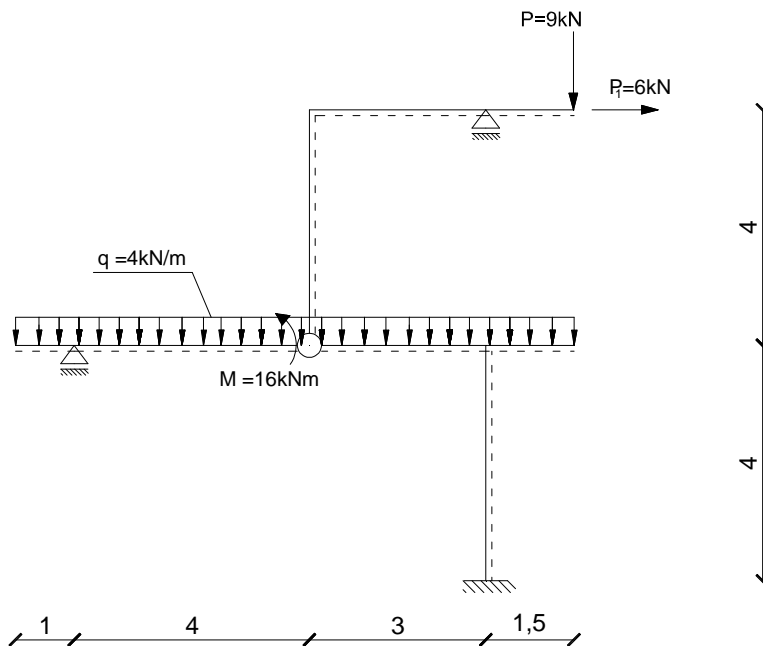
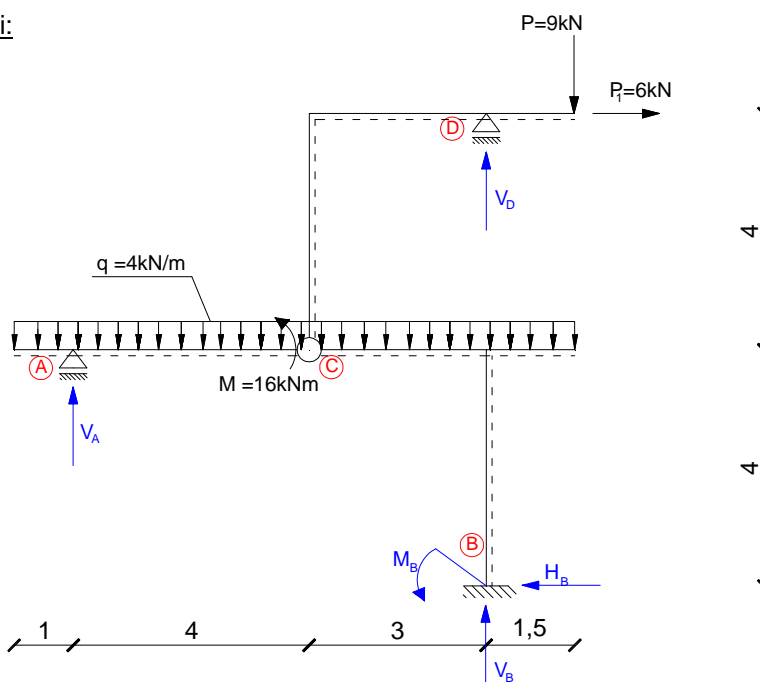


Wykresy sił wewnętrznych w ramach statycznie wyznaczalnych

Przykład 1. Narysuj wykresy sił wewnętrznych N, T, M dla poniższego układu. Policz ewentualne ekstrema.



Oznaczenie podpór i reakcji:



Wyznaczenie reakcji z równań równowagi:

$$\sum M_C^L = -V_A \cdot 4 + 16 + 4 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 \rightarrow V_A = \frac{16 + 4 \cdot 5 \cdot 2,5}{4} = 16,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_C^G = V_D \cdot 3 - 9 \cdot 4,5 - 6 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_D = \frac{9 \cdot 4,5 + 6 \cdot 4}{3} = 21,5 \text{ kN}$$

$$\sum R_x = -H_B + 6 = 0 \rightarrow H_B = 6 \text{ kN}$$

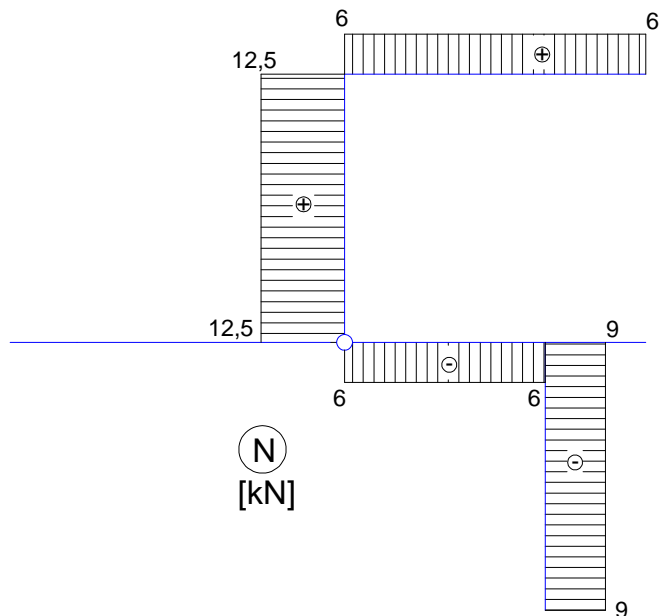
$$\sum R_y = 16,5 + 21,5 - 4 \cdot 9,5 - 9 + V_B = 0 \rightarrow V_B = -16,5 - 21,5 + 4 \cdot 9,5 + 9 = 9 \text{ kN}$$

$$\sum M_C^P = -4 \cdot \frac{4,5^2}{2} - 6 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + M_B = 0 \rightarrow M_B = 4 \cdot \frac{4,5^2}{2} + 6 \cdot 4 - 9 \cdot 3 = 37,5 \text{ kNm}$$

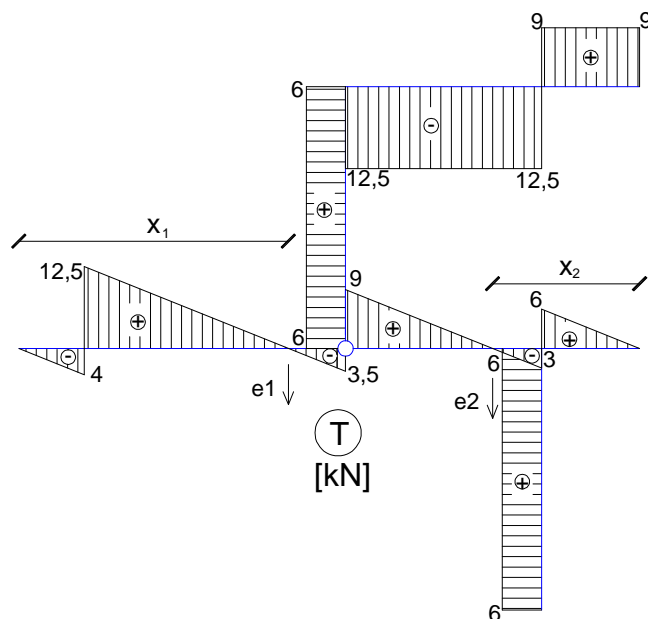
Sprawdzenie poprawności obliczenia reakcji:

$$\sum M_A = 16 + 21,5 \cdot 7 - 9 \cdot 8,5 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 9,5 \cdot (4,75 - 1) - 6 \cdot 4 + 9 \cdot 7 + 37,5 = 0$$

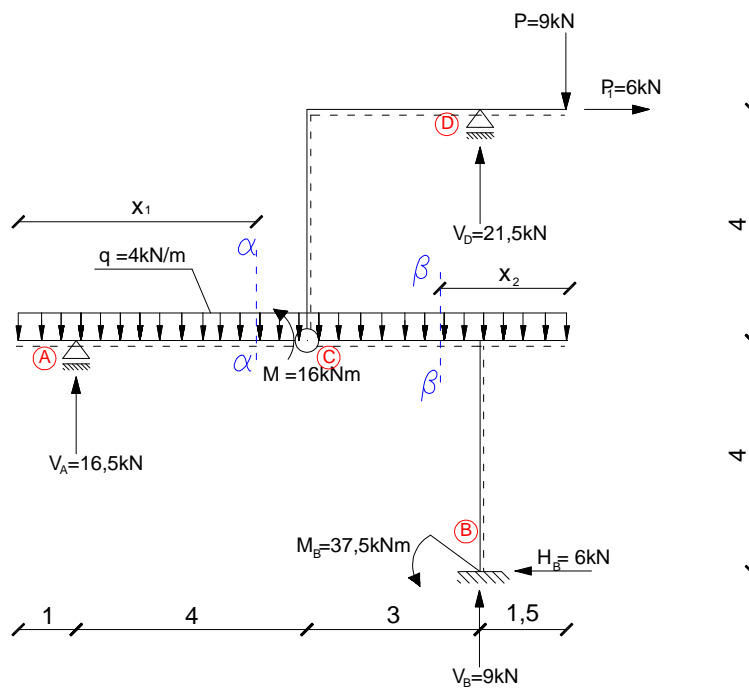
Wykres sił normalnych:



Wykres sił tnących:

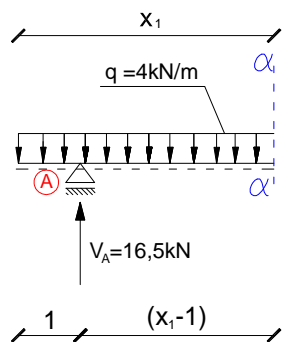


Wyznaczenie ekstremum:



Ekstremum 1:

Dla ułatwienia obliczeń ekstremum liczone jest z lewej strony przekroju $\alpha-\alpha$:



- równanie na siłę tnącą w przekroju $\alpha-\alpha$:

$$T[x_1] = 16,5 - 4x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{16,5}{4} = 4,125m$$

- równanie na moment w przekroju $\alpha-\alpha$ (moment rozciągający spód piszemy ze znakiem "+"):

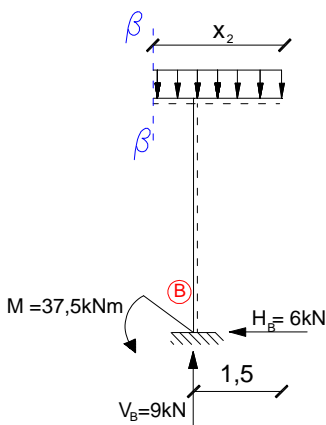
$$M[x_1] = 16,5 \cdot (x_1 - 1) - 4x_1 \cdot \frac{x_1}{2}$$

- moment ekstremalny:

$$M_{ekstr.}[x_1 = 4,125m] = 16,5 \cdot (4,125 - 1) - 4 \cdot 4,125 \cdot \frac{4,125}{2} = 17,53kNm$$

Ekstremum 2:

Dla ułatwienia obliczeń ekstremum liczone jest z prawej strony przekroju $\beta-\beta$:



- równanie na siłę tnącą w przekroju $\beta-\beta$:

$$T[x_2] = -9 + 4x_2 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{9}{4} = 2,25m$$

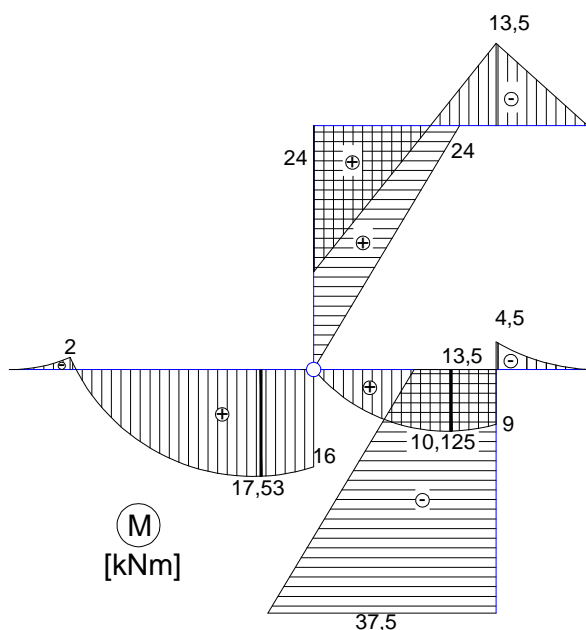
- równanie na moment w przekroju $\beta-\beta$ (moment rozciągający spód piszemy ze znakiem "+"):

$$M[x_2] = 9 \cdot (x_2 - 1,5) - 4x_2 \cdot \frac{x_2}{2} - 6 \cdot 4 + 37,5$$

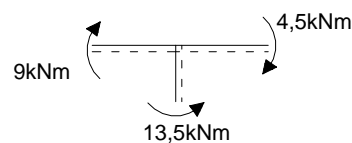
- moment ekstremalny:

$$M_{ekstr.}[x_2 = 2,25m] = 9 \cdot (2,25 - 1,5) - 4 \cdot 2,25 \cdot \frac{2,25}{2} - 6 \cdot 4 + 37,5 = 10,125kNm$$

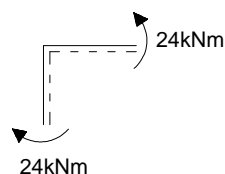
Wykres momentów zginających:



Sprawdzenie równowagi momentów w węzłach:

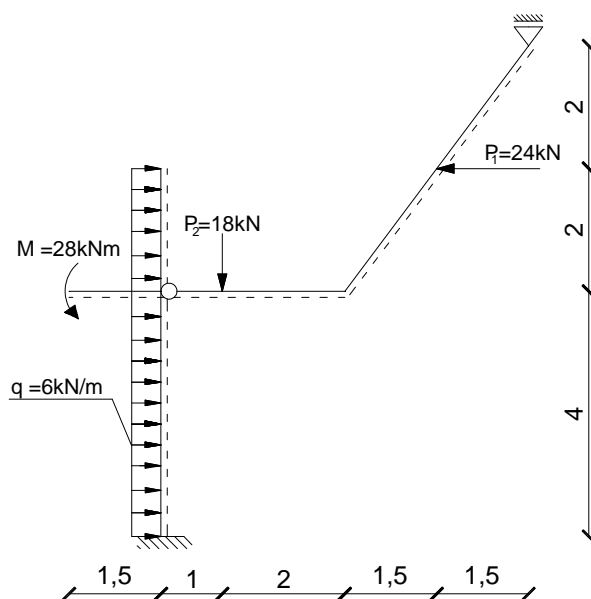


$$\sum M = -9 - 4,5 + 13,5 = 0$$

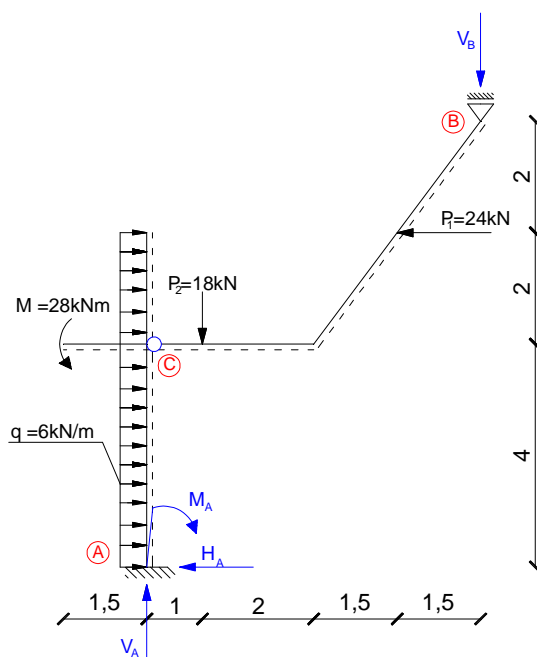


$$\sum M = -24 + 24 = 0$$

Przykład 2. Narysuj wykresy sił wewnętrznych N, T, M dla poniższego układu. Policz ewentualne ekstrema.



Oznaczenie podpór i reakcji:



Wyznaczenie reakcji z równań równowagi:

$$\sum M_C^P = -V_B \cdot 6 + 24 \cdot 2 - 18 \cdot 1 = 0 \rightarrow V_B = \frac{24 \cdot 2 - 18}{6} = 5 \text{ kN}$$

$$\sum R_x = -H_A - 24 + 6 \cdot 6 = 0 \rightarrow H_A = 36 - 24 = 12 \text{ kN}$$

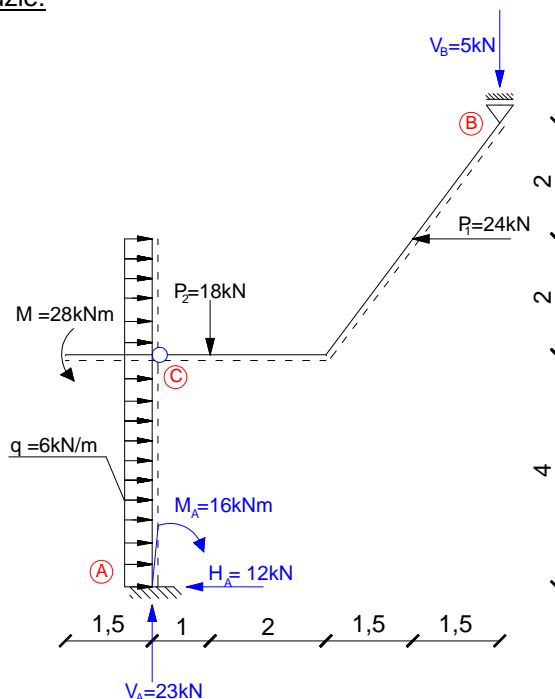
$$\sum R_y = V_A - 18 - 5 = 0 \rightarrow V_A = 18 + 5 = 23 \text{ kN}$$

$$\sum M_C^L = 6 \cdot 6 \cdot 1 - 12 \cdot 4 + 28 - M_A = 0 \rightarrow M_A = 36 - 12 \cdot 4 + 28 = 16 \text{ kNm}$$

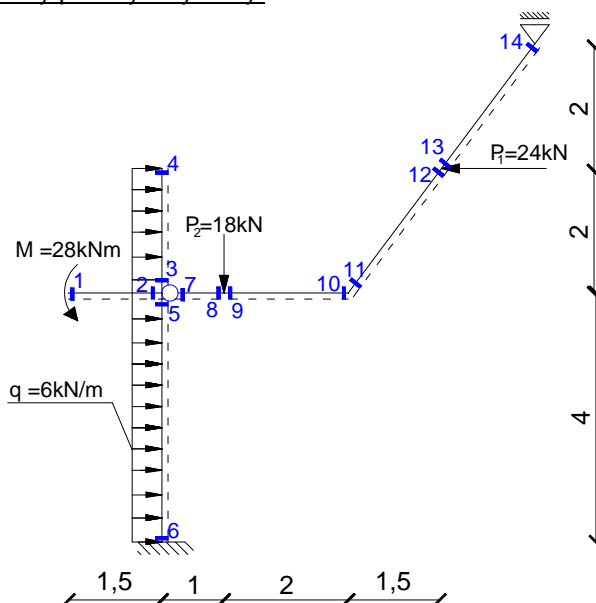
Sprawdzenie poprawności obliczenia reakcji:

$$\sum M_B = -24 \cdot 2 + 18 \cdot 5 + 28 + 6 \cdot 6 \cdot (2 + 3) - 12 \cdot 8 - 23 \cdot 6 - 16 = 0$$

Umieszczenie wartości reakcji na układzie:

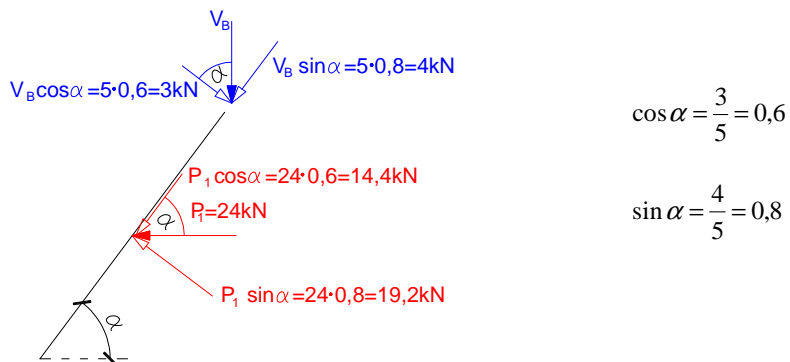


Oznaczenie punktów, w których należy policzyć wykresy:

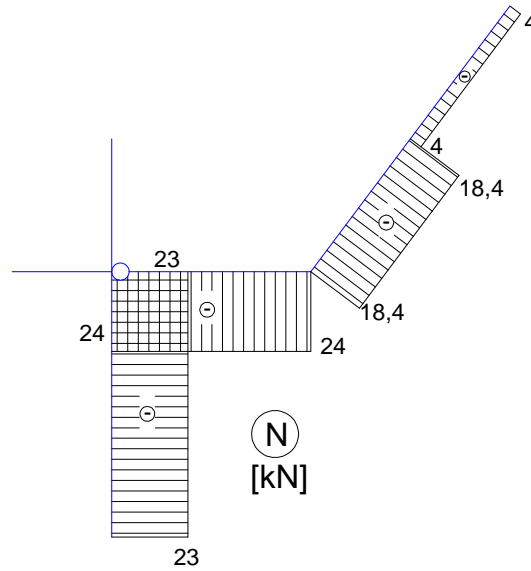


Rysowanie wykresów sił wewnętrznych:

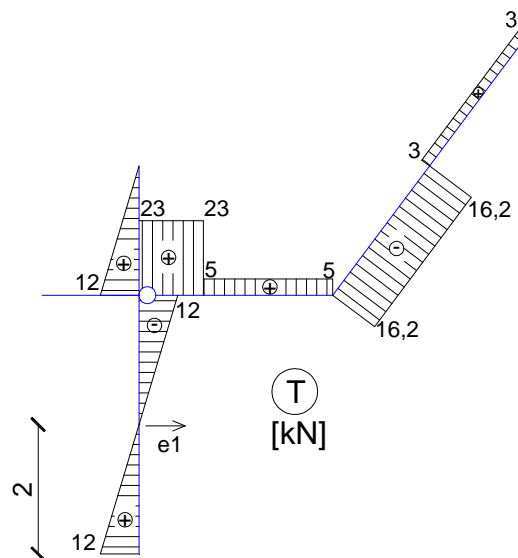
Rozłożenie sił na pręcie ukośnym na składowe w celu policzenia sił tnących i normalnych:



Wykres sił normalnych:

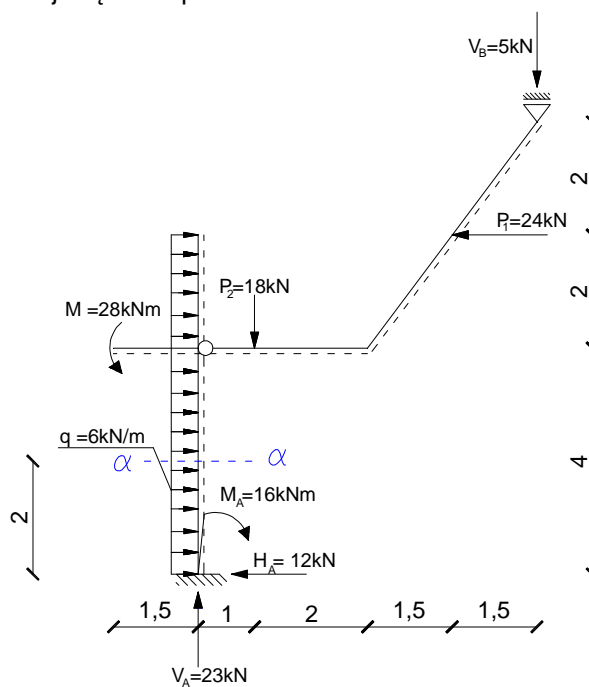


Wykres sił tnących:



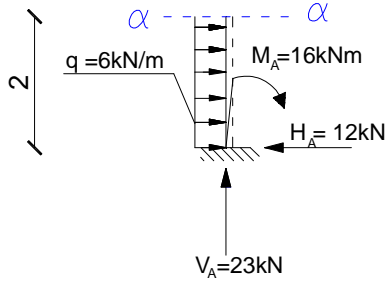
Wyznaczenie ekstremum:

Z uwagi na symetryczny kształt wykresu sił tnących na pręcie pionowym, na podstawie rysunku widać, że ekstremum znajduje się w połowie wysokości dolnej części słupa:



Ekstremum:

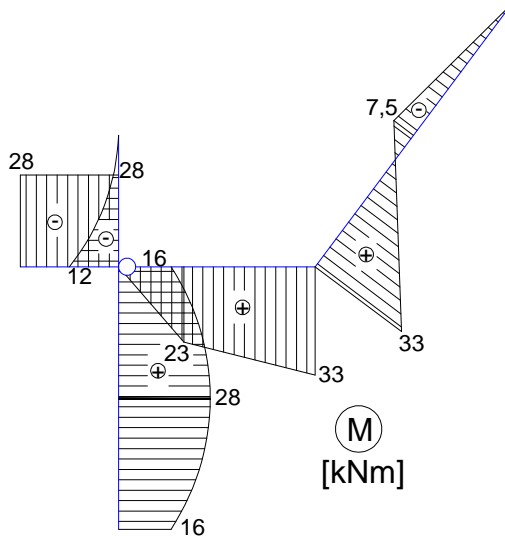
Dla ułatwienia obliczeń moment ekstremalny liczony jest od dołu przekroju $\alpha\text{-}\alpha$:



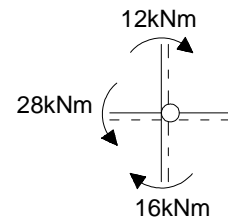
- moment ekstremalny:

$$M_{ekstr.}[x = 2m] = 16 + 12 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 28 \text{ kNm}$$

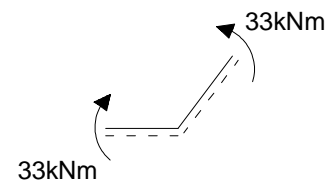
Wykres momentów zginających:



Sprawdzenie równowagi momentów w węzłach:



$$\sum M = 28 - 12 - 16 = 0$$



$$\sum M = -33 + 33 = 0$$