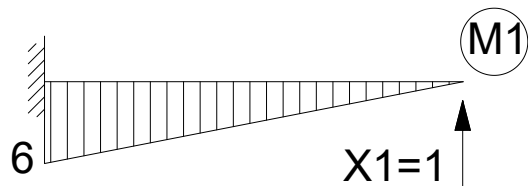
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

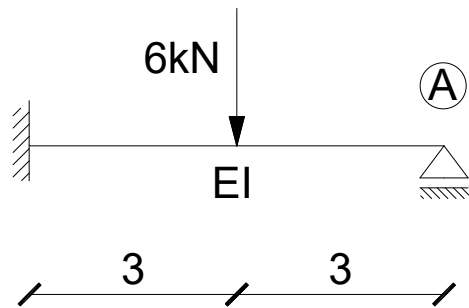


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:

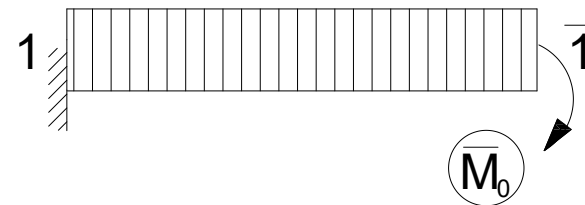


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

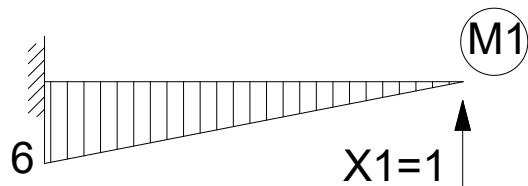
$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

$$\bar{\delta}_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = -\frac{18}{EI}$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

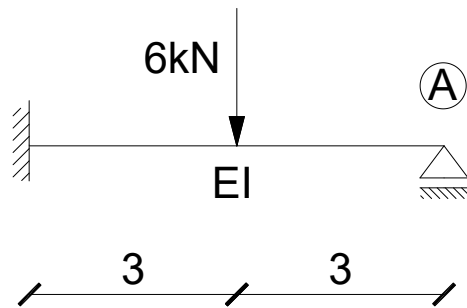


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



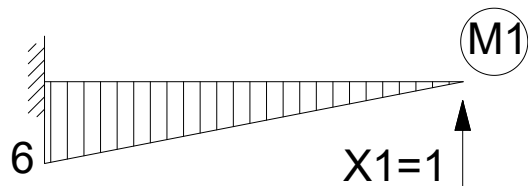
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

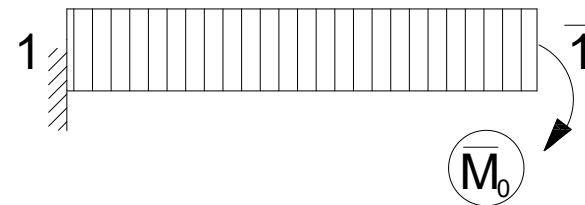
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:

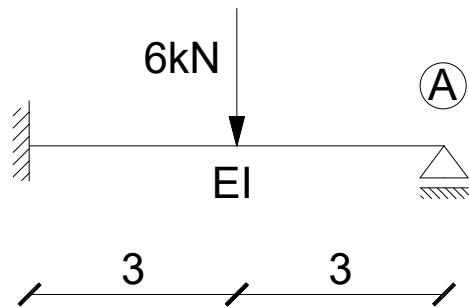


$$\bar{\delta}_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = -\frac{18}{EI}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



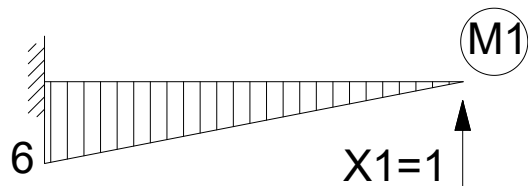
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

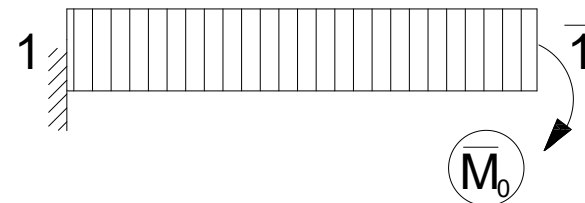
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:



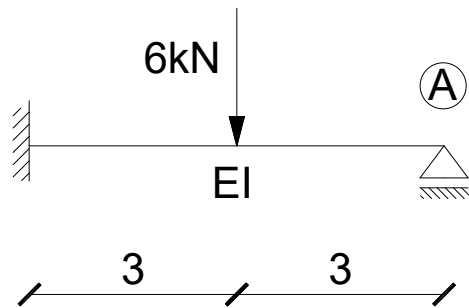
$$\bar{\delta}_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = -\frac{18}{EI}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

$$\delta_{11} \cdot X1 + \bar{\delta}_{10} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



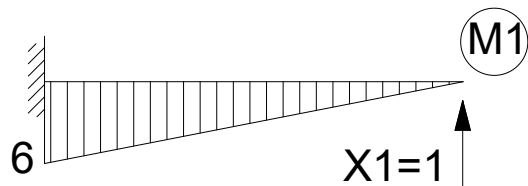
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

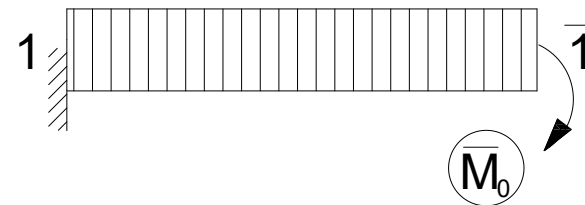
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:



$$\bar{\delta}_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = -\frac{18}{EI}$$

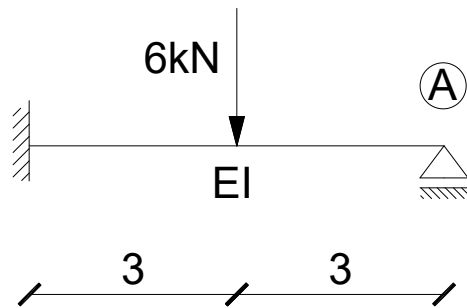
Rozwiązanie równania metody sił:

$$\delta_{11} \cdot X1 + \bar{\delta}_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{18}{EI} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



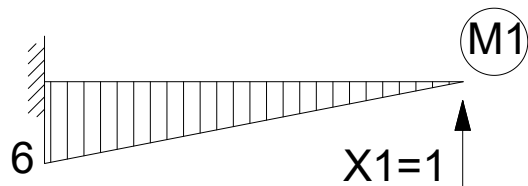
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

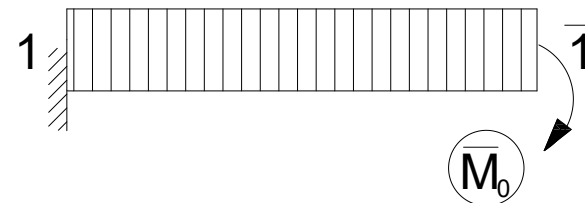
Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:



Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



Wykres od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego:



$$\bar{\delta}_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = -\frac{18}{EI}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

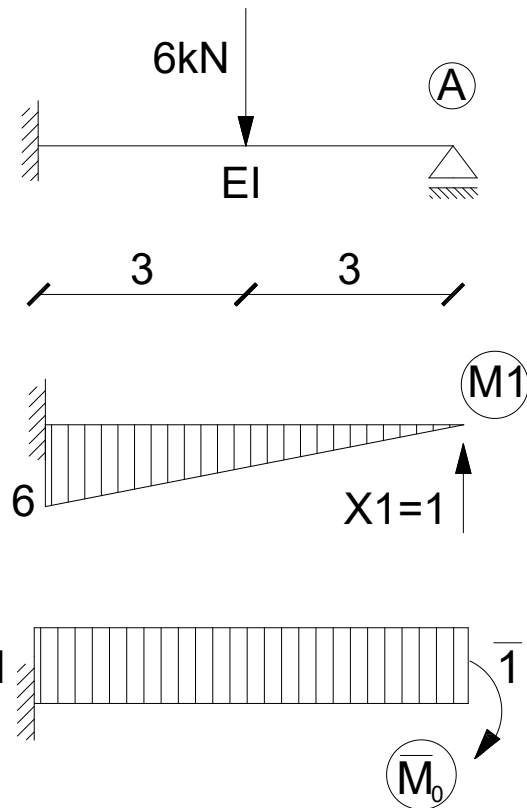
$$\delta_{11} \cdot X1 + \bar{\delta}_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{18}{EI} = 0$$

$$X1 = \frac{1}{4}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.

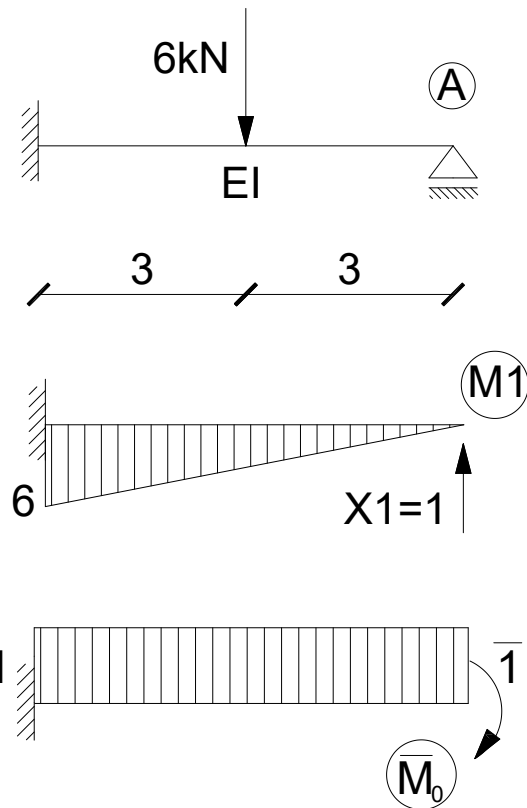


Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



$$X_1 = \frac{1}{4}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



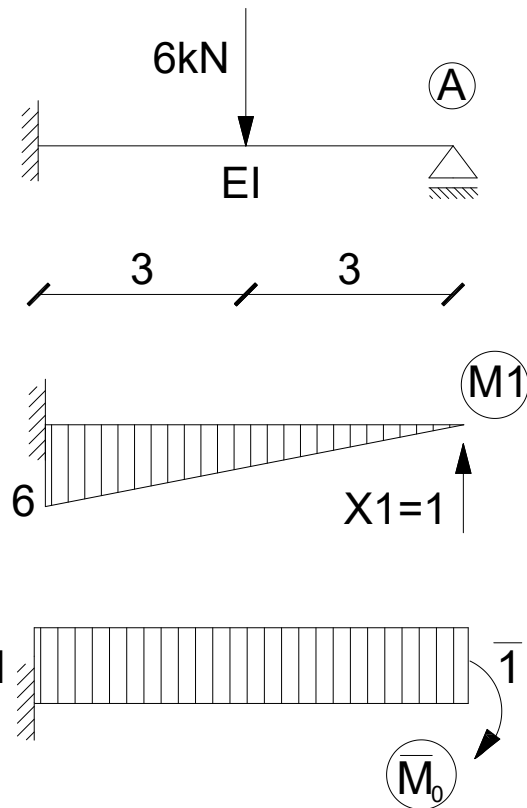
Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

$$X_1 = \frac{1}{4}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



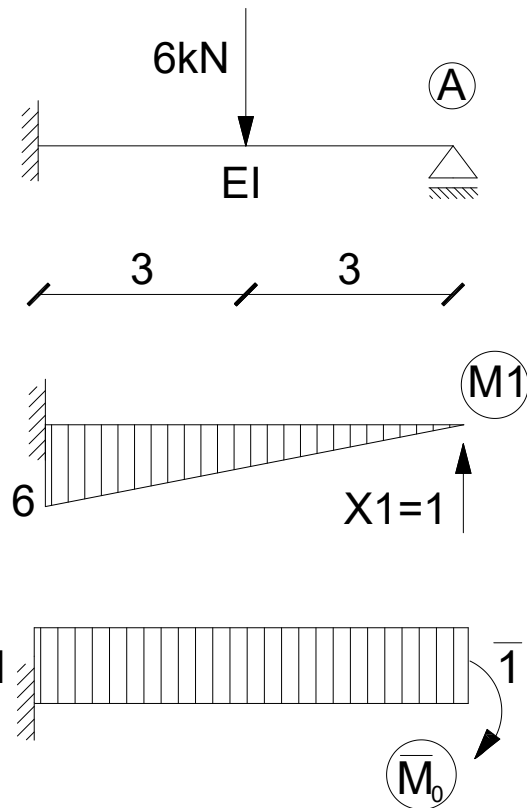
Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

$$X_1 = \frac{1}{4}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

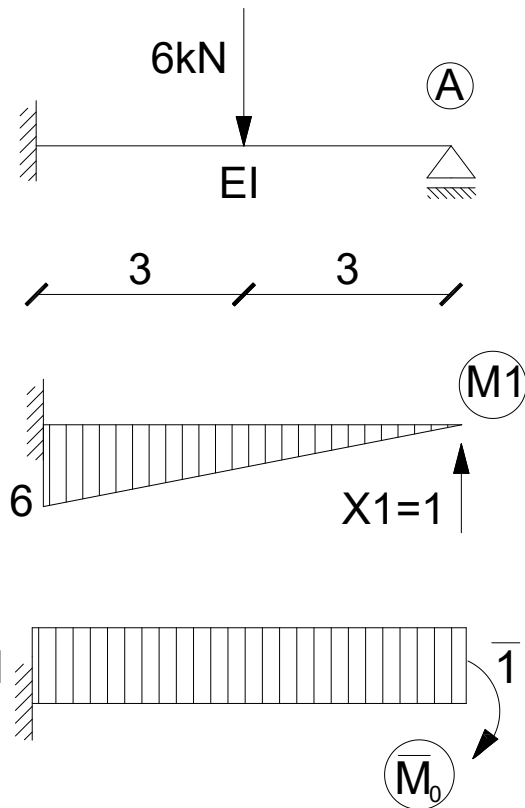


$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

$$M_B = 6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0,5$$

$$X1 = \frac{1}{4}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

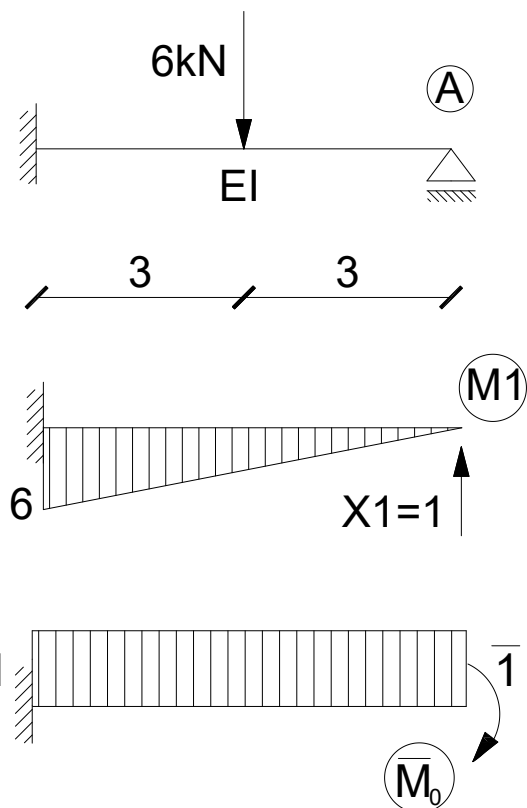


$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

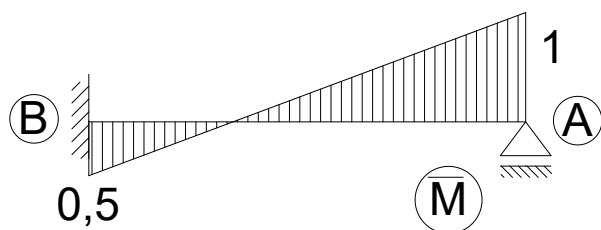
$$M_B = 6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0,5$$

$$X_1 = \frac{1}{4}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

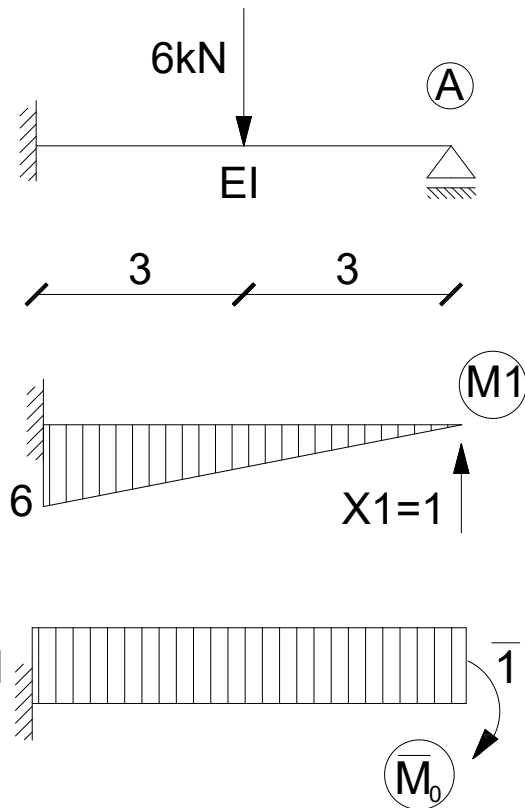


$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

$$M_B = 6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0,5$$

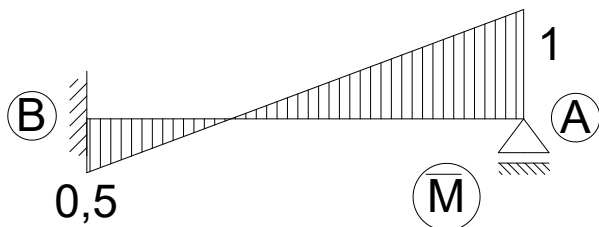
$$X1 = \frac{1}{4}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:

Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

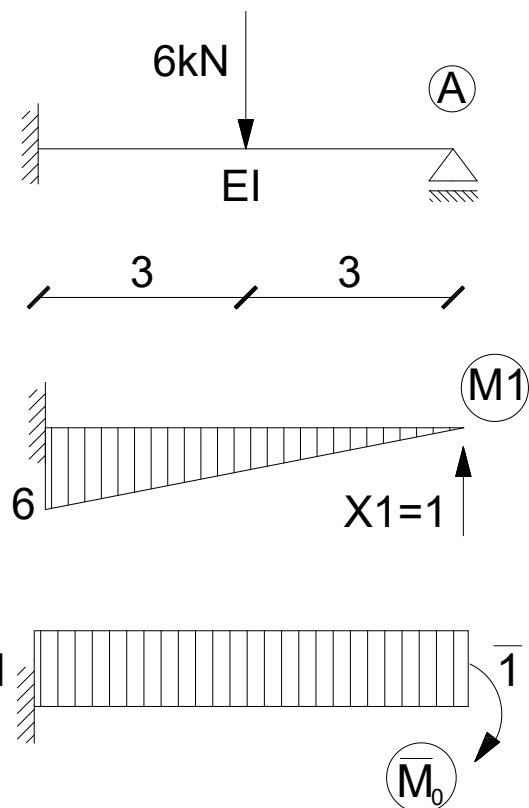


$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

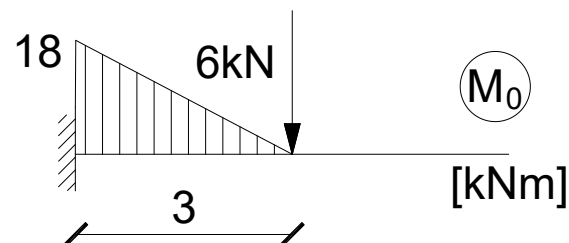
$$M_B = 6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0,5$$

$$X1 = \frac{1}{4}$$

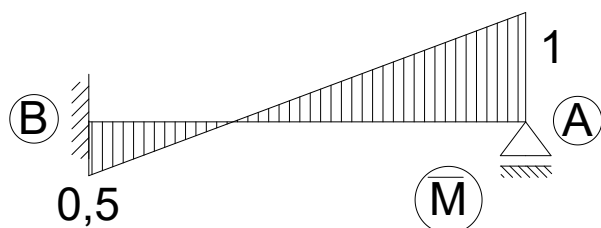
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

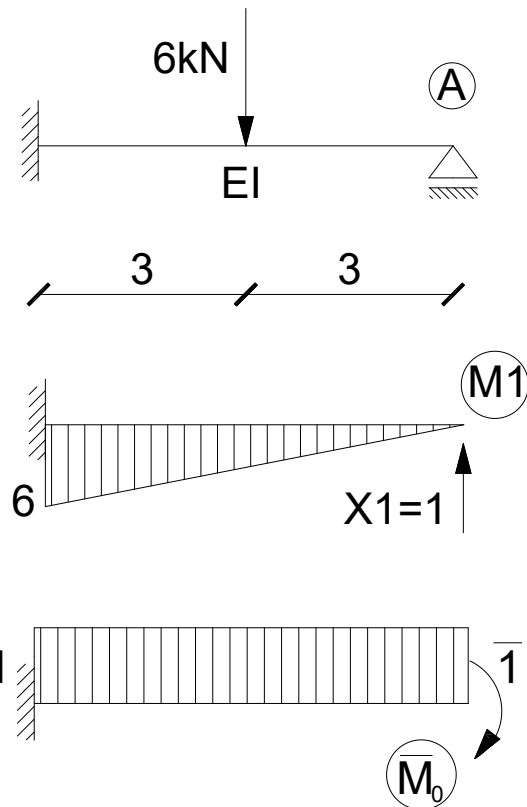


$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

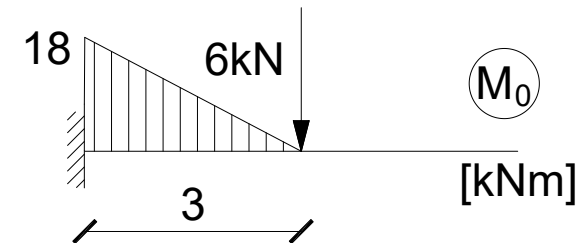
$$M_B = 6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0,5$$

$$X_1 = \frac{1}{4}$$

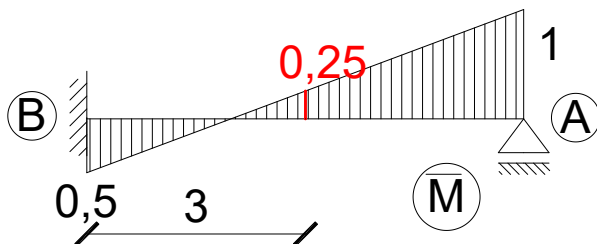
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

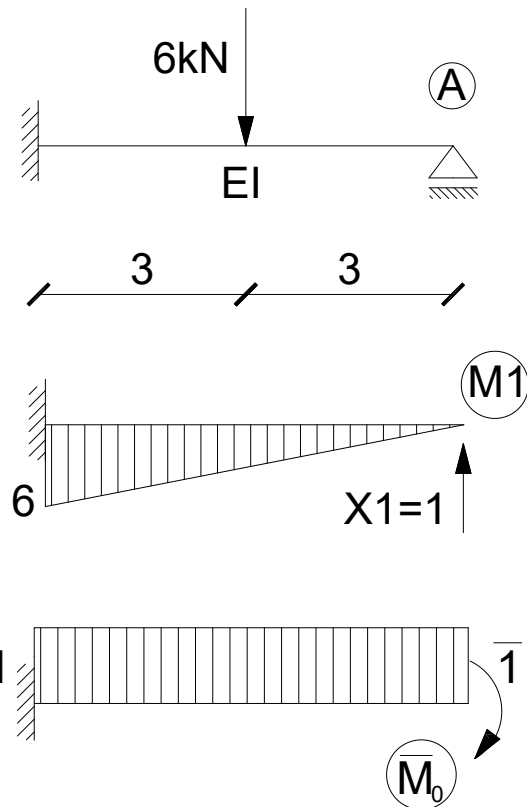


$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

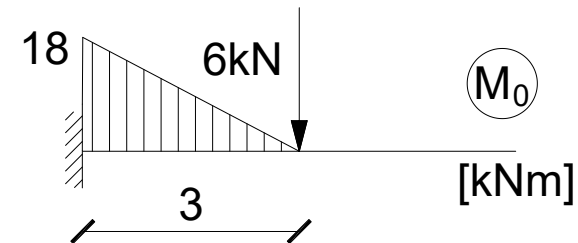
$$M_B = 6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0,5$$

$$X1 = \frac{1}{4}$$

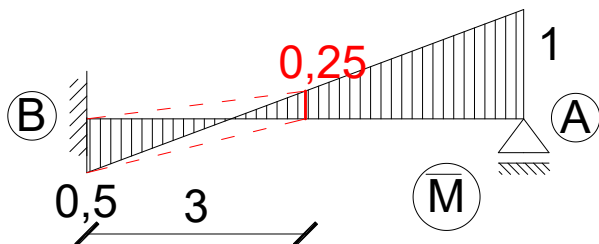
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

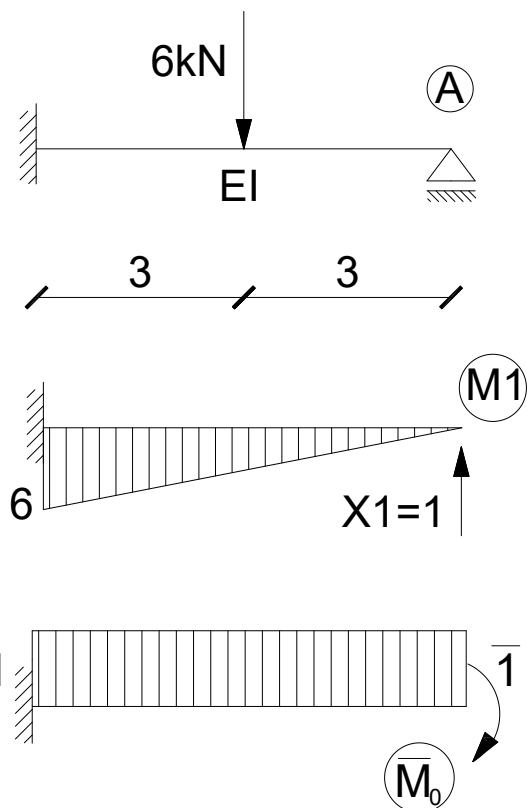


$$M_A = 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -1$$

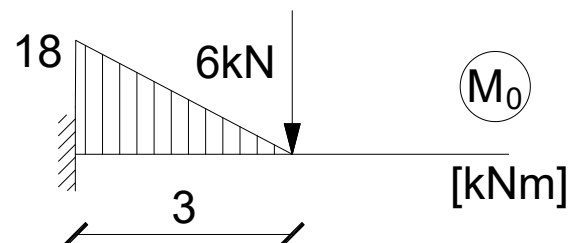
$$M_B = 6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0,5$$

$$X1 = \frac{1}{4}$$

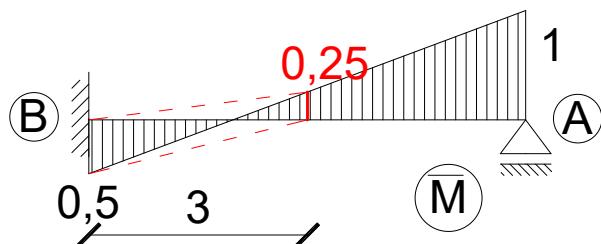
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



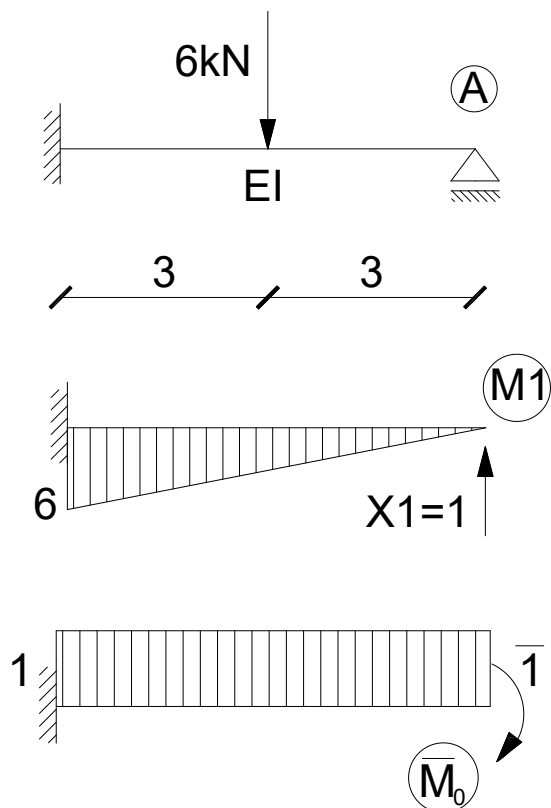
Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



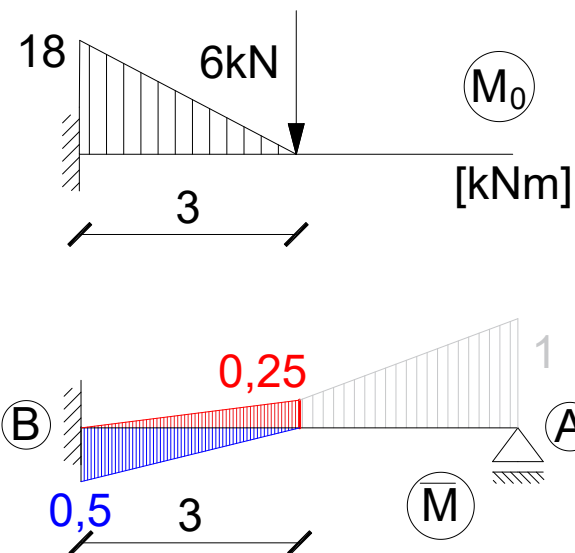
Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



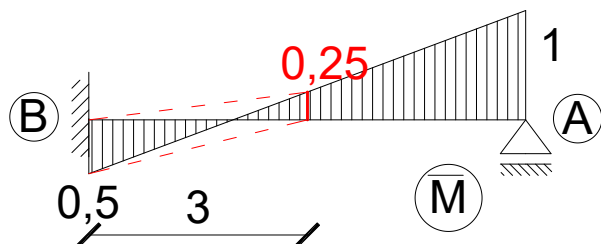
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



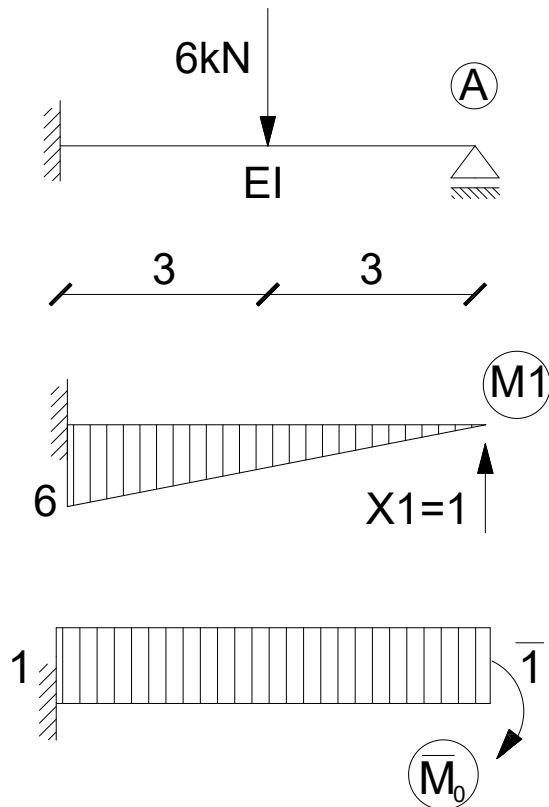
Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



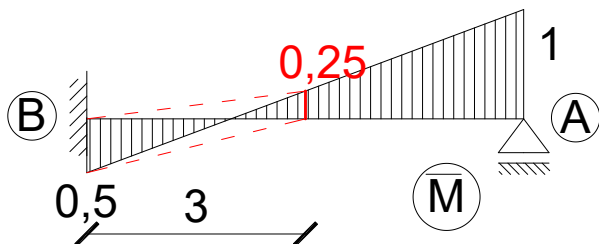
Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



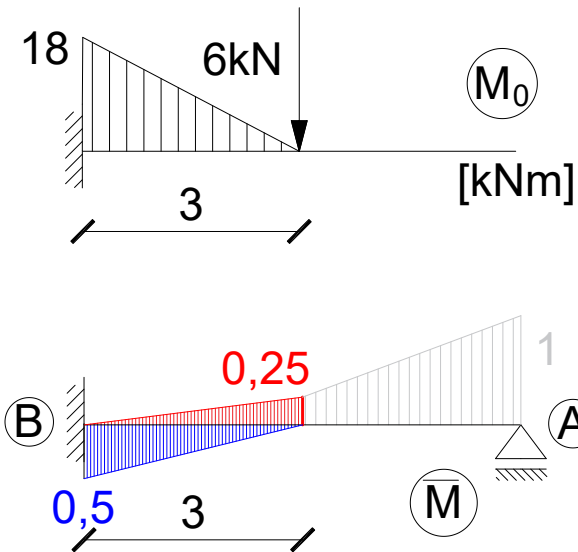
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:

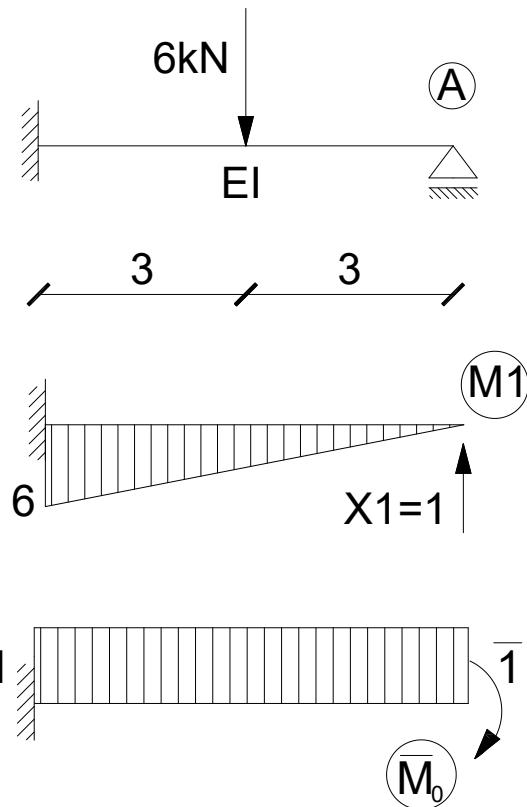


Wykres od obciążenia zewnętrznego dla
schematu podstawowego:

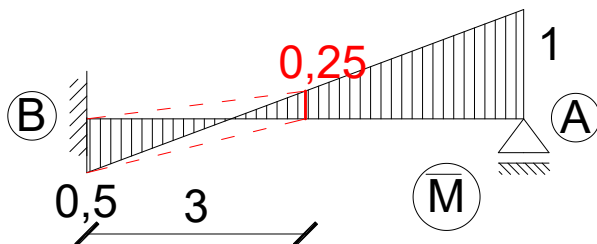


Wyznaczenie przemieszczenia:

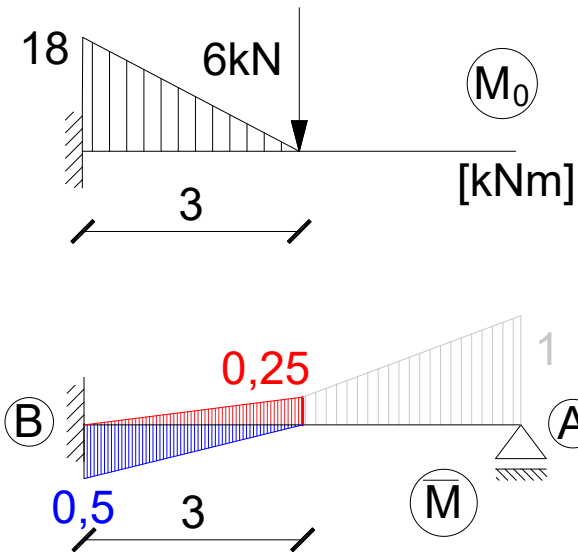
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



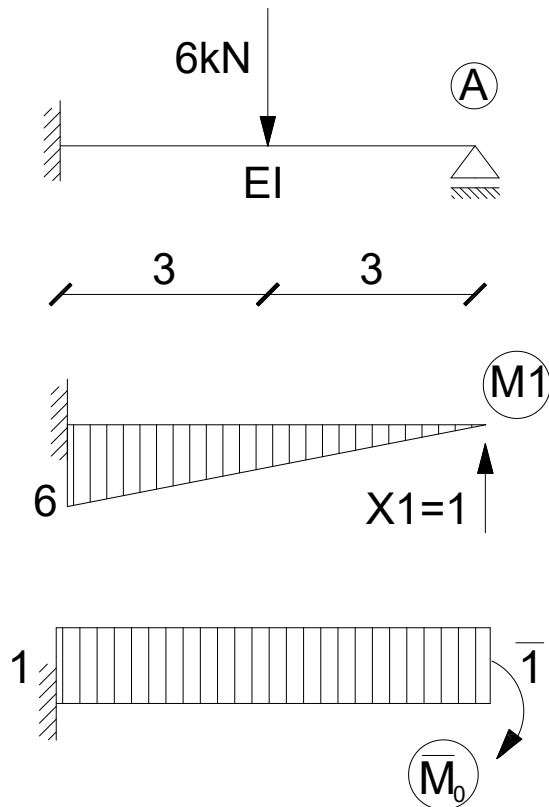
Wykres od obciążenia zewnętrznego dla
schematu podstawowego:



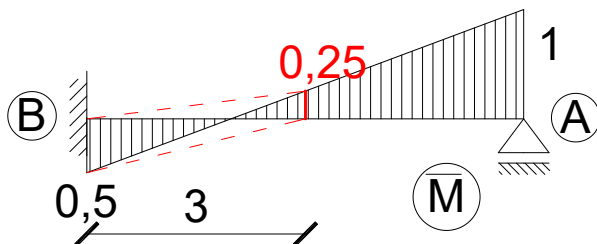
Wyznaczenie przemieszczenia:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \dots \right)$$

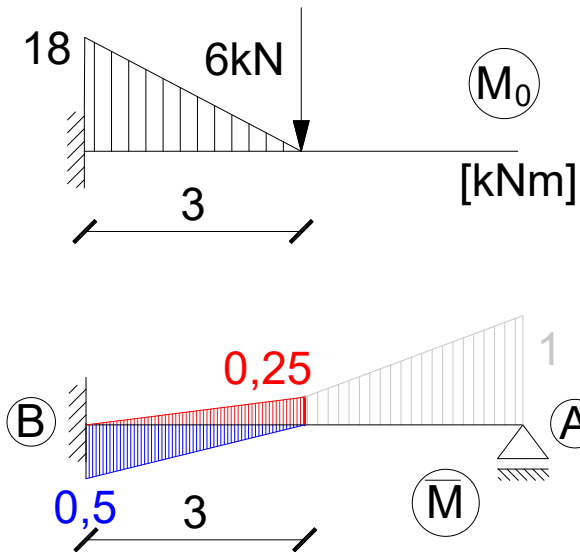
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



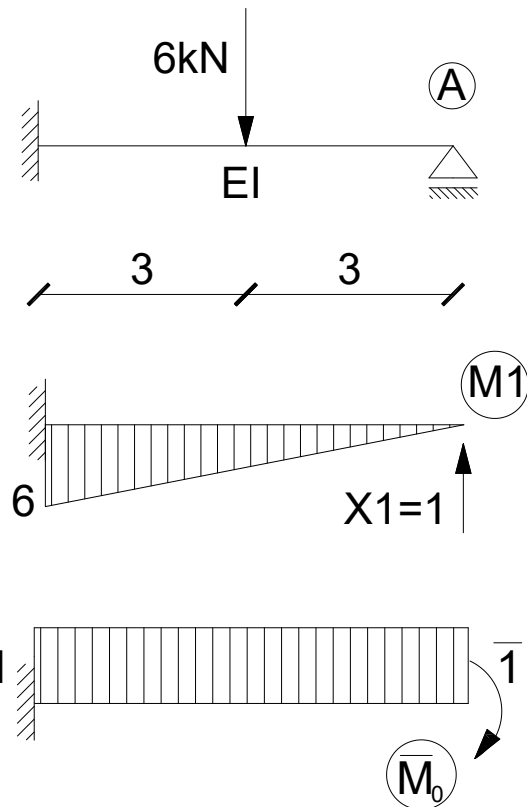
Wykres od obciążenia zewnętrznego dla
schematu podstawowego:



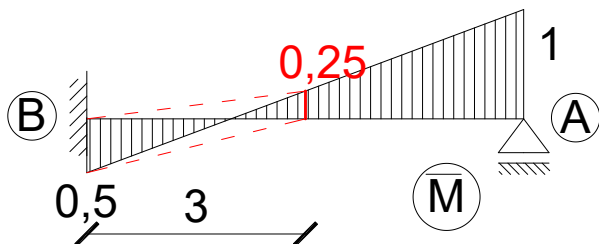
Wyznaczenie przemieszczenia:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,25 - \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right)$$

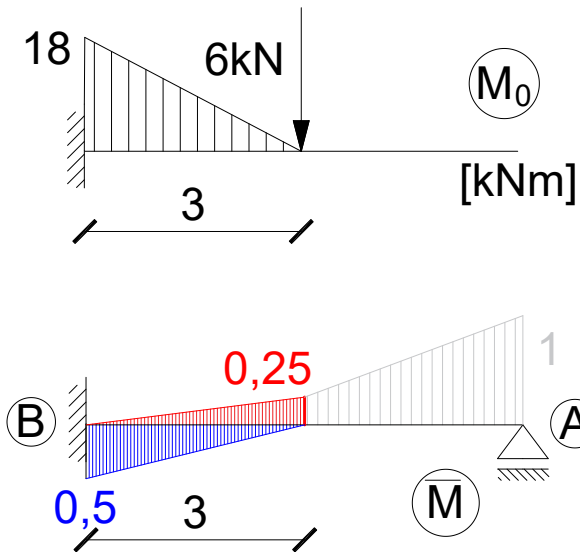
Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z drugiego twierdzenia redukcyjnego.



Wyznaczenie końcowego wykresu momentów
Od obciążenia wirtualnego:



Wykres od obciążenia zewnętrznego dla
schematu podstawowego:



Wyznaczenie przemieszczenia:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,25 - \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right) = -\frac{6,75}{EI}$$