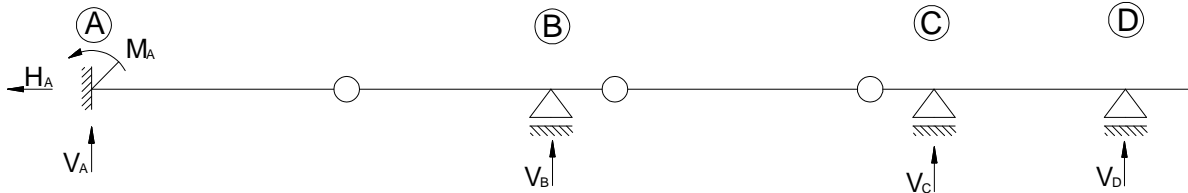


BELKI GERBERA

Są to belki ciągłe przegubowe i należą do układów statycznie niewyznaczalnych (zatem $n_s = 0$).

Przykładowy schemat:



Wyznaczenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = R - P - 3$$

gdzie:

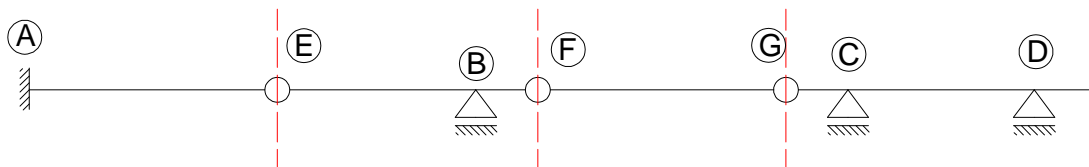
- R – liczba reakcji,
- P – liczba przegubów,
- 3 – liczba równań równowagi na płaszczyźnie.

Dla powyższego schematu: $R = 6$; $P = 3$ zatem

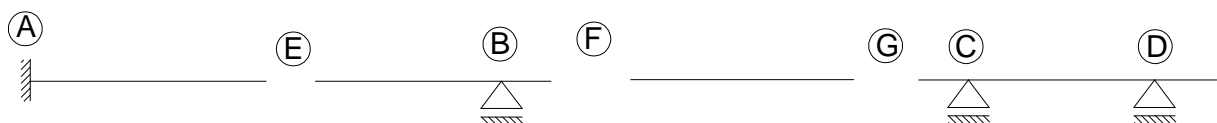
$$n_s = 6 - 3 - 3 = 0.$$

Sposób obliczania:

Aby policzyć Belkę Gerbera w najprostszy sposób dzielimy ją w przegubach



uzyskując pojedyncze belki

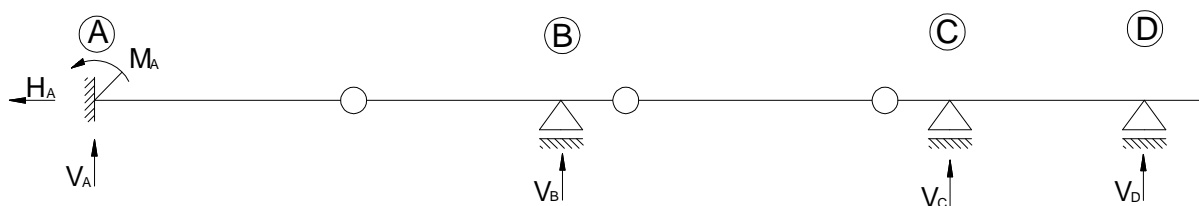


Aby móc policzyć konstrukcję, belki powstałe po podziale muszą być statycznie wyznaczalne i geometrycznie niezmiennie, zatem muszą opierać się na dwóch podporach przegubowych lub skrajne mogą być utwierdzone. W powstałych po podziale belkach dokładamy fikcyjne podpory w przegubach tak aby stały się one geometrycznie niezmiennie.

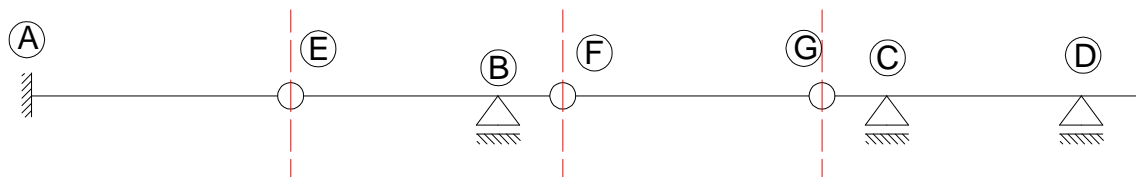
Najniżej znajdują się belki które bezpośrednio po podziale są statycznie wyznaczalne i nie potrzebują dodatkowych podpór (utwierdzenie lub belka oparta na dwóch podporach). Najwyżej umiejscawiamy belkę, która po podziale nie ma żadnego podparcia i potrzebuje dwóch podpór fikcyjnych (schemat 1.) lub skrajna belka która po podziale opiera się na jednej podporze jeżeli w danym układzie nie ma części nieodpartej żadną podporą zawierającą się między dwoma przegubami (schemat 2.). Pozostałe belki umiejscawiamy schodkowo od tej położonej najwyżej do tej położonej najniżej. Jeżeli wyżej ulokowana belka ma w danym przegubie fikcyjną podporę to druga musi mieć w tym miejscu swobodny koniec.

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

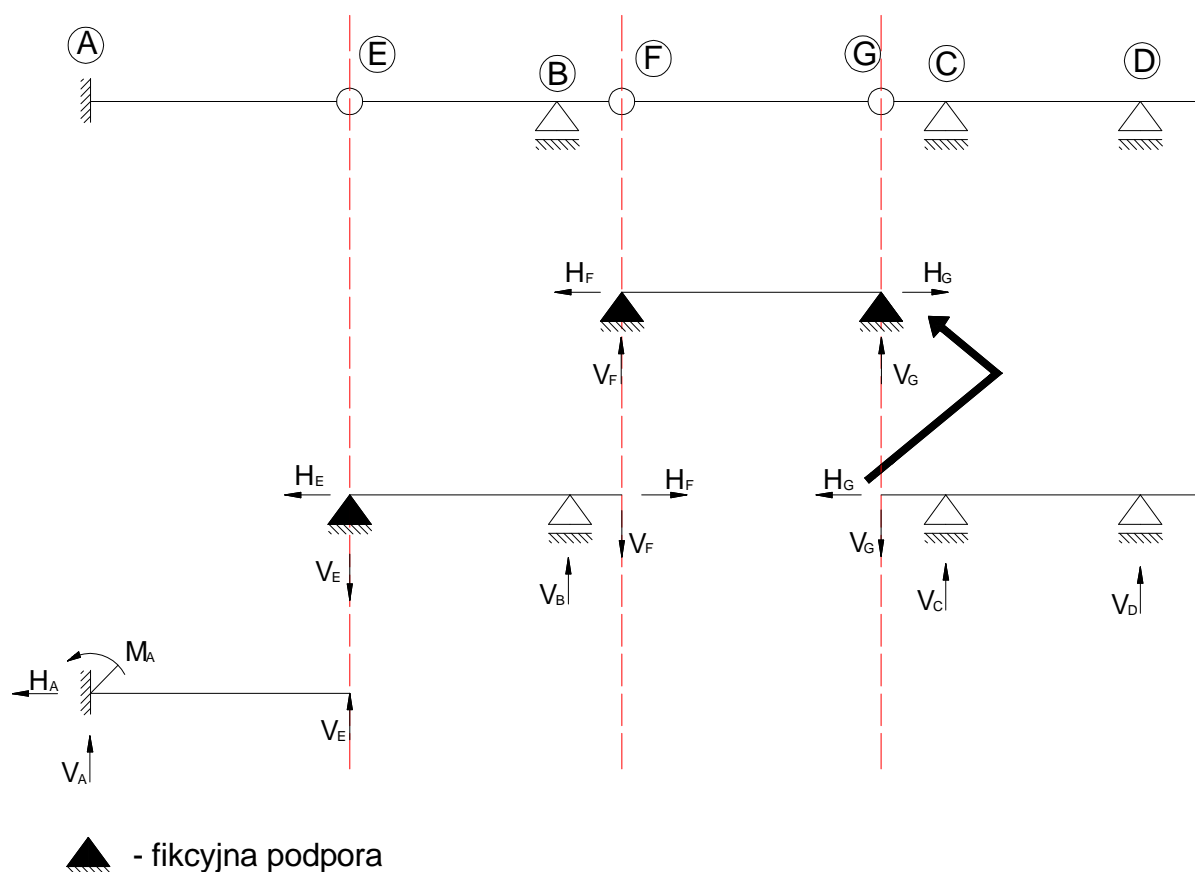
Schemat 1.:



Krok 1.: Dokonujemy podziału belki gerbera w przegubach.



Krok 2.: Wstawiamy podpory fikcyjne tak aby belki powstałe po podziale były geometrycznie niezmiennie i umiejscawiamy je na odpowiedniej wysokości:

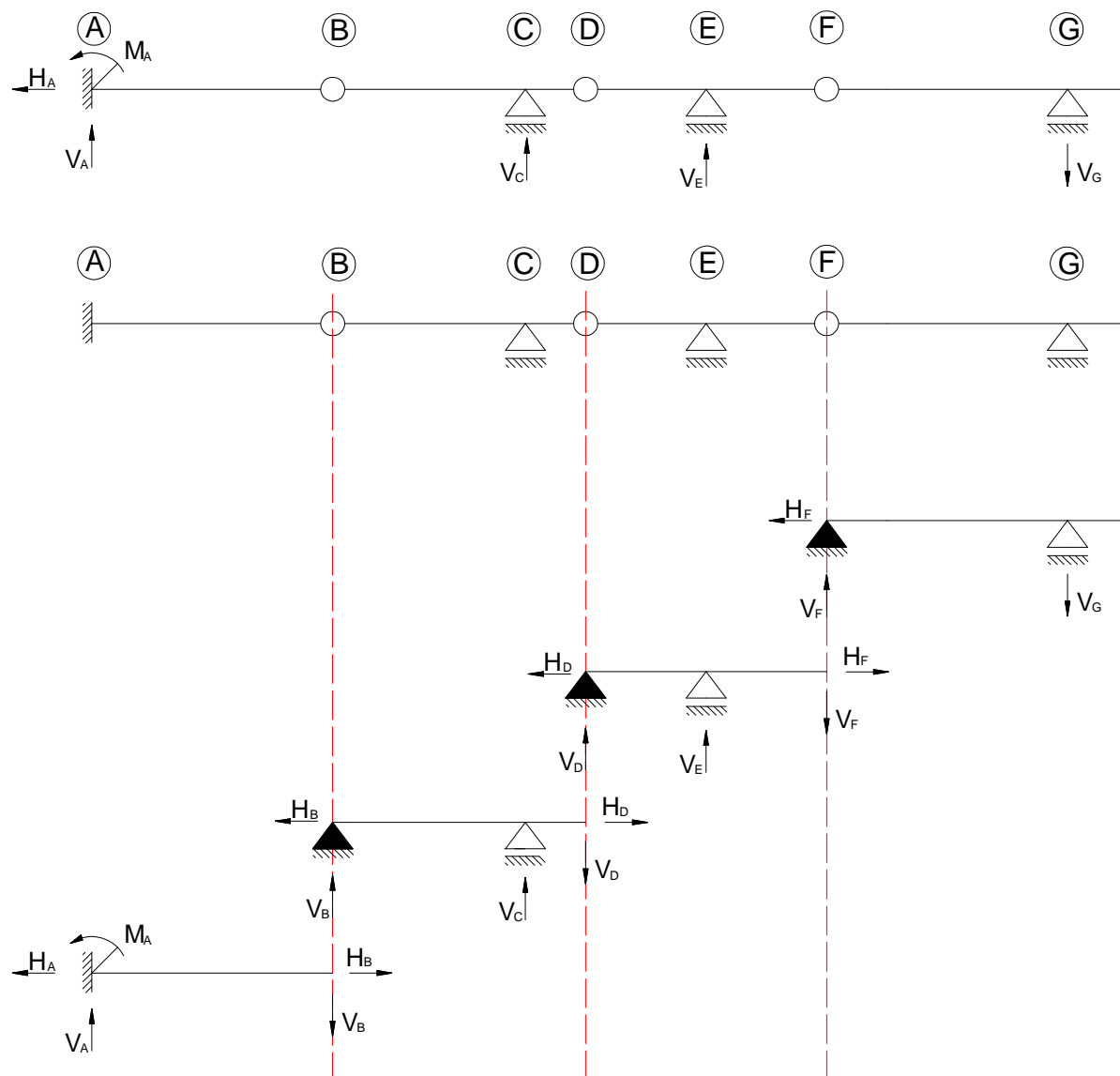


WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

Wyznaczamy reakcje dla poszczególnych belek oddzielnie zaczynając od tej położonej najwyżej i schodzimy stopniowo w dół obciążając belki niżej położone wyliczonymi wcześniej reakcjami.

W schemacie 1. najpierw liczymy część FG (część ta jest przypadkiem belki statycznie niewyznaczalnej, aby policzyć reakcje poziome, należy wyznaczyć H_G z sumy rzutów na oś x dla części GD), później części EF lub GD, na końcu zaś AE.

Schemat 2.:



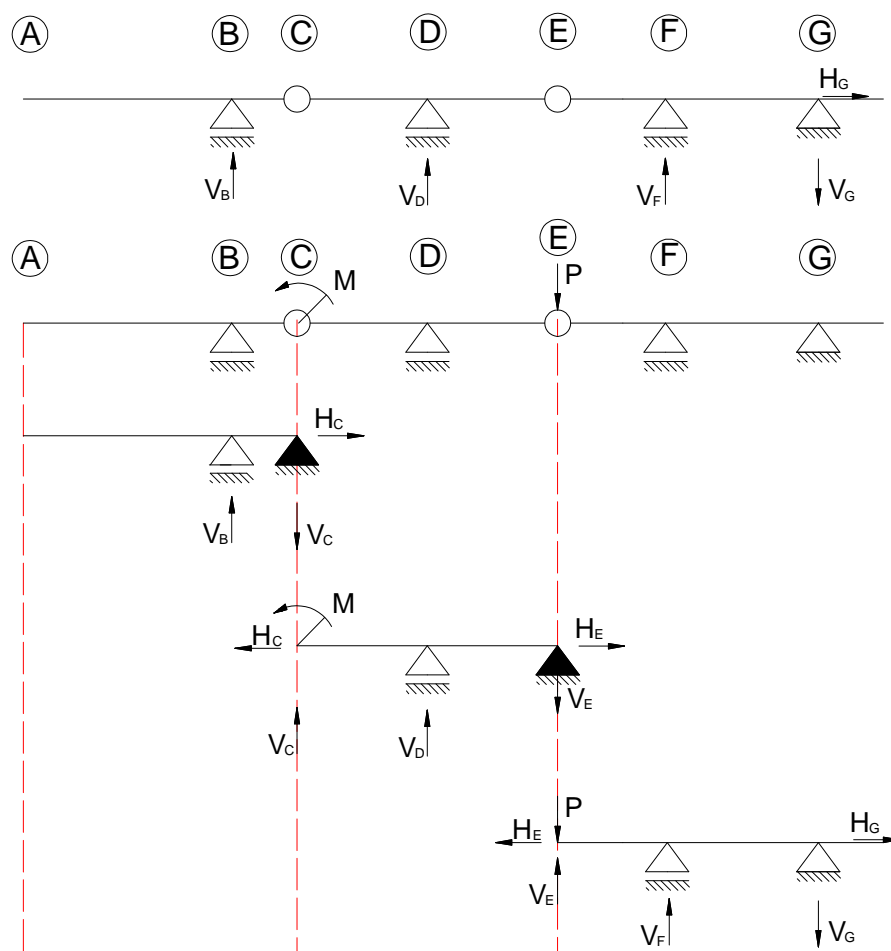
W schemacie 2. najpierw liczymy część FG, później DF, następnie BD, na końcu zaś AB.

Obciążenie w przegubie:

Jeżeli zdarzy się, że siła skupiona przyłożona w przegubie to po rozbiciu w przegubach przykładamy ją na belce dolnej (tylko i wyłącznie!!! – nie wolno jej przyłożyć na obie belki ponieważ zwiększymy wartość tej siły dwukrotnie!).

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

Schemat 3.:



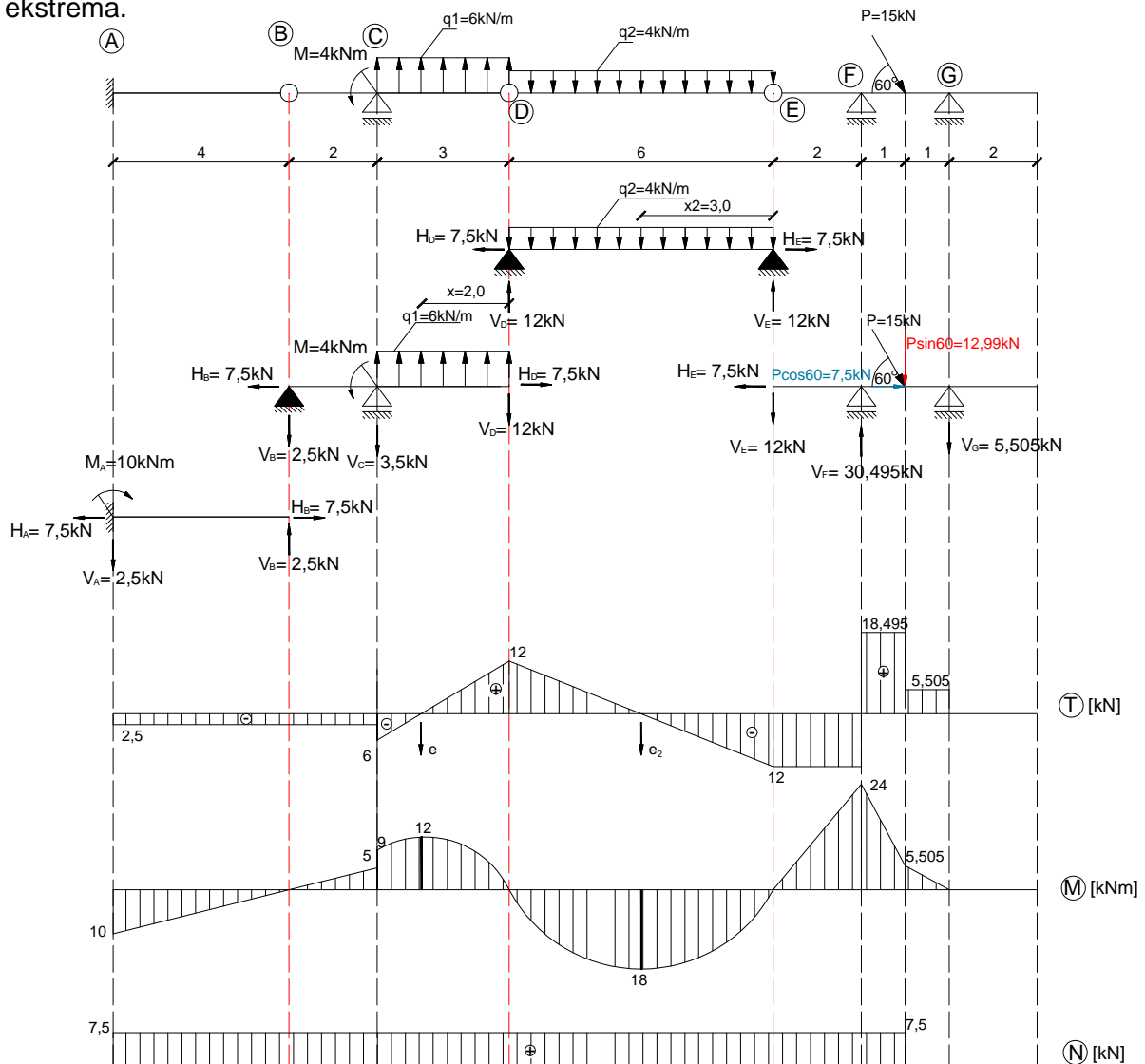
Wykresy:

Wykresy można rysować dla każdej belki osobno i później złożyć je w całość.

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

Przykład 1.

Wyznacz reakcje w poniższej belce. Narysuj wykresy sił wewnętrznych. Policz ewentualne ekstrema.



Wyznaczenie reakcji:

Część DE:

$$\sum F_X = -H_D + H_E = 0$$

$$\sum M_D = q_2 \cdot 6 \cdot 3 - V_E \cdot 6 = 0 \rightarrow V_E = 3q_2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = -q_2 \cdot 6 \cdot 3 + V_D \cdot 6 = 0 \rightarrow V_D = 3q_2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_Y = V_D + V_E - q_2 \cdot 6 = 12 + 12 - 4 \cdot 6 = 0$$

Część EG:

$$\sum F_X = -H_E + P \cos 60^\circ = 0 \rightarrow H_E = P \cos 60^\circ = 7,5 \text{ kN} \rightarrow H_D = 7,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_F = -V_E \cdot 2 + P \sin 60^\circ \cdot 1 + V_G \cdot 2 = 0 \rightarrow V_G = 0,5(2V_E - P \sin 60^\circ \cdot 1) = 0,5(2 \cdot 12 - 12,99 \cdot 1) = 5,505 \text{ kN}$$

$$\sum M_G = -V_E \cdot 4 - P \sin 60^\circ \cdot 1 + V_F \cdot 2 = 0 \rightarrow V_F = 0,5(4V_E + P \sin 60^\circ \cdot 1) = 0,5(4 \cdot 12 + 12,99 \cdot 1) = 30,495 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_Y = V_F - V_E - V_G - P \sin 60^\circ = 30,495 - 12 - 5,505 - 12,99 = 0$$

Część BD:

$$\sum F_X = -H_B + H_D = 0 \rightarrow H_B = H_D = 7,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = V_C \cdot 2 - M - q_1 \cdot 3 \cdot 3,5 + V_D \cdot 5 = 0 \rightarrow V_C = 0,5(M + q_1 \cdot 3 \cdot 3,5 - V_D \cdot 5) = 0,5(4 + 6 \cdot 3 \cdot 3,5 - 12 \cdot 5) = 3,5 \text{ kN}$$

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

$$\sum M_C = -V_B \cdot 2 - M - q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 + V_D \cdot 3 = 0 \rightarrow V_B = 0,5 \cdot (-M - q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 + V_D \cdot 3) = 0,5 \cdot (-4 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12 \cdot 3) = 2,5 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_Y = -V_B - V_C - V_D + q_1 \cdot 3 = -2,5 - 3,5 - 12 + 6 \cdot 3 = 0$$

Część AB:

$$\sum F_X = -H_A + H_B = 0 \rightarrow H_A = H_B = 7,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot 4 + M_A = 0 \rightarrow M_A = 4V_B = 4 \cdot 2,5 = 10 \text{ kNm}$$

$$\sum F_Y = V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = V_B = 2,5 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot 4 + M_A = -2,5 \cdot 4 + 10 = 0$$

Wyznaczenie ekstremum:

$$T[x] = V_D - q_1 x = 0 \rightarrow x = V_D / q_1 = 12 / 6 = 2 \text{ m}$$

$$M[x] = V_D \cdot x - q_1 \cdot x^2 / 2$$

$$M[x = 2] = 12 \cdot 2 - 6 \cdot 2^2 / 2 = 12 \text{ kNm}$$

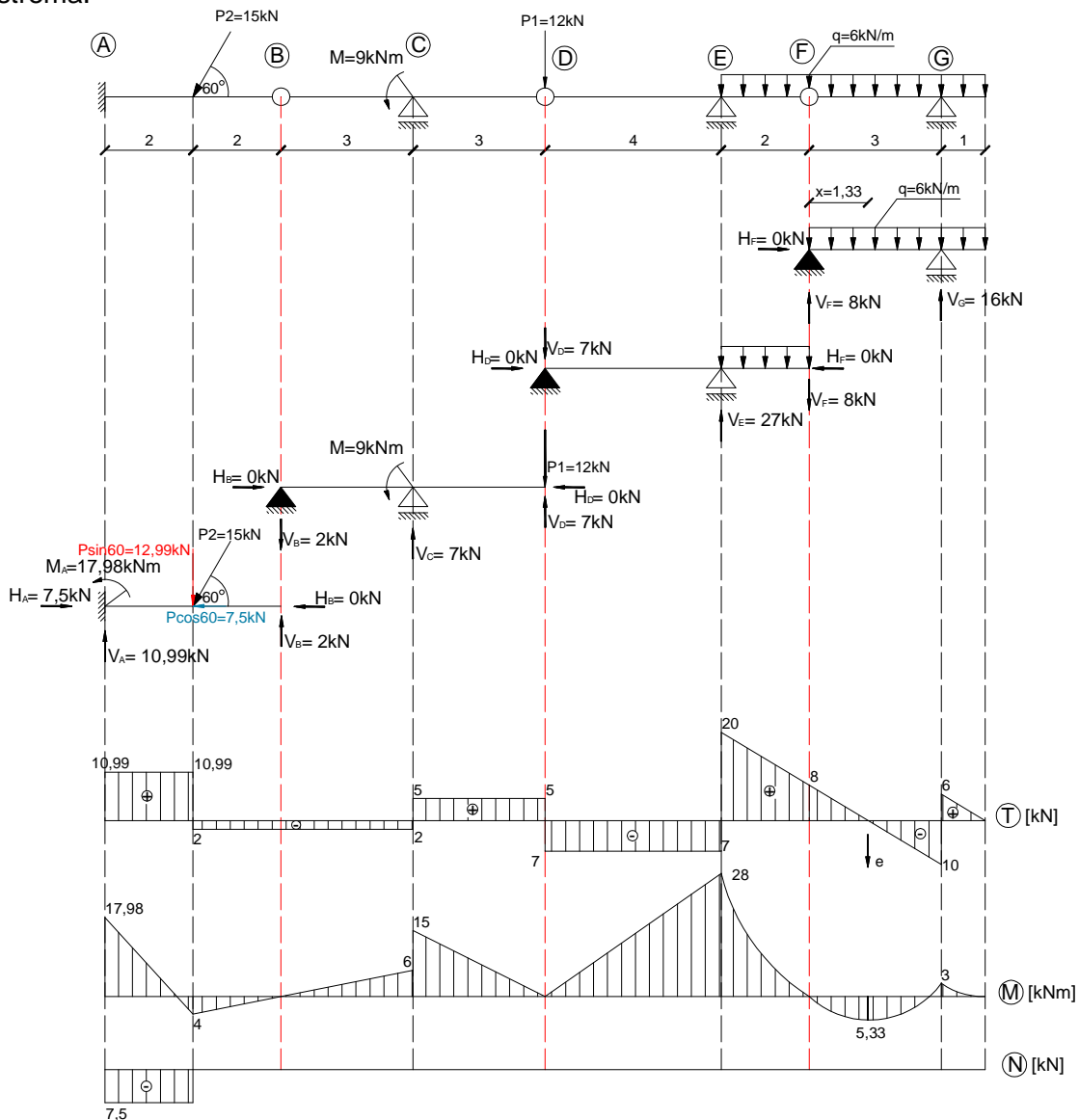
$$T[x_2] = V_D - q_2 x_2 = 0 \rightarrow x_2 = V_D / q_2 = 12 / 4 = 3 \text{ m}$$

$$M[x_2] = V_D \cdot x_2 - q_2 \cdot x_2^2 / 2$$

$$M[x_2 = 2] = 12 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2 / 2 = 18 \text{ kNm}$$

Przykład 2.

Wyznacz reakcje w poniższej belce. Narysuj wykresy sił wewnętrznych. Policz ewentualne ekstrema.



WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

Wyznaczenie reakcji:

Część FG:

$$\sum F_x = H_F = 0$$

$$\sum M_F = q \cdot 4 \cdot 2 - V_G \cdot 3 = 0 \rightarrow V_G = 1/3(8q) = 8/3 \cdot 6 = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_G = -q \cdot 4 \cdot 1 + V_F \cdot 3 = 0 \rightarrow V_F = 4/3q = 4/3 \cdot 6 = 8 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_y = V_F + V_G - q \cdot 4 = 8 + 16 - 4 \cdot 6 = 0$$

Część DF:

$$\sum F_x = -H_F + H_D = 0 \rightarrow H_D = H_F = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = -V_E \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 5 + V_F \cdot 6 = 0 \rightarrow V_E = 0,25(6V_F + 10q) = 0,25(6 \cdot 8 + 10 \cdot 6) = 27 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = -V_D \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 + V_F \cdot 2 = 0 \rightarrow V_D = 0,25(2V_F + 2q) = 0,25(2 \cdot 8 + 2 \cdot 6) = 7 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_y = -V_F - 2q + V_E - V_D = -8 - 2 \cdot 6 + 27 - 7 = 0$$

Część BD:

$$\sum F_x = H_B - H_D = 0 \rightarrow H_B = H_D = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = -V_C \cdot 3 - M + P_1 \cdot 6 - V_D \cdot 6 = 0 \rightarrow V_C = 1/3 \cdot (-M + 6P_1 - 6V_D) = 1/3 \cdot (-9 + 6 \cdot 12 - 6 \cdot 7) = 7 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = -V_B \cdot 3 - M + P_1 \cdot 3 - V_D \cdot 3 = 0 \rightarrow V_B = 1/3 \cdot (-M + 3P_1 - 3V_D) = 1/3 \cdot (-9 + 3 \cdot 12 - 3 \cdot 7) = 2 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_y = -V_B + V_C + V_D - P_1 = -2 + 7 + 7 - 12 = 0$$

Część AB:

$$\sum F_x = H_A - H_B - P_2 \cos 60^\circ = 0 \rightarrow H_A = P_2 \cos 60^\circ + H_B = 7,5 + 0 = 7,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot 4 - M_A + 2 \cdot P_2 \sin 60^\circ = 0 \rightarrow M_A = -4V_B + 2 \cdot P_2 \sin 60^\circ = -4 \cdot 2 + 12,99 \cdot 2 = 17,98 \text{ kNm}$$

$$\sum F_y = V_A + V_B - P_2 \sin 60^\circ = 0 \rightarrow V_A = P_2 \sin 60^\circ - V_B = 12,99 - 2 = 10,99 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = V_A \cdot 4 - M_A - 2 \cdot P_2 \sin 60^\circ = 4 \cdot 10,99 - 17,98 - 2 \cdot 12,99 = 0$$

Wyznaczenie ekstremum:

$$T[x] = V_F - qx = 0 \rightarrow x = V_F/q = 8/6 = 1,33 \text{ m}$$

$$M[x] = V_F \cdot x - q \cdot x^2/2$$

$$M[x = 1,33] = 8 \cdot 1,33 - 6 \cdot 1,33^2/2 = 5,33 \text{ kNm}$$

Przykład 3.

Wyznacz reakcje w poniższej belce. Narysuj wykresy sił wewnętrznych. Policz ewentualne ekstrema.

Wyznaczenie reakcji:

Część BC:

$$\sum F_x = -H_B + H_C + P_1 \cos 45^\circ = 0 \rightarrow H_B = H_C + P_1 \cos 45^\circ$$

$$\sum M_B = -V_C \cdot 4 + P_1 \sin 45^\circ \cdot 2 = 0 \rightarrow V_C = 0,25 \cdot (2P_1 \sin 45^\circ) = 0,25 \cdot 2 \cdot 12,02 = 6,01 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = V_B \cdot 4 - P_1 \sin 45^\circ \cdot 2 = 0 \rightarrow V_B = 0,25 \cdot (2P_1 \sin 45^\circ) = 0,25 \cdot 2 \cdot 12,02 = 6,01 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_y = V_B + V_C - P_1 \sin 45^\circ = 6,01 + 6,01 - 12,02 = 0$$

Część CE:

$$\sum F_x = -H_C + H_E = 0 \rightarrow H_C = H_E$$

$$\sum M_D = q \cdot 5 \cdot 0,5 + V_E \cdot 2 - V_C \cdot 3 = 0 \rightarrow V_E = 0,5(3V_C - 2,5q) = 0,5(3 \cdot 6,01 - 2,5 \cdot 6) = 1,515 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = -V_D \cdot 2 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - V_C \cdot 5 = 0 \rightarrow V_D = 0,5(-5V_C + 12,5q) = 0,5(-5 \cdot 6,01 + 12,5 \cdot 6) = 22,475 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_y = -V_C + 5q - V_D - V_E = -6,01 + 5 \cdot 6 - 22,475 - 1,515 = 0$$

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

Część EG:

$$\sum F_x = -H_E = 0 \rightarrow H_E = 0 \text{ kN} \rightarrow H_C = 0 \text{ kN} \rightarrow H_B = 0 + P_1 \cos 45^\circ = 0 + 12,02 = 12,02 \text{ kN}$$

$$\sum M_F = -V_G \cdot 1 + M_2 + V_E \cdot 1 = 0 \rightarrow V_G = M_2 + 1V_E = 8 + 1 \cdot 1,515 = 9,515 \text{ kN}$$

$$\sum M_G = -V_F \cdot 1 + M_2 + V_E \cdot 2 = 0 \rightarrow V_F = M_2 + 2V_E = 8 + 2 \cdot 1,515 = 11,03 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum F_y = -V_F + V_E + V_G = -11,03 + 1,515 + 9,515 = 0$$

Część AB:

$$\sum F_x = -H_A + H_B = 0 \rightarrow H_A = H_B = 12,02 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 4 - M_A - M_1 = 0 \rightarrow M_A = 4V_B - M_1 = 4 \cdot 6,01 - 4 = 20,04 \text{ kNm}$$

$$\sum F_y = V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = V_B = 6,01 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = V_A \cdot 4 - M_A - M_1 = 4 \cdot 6,01 - 20,04 - 4 = 0$$

Wyznaczenie ekstremum:

$$T[x] = -V_C + qx = 0 \rightarrow x = V_C/q = 6,01/6 = 1 \text{ m}$$

$$M[x] = -V_C \cdot x + q \cdot x^2/2$$

$$M[x = 1] = -6,01 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2/2 = -3,01 \text{ kNm}$$

$$T[x_2] = V_E - qx_2 = 0 \rightarrow x_2 = V_E/q = 1,515/6 = 0,25 \text{ m}$$

$$M[x_2] = -V_E \cdot x_2 + q \cdot x_2^2/2$$

$$M[x = 0,998] = -1,515 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,25^2/2 = -0,19 \text{ kNm}$$

