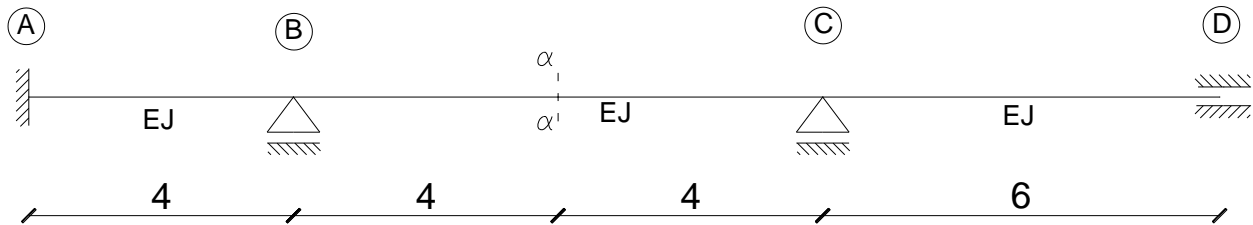
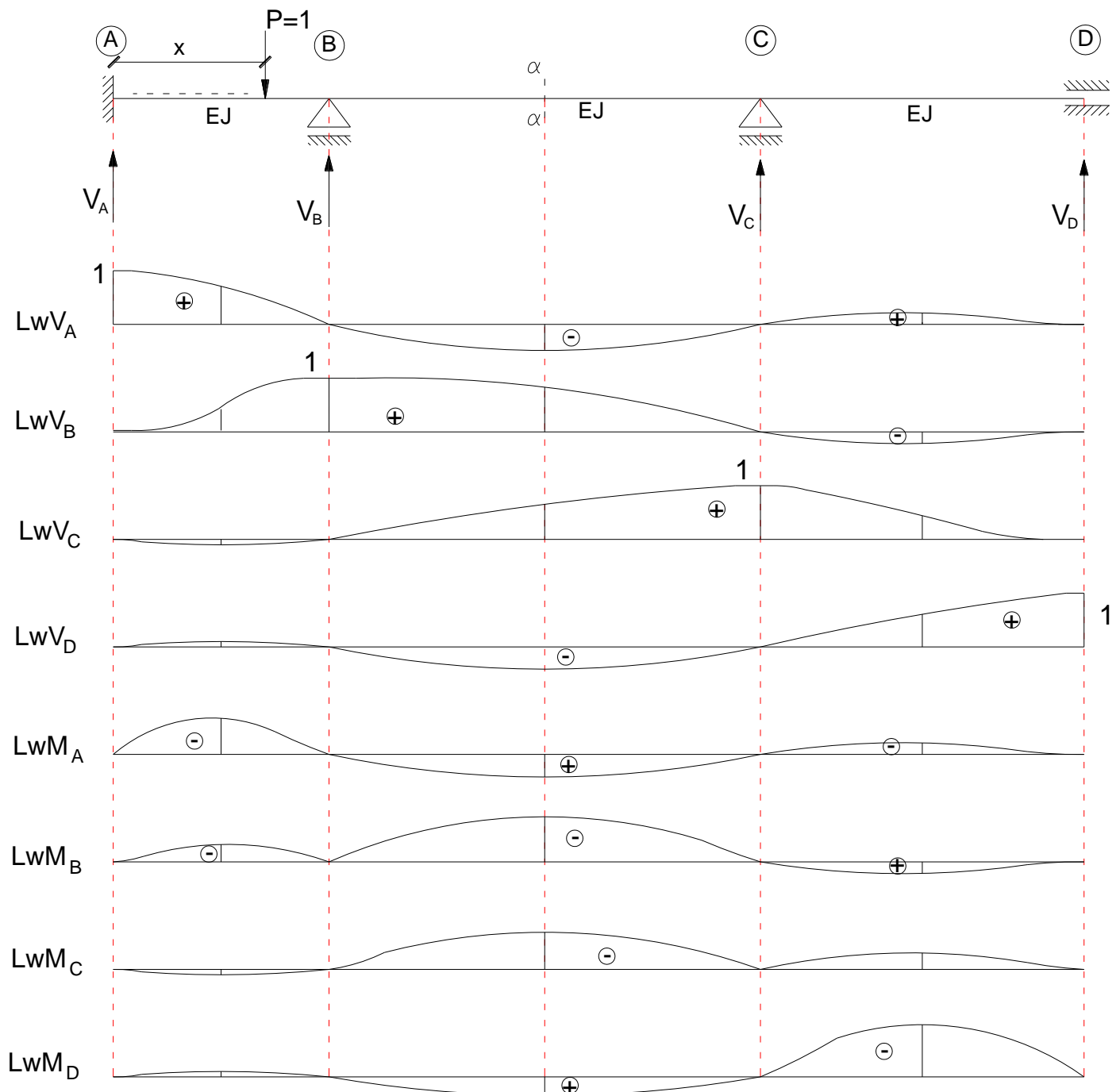


Linie wpływu w belkach statycznie niewyznaczalnych

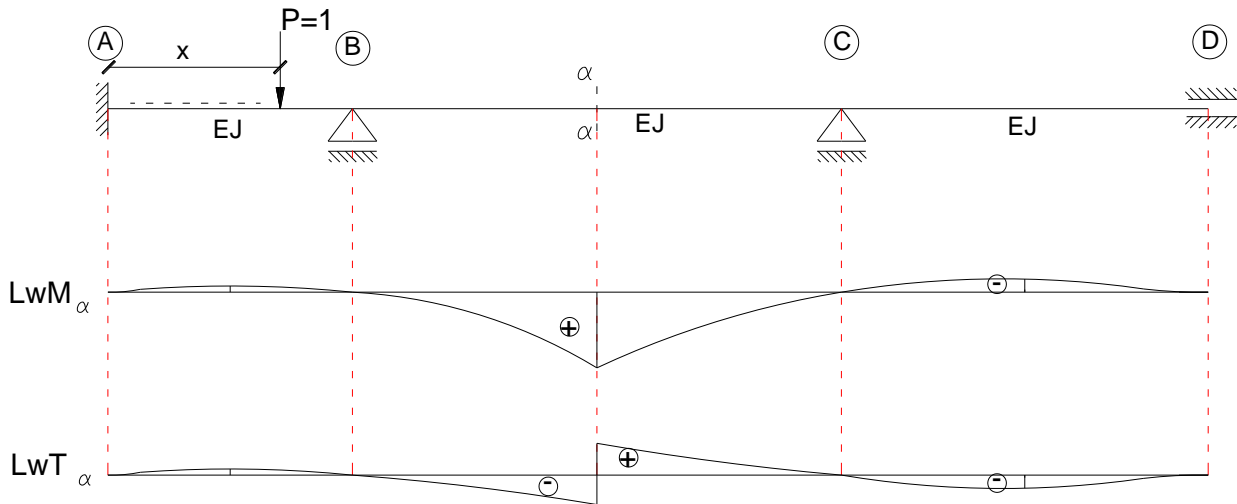
Zadanie 1.: Dla poniższej belki narysuj linie wpływu wszystkich reakcji, momentów podporowych oraz sił tnących i momentów zginających w przekroju $\alpha-\alpha$. Za pomocą metody przemieszczeń wyznaczyć rzędne poszczególnych linii w połowie długości każdego przęsła.



1. Szkice linii wpływowych reakcji i momentów podporowych:

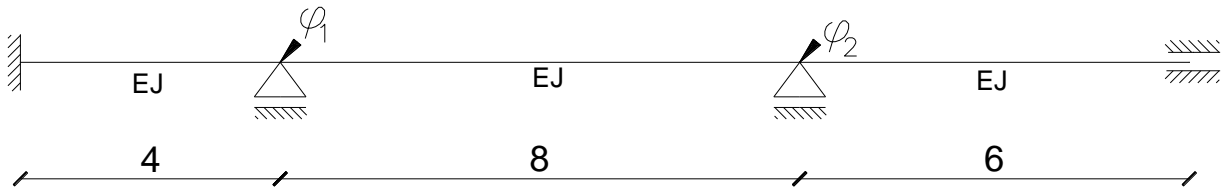


2. Szkice linii wpływowych sił tnących i momentów zginających w przekroju $\alpha - \alpha$.

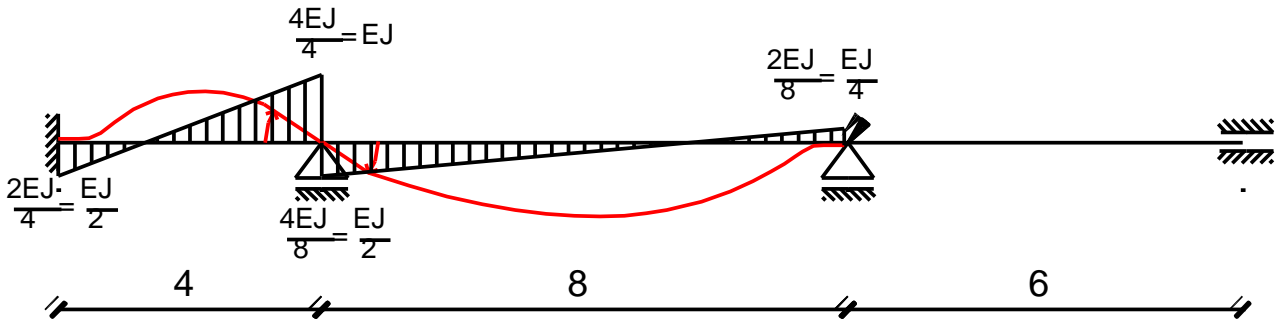


3. Wyznaczenie rzędnych poszczególnych linii wpływu w połowie długości przęsła AB

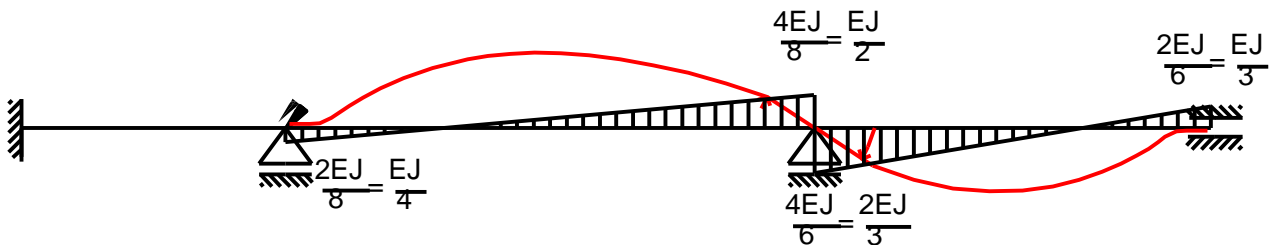
- Schemat podstawowy geometrycznie wyznaczalny (wstawiamy blokady obrotu):



- stan $\varphi_1=1$:



- stan $\varphi_2=1$:



- obciążenie siłą skupioną w połowie przęsła AB



Układ równań metody przemieszczeń:

$$\begin{cases} k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{10} = 0 \\ k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{20} = 0 \end{cases}$$

Wyznaczenie współczynników układu:

$$k_{11} = EJ + \frac{EJ}{2} = \frac{3EJ}{2}$$

$$k_{12} = \frac{EJ}{4} = k_{21}$$

$$k_{22} = \frac{EJ}{2} + \frac{2EJ}{3} = \frac{7EJ}{6}$$

$$k_{10} = \frac{1}{2}$$

$$k_{20} = 0$$

Podstawienie współczynników do układu:

$$\begin{cases} \frac{3EJ}{2} \cdot \varphi_1 + \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_1 + \frac{7EJ}{6} \cdot \varphi_2 + 0 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\frac{28}{81EJ} \\ \varphi_2 = \frac{2}{27EJ} \end{cases}$$

Ostateczny wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:

Wykres momentów w poszczególnych punktach wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$M_i = M_i^{\varphi_1=1} \cdot \varphi_1 + M_i^{\varphi_2=1} \cdot \varphi_2 + M_{0i}$$

Przy obliczaniu momentów przyjęto następujące znaki: moment rozciągający włókna dolne "+", moment rozciągający włókna górne "-":

$$M_A = \frac{EJ}{2} \cdot \left(-\frac{28}{81EJ}\right) + 0 \cdot \frac{2}{27EJ} - \frac{1}{2} = -0,673$$

$$M_{B_L} = -EJ \cdot \left(-\frac{28}{81EJ}\right) + 0 \cdot \frac{2}{27EJ} - \frac{1}{2} = -0,154$$

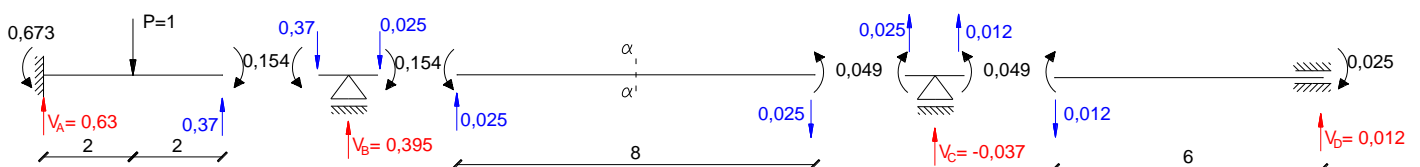
$$M_{B_P} = \frac{EJ}{2} \cdot \left(-\frac{28}{81EJ}\right) + \frac{EJ}{4} \cdot \frac{2}{27EJ} = -0,154$$

$$M_{C_L} = -\frac{EJ}{4} \cdot \left(-\frac{28}{81EJ}\right) - \frac{EJ}{2} \cdot \frac{2}{27EJ} = 0,049$$

$$M_{C_P} = 0 \cdot \left(-\frac{28}{81EJ}\right) + \frac{2EJ}{3} \cdot \frac{2}{27EJ} = 0,049$$

$$M_D = 0 \cdot \left(-\frac{28}{81EJ}\right) - \frac{EJ}{3} \cdot \frac{2}{27EJ} = -0,025$$

Wyznaczenie wartości sił tnących - rozcinamy układ i zaczepiamy wyznaczone momenty w poszczególnych punktach. Z warunków równowagi dla wyciętych przęseł wyznaczamy wartości sił tnących i reakcji.

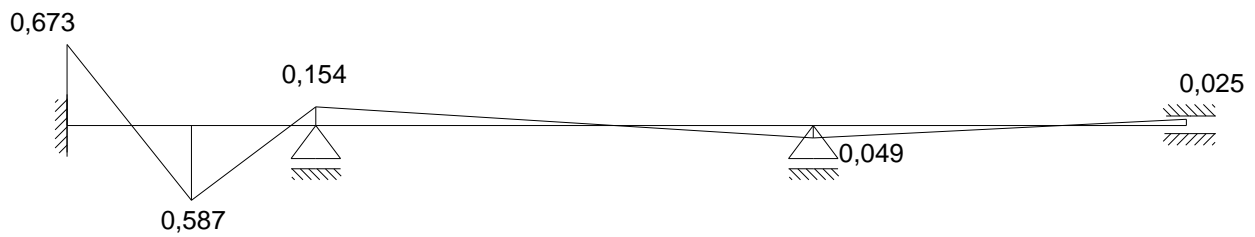


Wyznaczenie siły tnącej i momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$

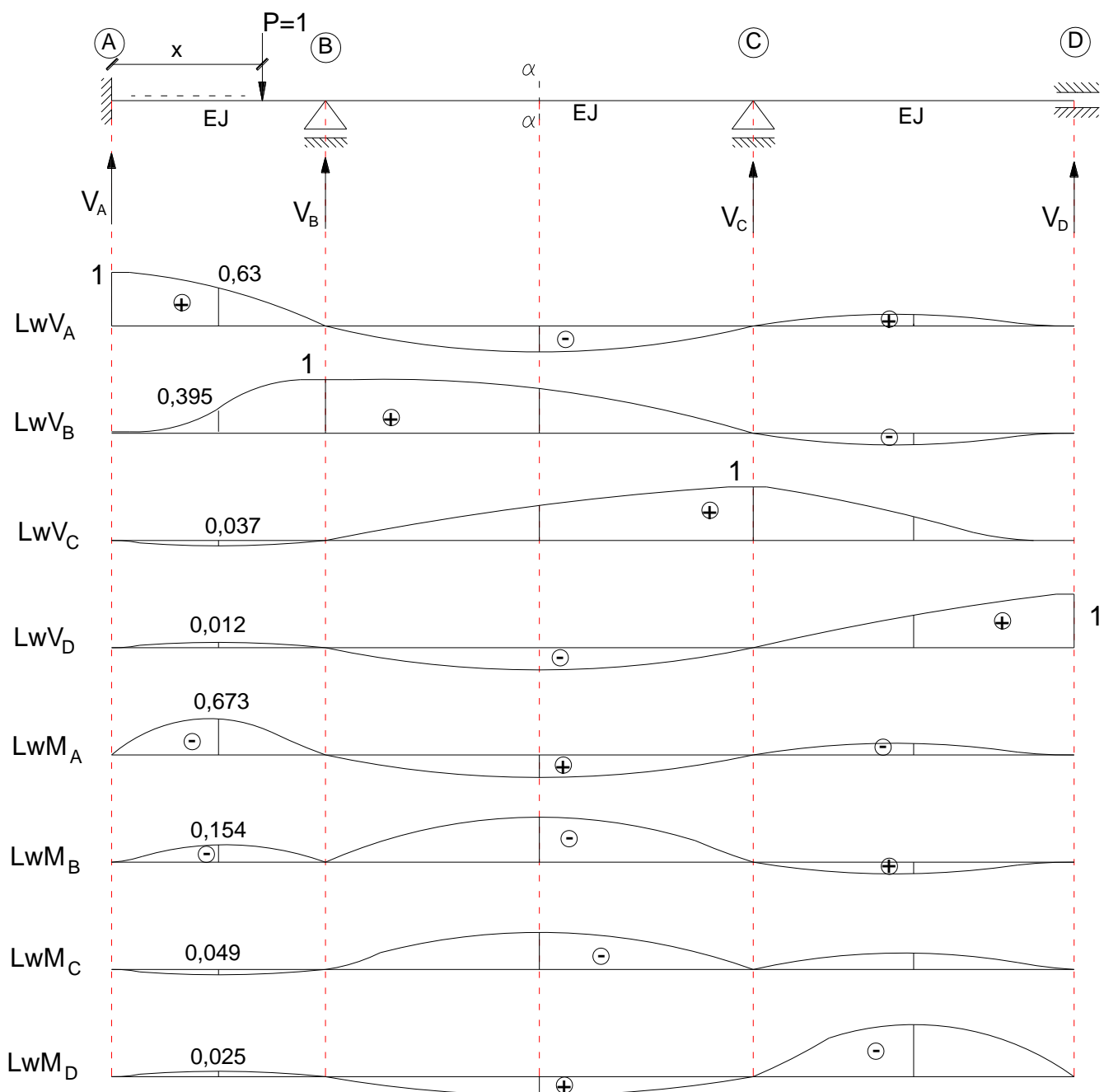
$$T_{\alpha} = 0,025$$

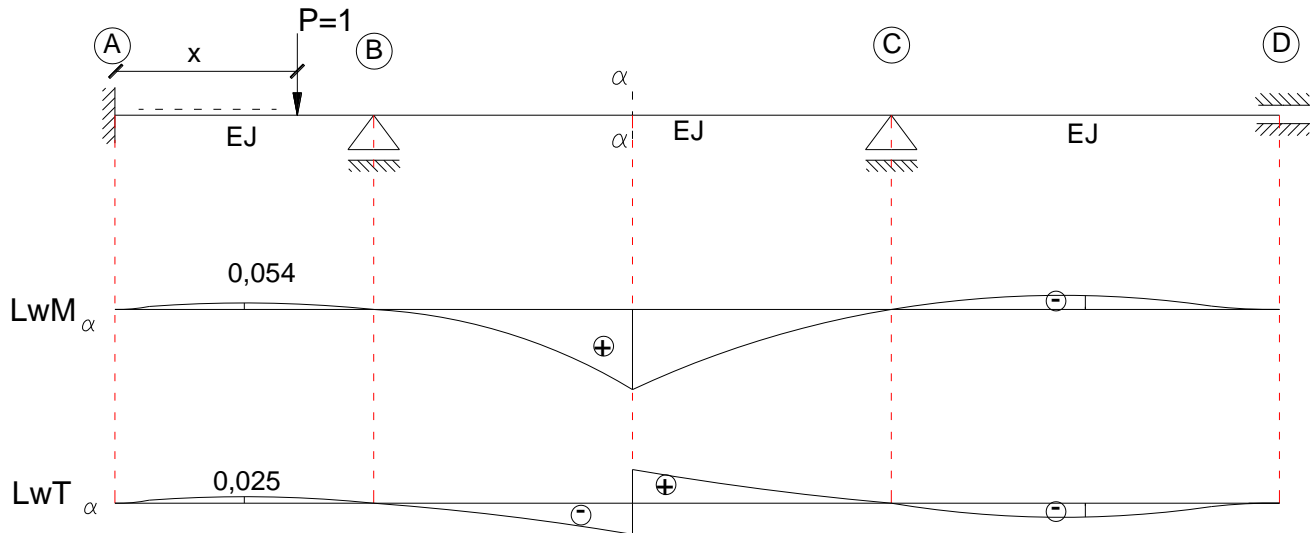
$$M_{\alpha} = -0,154 + 0,025 \cdot 4 = -0,054$$

Wykres momentów od siły przyłożonej w połowie długości przęsła AB



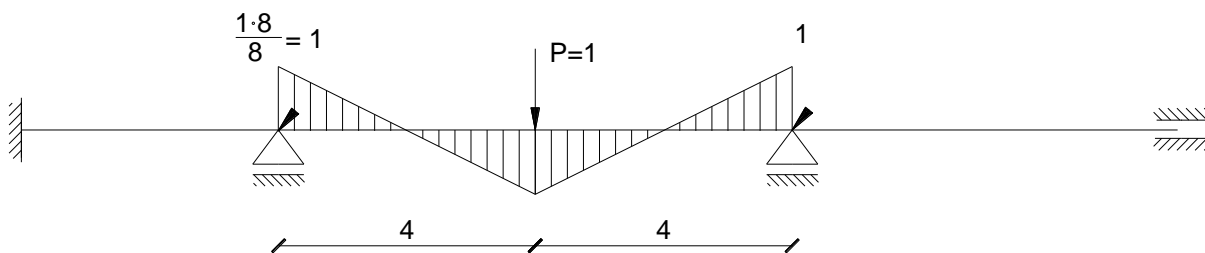
Otrzymane wartości reakcji, momentów i siły tnącej są rzędnymi na odpowiednich liniach wpływu w połowie długości przęsła AB





4. Wyznaczenie rzędnych poszczególnych linii wpływu w połowie długości przęsła BC

Wykresy jednostkowe od kątów obrotu są identyczne, więc dla uproszczenia prezentacji je pominięto.
-Obciążenie siłą skupioną w połowie przęsła BC



Wyznaczenie współczynników od obciążenia zewnętrznego:

$$k_{10} = -1$$

$$k_{20} = 1$$

Podstawienie współczynników do układu:

$$\begin{cases} \frac{3EJ}{2} \cdot \varphi_1 + \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_2 - 1 = 0 \\ \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_1 + \frac{7EJ}{6} \cdot \varphi_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{0,840}{EJ} \\ \varphi_2 = -\frac{28}{27EJ} \end{cases}$$

Wyznaczenie wartości momentów w poszczególnych punktach:

$$M_A = \frac{EJ}{2} \cdot \left(\frac{0,840}{EJ} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{28}{27EJ} \right) + 0 = 0,420$$

$$M_{B_L} = -EJ \cdot \left(\frac{0,840}{EJ} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{28}{27EJ} \right) + 0 = -0,840$$

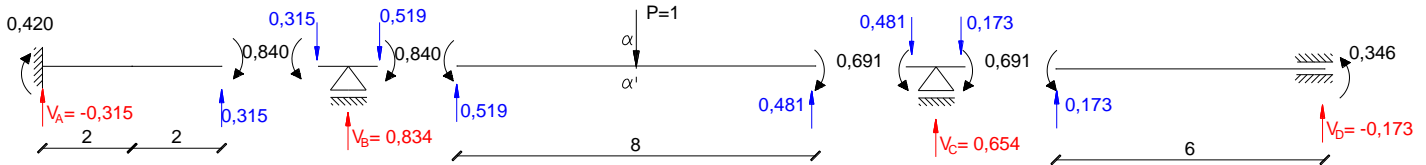
$$M_{B_p} = \frac{EJ}{2} \cdot \left(\frac{0,840}{EJ} \right) + \frac{EJ}{4} \cdot \left(-\frac{28}{27EJ} \right) - 1 = -0,840$$

$$M_{C_L} = -\frac{EJ}{4} \cdot \left(\frac{0,840}{EJ} \right) - \frac{EJ}{2} \cdot \left(-\frac{28}{27EJ} \right) - 1 = -0,691$$

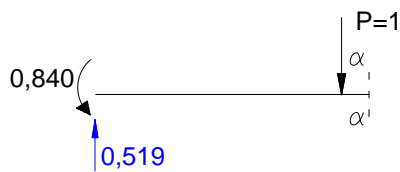
$$M_{C_p} = 0 \cdot \left(\frac{0,840}{EJ} \right) + \frac{2EJ}{3} \cdot \left(-\frac{28}{27EJ} \right) = -0,691$$

$$M_D = 0 \cdot \left(\frac{0,840}{EJ} \right) - \frac{EJ}{3} \cdot \left(-\frac{28}{27EJ} \right) = 0,346$$

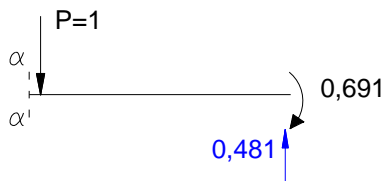
Wyznaczenie wartości sił tnących



Wyznaczenie siły tnącej i momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$



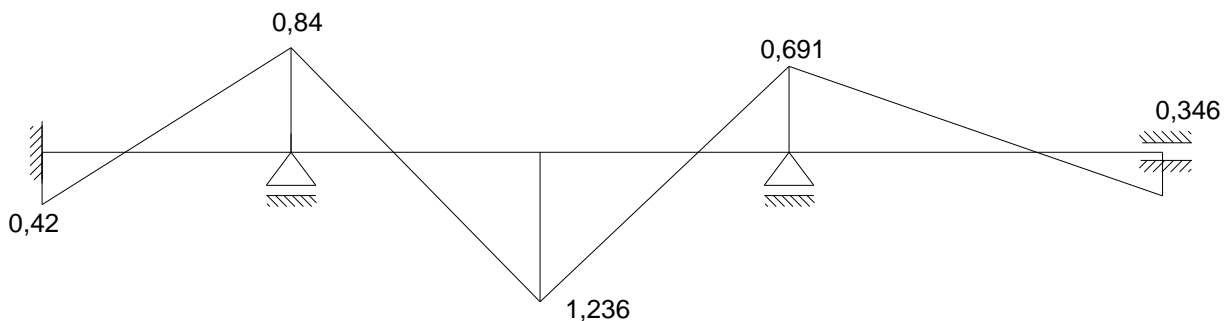
$T_{\alpha L} = 0,519 - 1 = -0,481 \rightarrow$ wartość siły tnącej nieskończenie blisko przekroju $\alpha - \alpha$, dla siły P znajdującej się po lewej stronie przekroju



$T_{\alpha P} = 1 - 0,481 = 0,519 \rightarrow$ wartość siły tnącej nieskończenie blisko przekroju $\alpha - \alpha$, dla siły P znajdującej się po prawej stronie przekroju

$$M_{\alpha} = -0,84 + 0,519 \cdot 4 = 1,236$$

Wykres momentów od siły przyłożonej w połowie długości przęsła BC



Otrzymane wartości reakcji, momentów i sił tnących są rzędnymi na odpowiednich liniach wpływu w połowie długości przęsła BC.

5. Wyznaczenie rzędnych poszczególnych linii wpływu w połowie długości przęsła CD

Wykresy jednostkowe od kątów obrotu są identyczne, więc dla uproszczenia prezentacji je pominięto.

-Obciążenie siłą skupioną w połowie przęsła CD



Wyznaczenie współczynników od obciążenia zewnętrznego:

$$k_{10} = 0$$

$$k_{20} = -\frac{3}{4}$$

Podstawienie współczynników do układu:

$$\begin{cases} \frac{3EJ}{2} \cdot \varphi_1 + \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_2 + 0 = 0 \\ \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_1 + \frac{7EJ}{6} \cdot \varphi_2 - \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\frac{1}{9EJ} \\ \varphi_2 = \frac{2}{3EJ} \end{cases}$$

Wyznaczenie wartości momentów w poszczególnych punktach:

$$M_A = \frac{EJ}{2} \cdot \left(-\frac{1}{9EJ}\right) + 0 \cdot \left(\frac{2}{3EJ}\right) + 0 = -0,056$$

$$M_{B_L} = -EJ \cdot \left(-\frac{1}{9EJ}\right) + 0 \cdot \left(\frac{2}{3EJ}\right) + 0 = 0,111$$

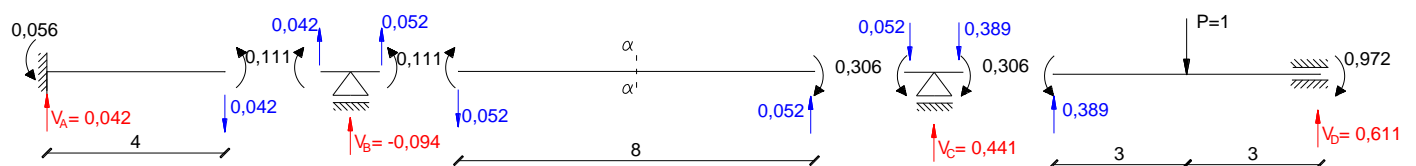
$$M_{B_p} = \frac{EJ}{2} \cdot \left(-\frac{1}{9EJ}\right) + \frac{EJ}{4} \cdot \left(\frac{2}{3EJ}\right) + 0 = 0,111$$

$$M_{C_L} = -\frac{EJ}{4} \cdot \left(-\frac{1}{9EJ}\right) - \frac{EJ}{2} \cdot \left(\frac{2}{3EJ}\right) + 0 = -0,306$$

$$M_{C_p} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{9EJ}\right) + \frac{2EJ}{3} \cdot \left(\frac{2}{3EJ}\right) - \frac{3}{4} = -0,306$$

$$M_D = 0 \cdot \left(-\frac{1}{9EJ}\right) - \frac{EJ}{3} \cdot \left(\frac{2}{3EJ}\right) - \frac{3}{4} = -0,972$$

Wyznaczenie wartości sił tnących

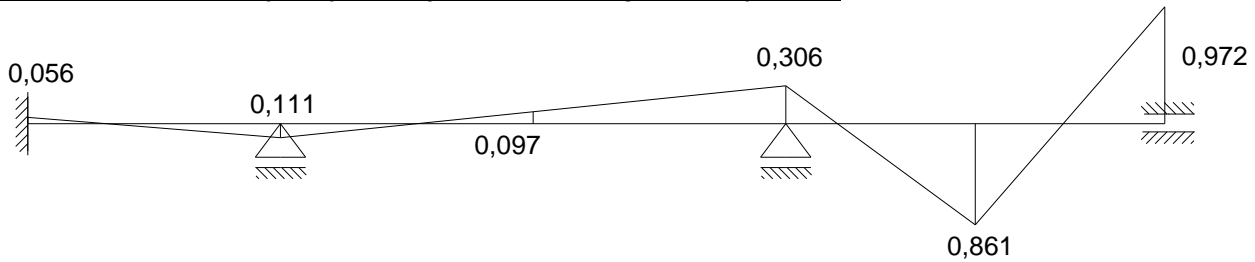


Wyznaczenie siły tnącej i momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$

$$T_{\alpha P} = -0,052$$

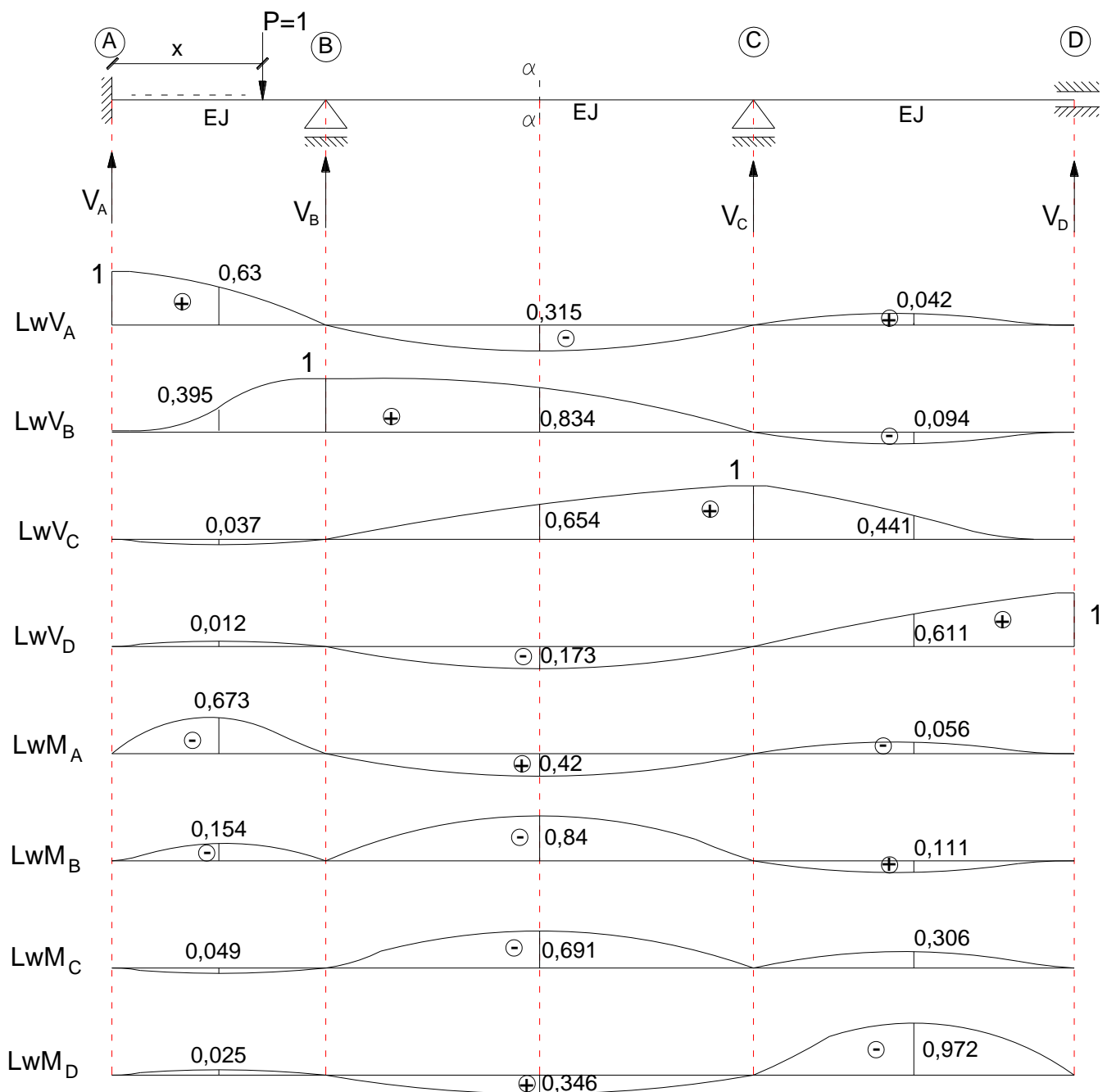
$$M_{\alpha} = 0,111 - 0,052 \cdot 4 = -0,097$$

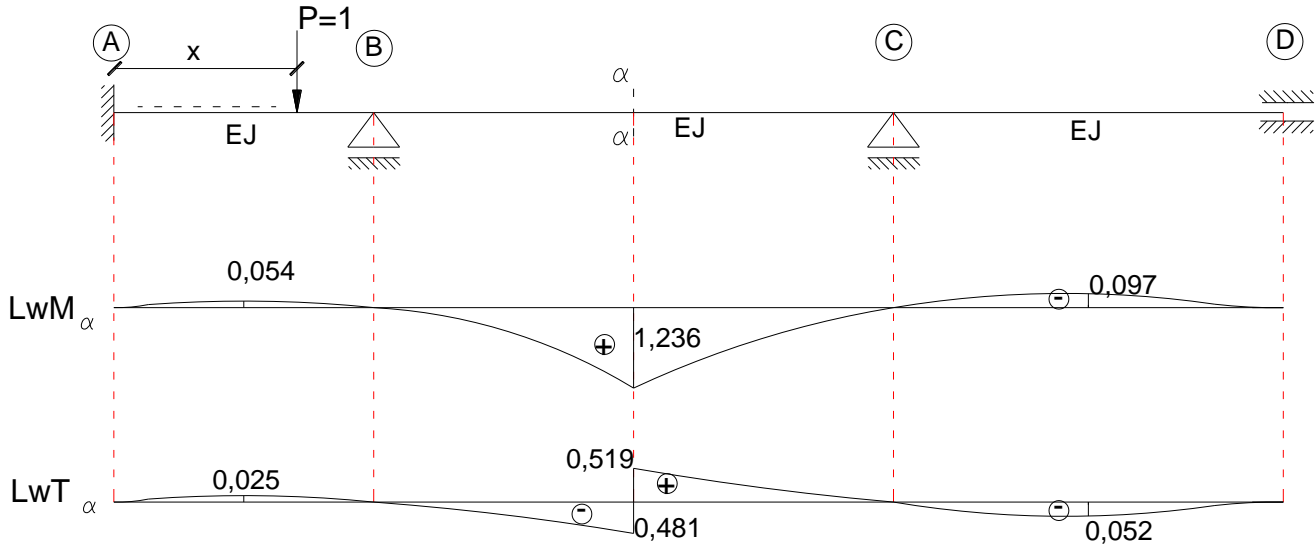
Wykres momentów od siły przyłożonej w połowie długości przęsła BC



Otrzymane wartości reakcji, momentów i sił tnących są rzędnymi na odpowiednich liniach wpływu w połowie długości przęsła CD.

Wykresy linii wpływu uzupełnione o wartości rzędnych policzone w punktach 4 i 5:

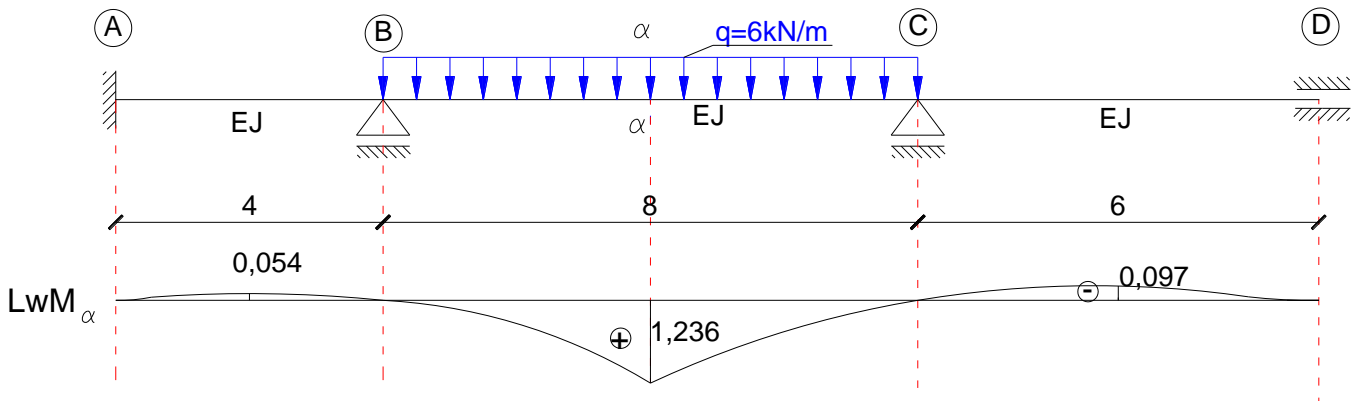




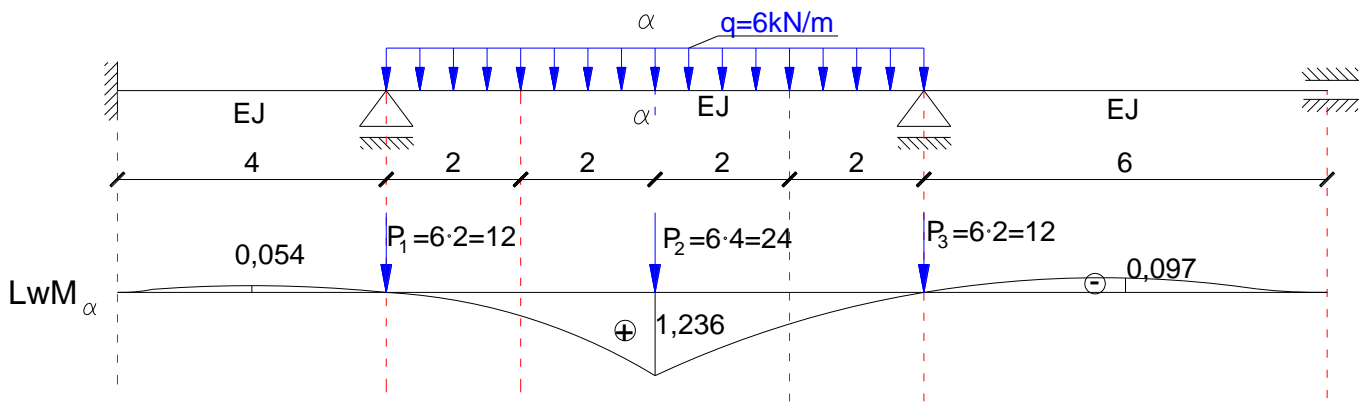
Zadanie 2: Na podstawie linii wpływu M_α z zadania 1-go, oszacować wartość ekstremalnego momentu w zadanym przekroju od obciążenia użytkowego $p=6kN/m$ i porównać z rzeczywistą wartością momentu od tego obciążenia.

1) Wyznaczenie maksymalnego momentu w przekroju $\alpha-\alpha$ rozciągającego włókna dolne.

Obciążamy dodatnie pole linii wpływu obciążeniem użytkowym:



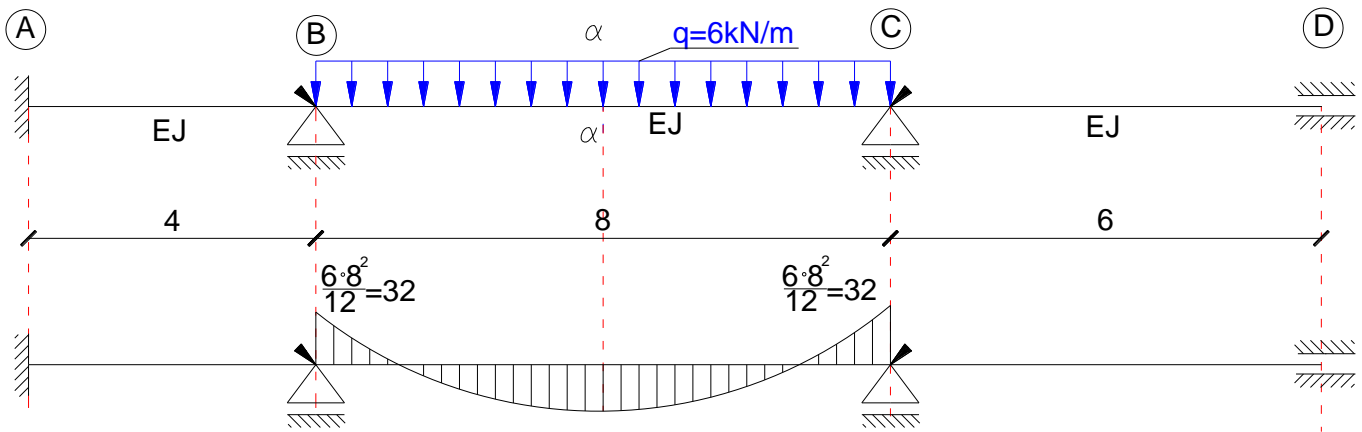
- oszacowanie wartości momentu - sprowadzamy obciążenie do sił skupionych nad wyznaczonymi rzędnymi linii wpływu i nad podporami:



$$M_{\alpha \max(+)} = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot 1,236 + P_3 \cdot 0 = 24 \cdot 1,236 = 29,66 kNm$$

- wyznaczenie dokładnej wartości momentu - wykorzystanie metody przemieszczeń.

Wykresy od jednostkowych kątów obrotu są takie same jak w zadaniu 1. Obciążenie zewnętrzne - obciążenie użytkowe na środkowym przęśle:



Wyznaczenie współczynników od obciążenia zewnętrznego:

$$k_{10} = -32$$

$$k_{20} = 32$$

Podstawienie współczynników do układu:

$$\begin{cases} \frac{3EJ}{2} \cdot \varphi_1 + \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_2 - 32 = 0 \\ \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_1 + \frac{7EJ}{6} \cdot \varphi_2 + 32 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

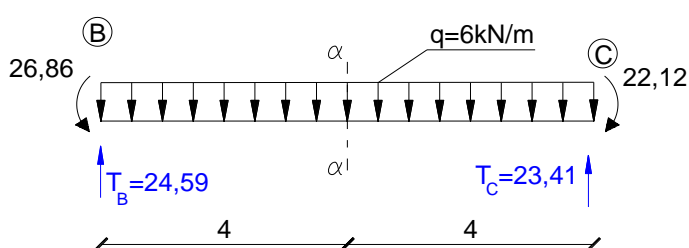
$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{26,86}{EJ} \\ \varphi_2 = -\frac{33,19}{EJ} \end{cases}$$

Wyznaczenie wartości momentów na końcach przęsła BC w poszczególnych punktach:

$$M_{B_p} = \frac{EJ}{2} \cdot \left(\frac{26,86}{EJ} \right) + \frac{EJ}{4} \cdot \left(-\frac{33,19}{EJ} \right) - 32 = -26,87 \text{ kNm}$$

$$M_{C_l} = -\frac{EJ}{4} \cdot \left(\frac{26,86}{EJ} \right) - \frac{EJ}{2} \cdot \left(-\frac{33,19}{EJ} \right) - 32 = -22,12 \text{ kNm}$$

Wyznaczenie sił tnących na podstawie obliczonych momentów:



$$\sum M_C = -26,86 + 22,12 - 6 \cdot 8 \cdot 4 + T_B \cdot 8 = 0$$

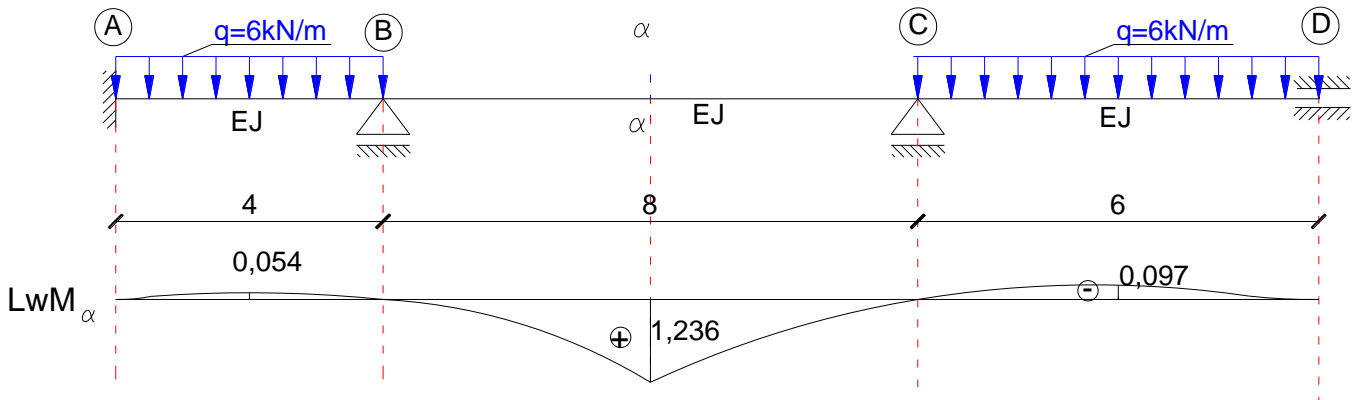
$$T_B = 24,59 \text{ kN}$$

$$\sum R_Y = 24,59 - 6 \cdot 8 + T_C = 0 \rightarrow T_C = 23,41 \text{ kN}$$

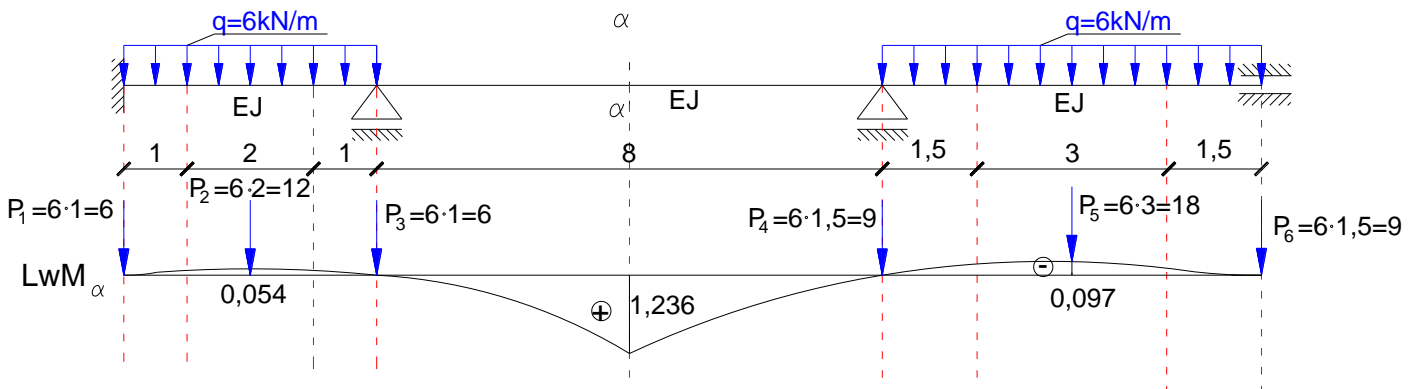
$$M_{\alpha_{\max(+)}} = -26,86 - 6 \cdot 4 \cdot 2 + 24,59 \cdot 4 = 23,5 \text{ kNm} - \text{wartość dokładna max. momentu rozciągającego włókna dolne w przekroju } \alpha - \alpha.$$

2) Wyznaczenie maksymalnego momentu w przekroju $\alpha - \alpha$ rozciągającego włókna górne.

Obciążamy ujemne pole linii wpływu obciążeniem użytkowym:



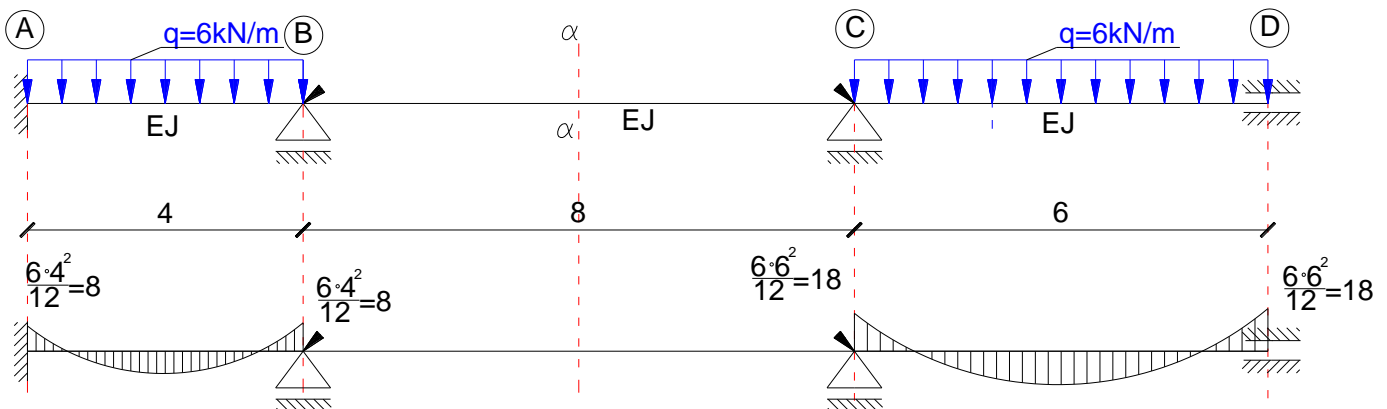
- oszacowanie wartości momentu - sprowadzamy obciążenie do sił skupionych nad wyznaczonymi rzędnymi linii wpływu i nad podporami:



$$M_{\alpha \min(-)} = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot (-0,054) + P_3 \cdot 0 + P_4 \cdot 0 + P_5 \cdot (-0,097) + P_6 \cdot 0 = 12 \cdot (-0,054) + 18 \cdot (-0,097) = -2,39 \text{ kNm}$$

- wyznaczenie dokładnej wartości momentu - wykorzystanie metody przemieszczeń.

Wykresy od jednostkowych kątów obrotu są takie same jak w zadaniu 1. Obciążenie zewnętrzne - obciążenie użytkowe na skrajnych przęsłach:



Wyznaczenie współczynników od obciążenia zewnętrznego:

$$k_{10} = 8$$

$$k_{20} = -18$$

Podstawienie współczynników do układu:

$$\begin{cases} \frac{3EJ}{2} \cdot \varphi_1 + \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_2 + 8 = 0 \\ \frac{EJ}{4} \cdot \varphi_1 + \frac{7EJ}{6} \cdot \varphi_2 - 18 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{-8,198}{EJ} \\ \varphi_2 = \frac{17,185}{EJ} \end{cases}$$

Wyznaczenie wartości momentów na końcach przęsła BC w poszczególnych punktach:

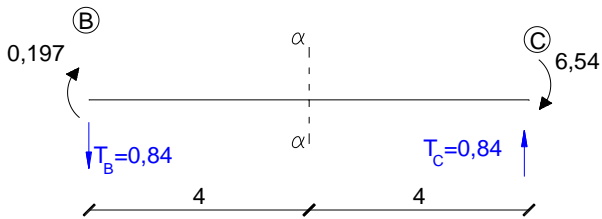
$$M_{B_p} = \frac{EJ}{2} \cdot \left(\frac{-8,198}{EJ} \right) + \frac{EJ}{4} \cdot \left(\frac{17,185}{EJ} \right) + 0 = 0,197 \text{ kNm}$$

$$M_{C_L} = -\frac{EJ}{4} \cdot \left(\frac{-8,198}{EJ} \right) - \frac{EJ}{2} \cdot \left(\frac{17,185}{EJ} \right) + 0 = -6,54 \text{ kNm}$$

Wyznaczenie sił tnących na podstawie obliczonych momentów:

$$\sum M_C = 0,197 + 6,54 - T_B \cdot 8 = 0$$

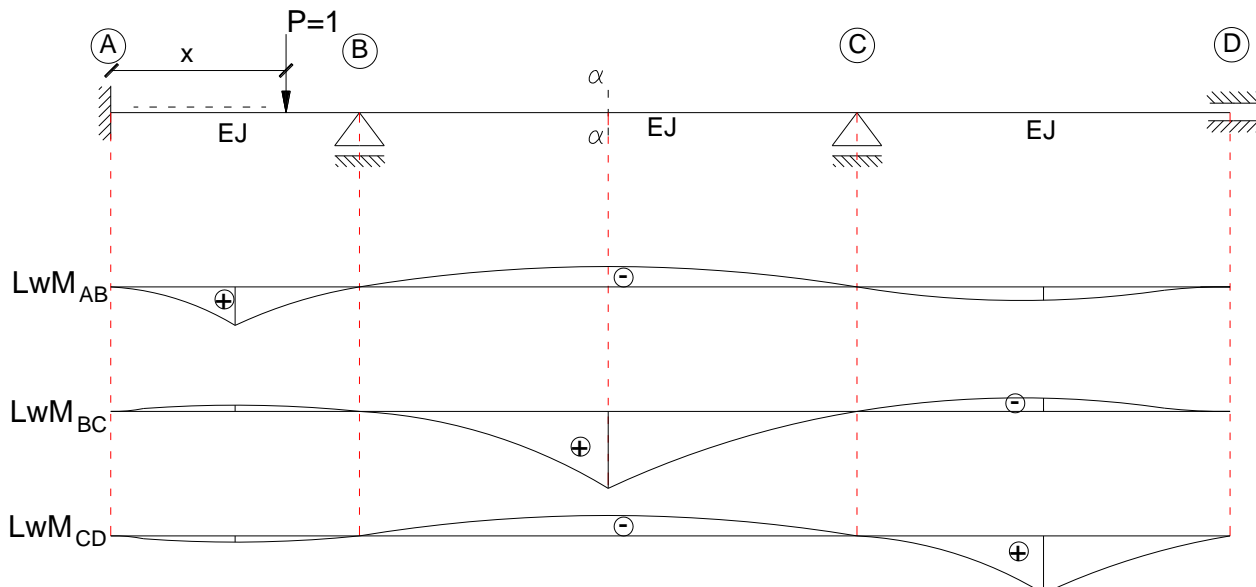
$$T_B = 0,84 \text{ kN}$$



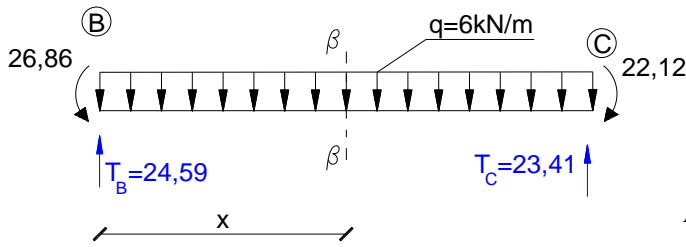
$M_{\alpha \min(-)} = 0,197 - 0,84 \cdot 4 = -3,16 \text{ kNm}$ - wartość dokładna max. momentu rozciągającego włókna górne w przekroju $\alpha - \alpha$.

Zadanie 3. Wyznaczyć maksymalny moment przęsłowy od obciążenia użytkowego 6 kN/m .

Szkice Linii wpływowych momentów zginających w poszczególnych przęsłach:



Analizując powyższe linie widać, że obciążenie środkowego przęsła powinno dać maksymalny moment na przęśle BC. Ponieważ jest to ta sama belka, wystarczy wykorzystać dane z zadania 2-go pkt.1). Celem zadania jest wyznaczenie maksymalnego momentu na przęśle, więc wyznaczenie ekstremum:



$$T(x) = 24,59 - 6x = 0 \rightarrow x = 4,1m$$

$$M(x = 4,1m) = -26,86 - 6 \cdot \frac{4,1^2}{2} + 24,59 \cdot 4,1 = 23,53kNm$$

Aby uzyskać maksymalny moment na dwóch pozostałych przęsłach, obciążamy dodatkowo pola linii wpływu, czyli przęsła skrajne. Wykorzystując dane z z zadania 2-go pkt.2):

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{-8,198}{EJ} \\ \varphi_2 = \frac{17,185}{EJ} \end{cases}$$

$$M_{B_p} = 0,197kNm$$

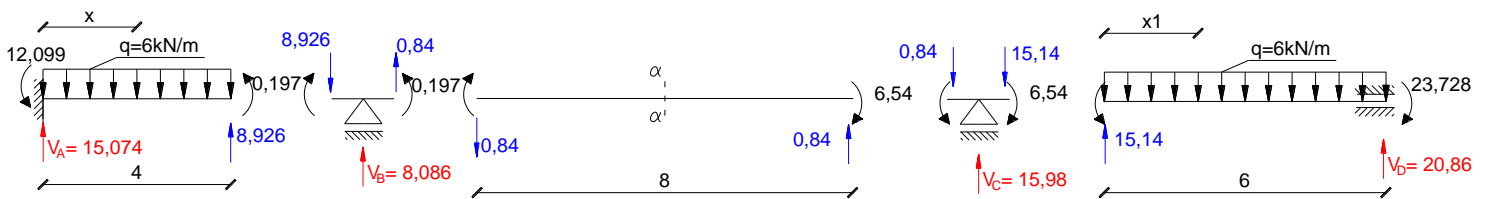
$$M_{C_l} = -6,54kNm$$

Wyznaczenie brakujących momentów na podporach A i D:

$$M_A = \frac{EJ}{2} \cdot \left(\frac{-8,198}{EJ} \right) + 0 \cdot \left(\frac{17,185}{EJ} \right) - 8 = -12,099kNm$$

$$M_D = 0 \cdot \left(\frac{8,198}{EJ} \right) - \frac{EJ}{3} \cdot \left(\frac{17,185}{EJ} \right) - 18 = -23,728kNm$$

Wyznaczenie wartości sił tnących



Wyznaczenie ekstremum na przęśle AB:

$$T(x) = 15,074 - 6x = 0 \rightarrow x = 2,51m$$

$$M(x = 2,51m) = -12,099 - 6 \cdot \frac{2,51^2}{2} + 15,074 \cdot 2,51 = 6,84kNm$$

Wyznaczenie ekstremum na przęśle CD:

$$T(x_1) = 15,14 - 6x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 2,52m$$

$$M(x_1 = 2,52m) = -6,54 - 6 \cdot \frac{2,52^2}{2} + 15,14 \cdot 2,52 = 12,56kNm$$

Maksymalny moment przęsłowy wystąpi na przęśle BC o wartości 23,53kNm.