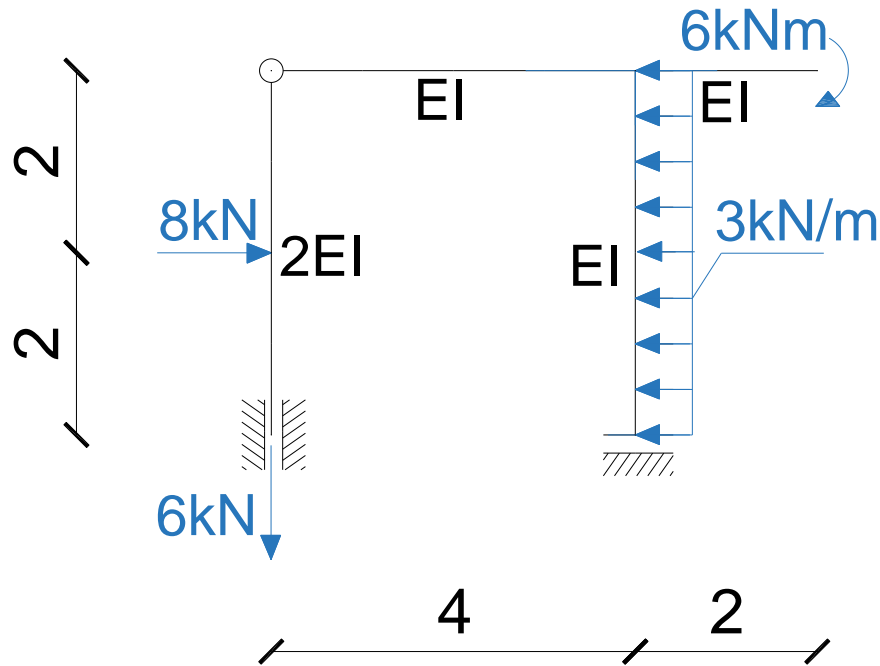
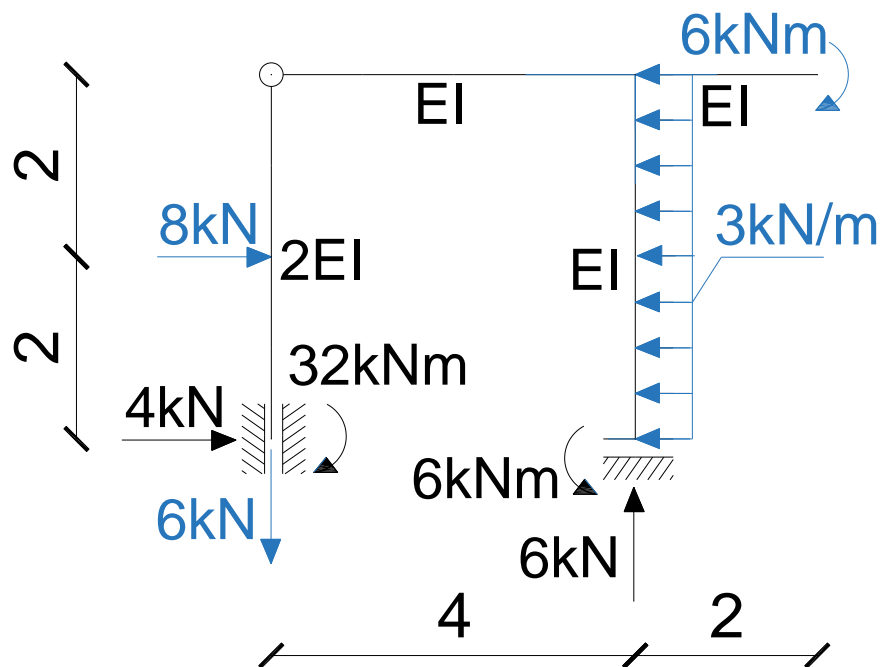


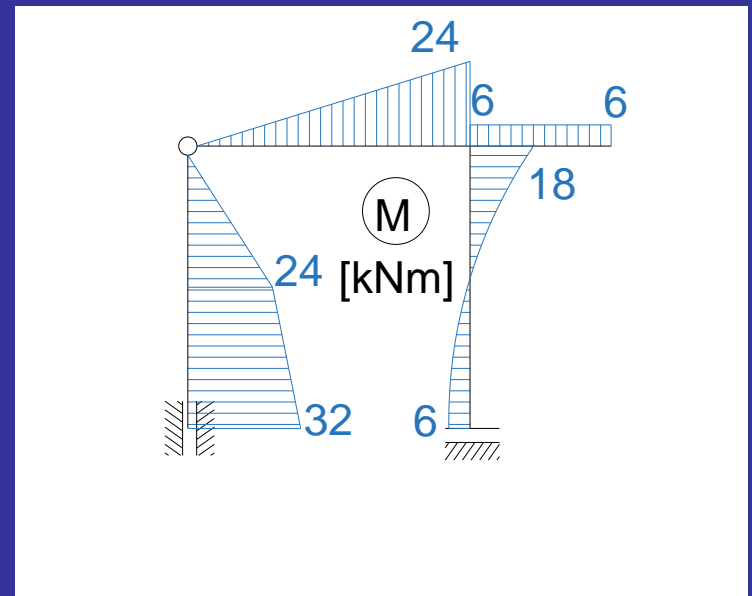
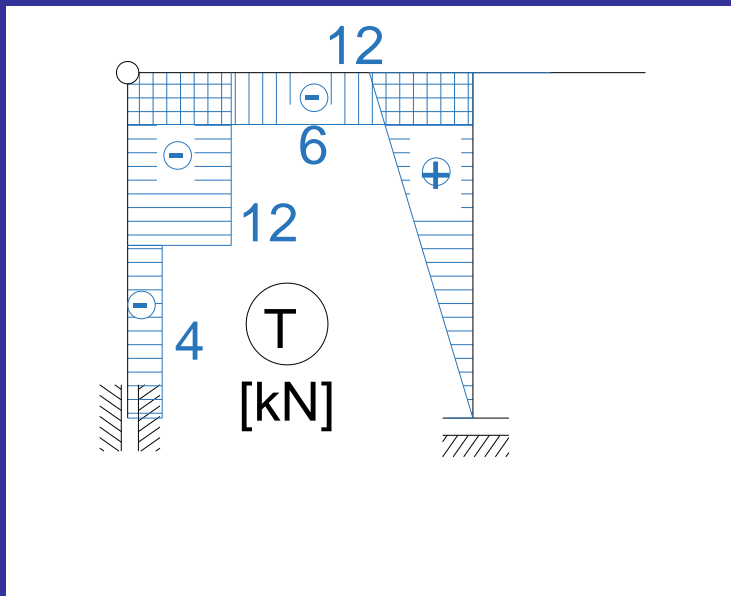
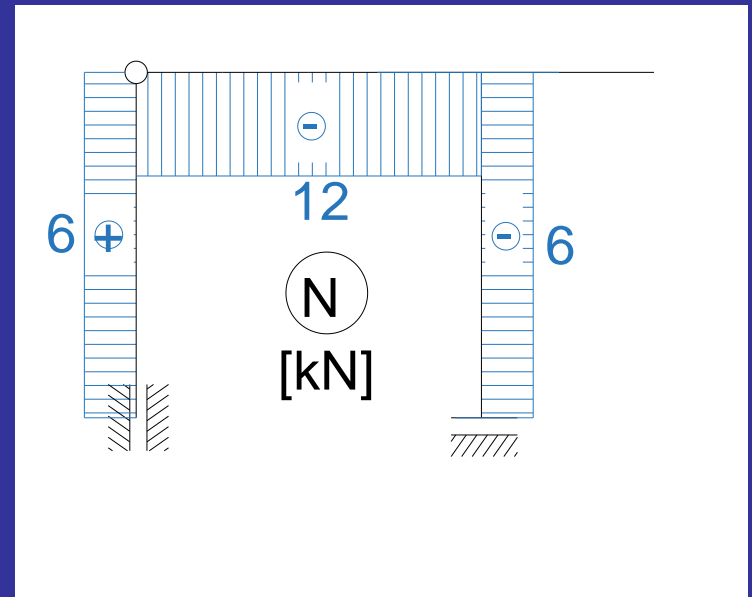
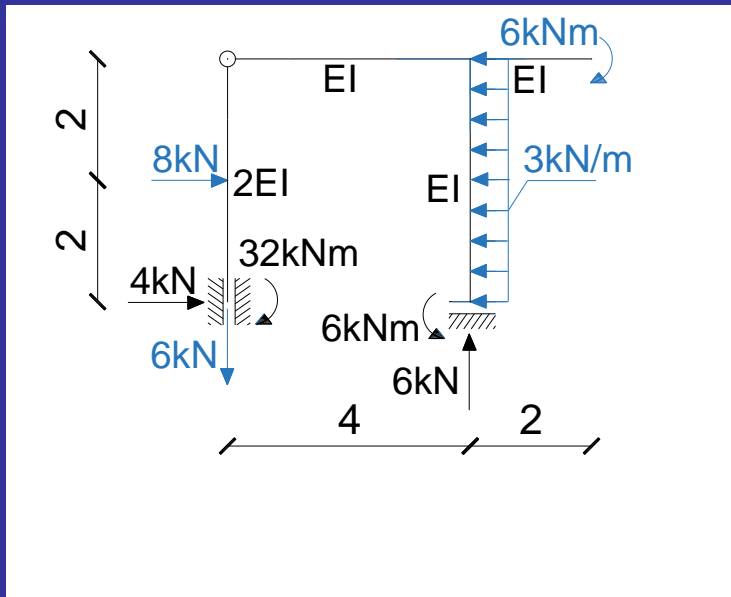
# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



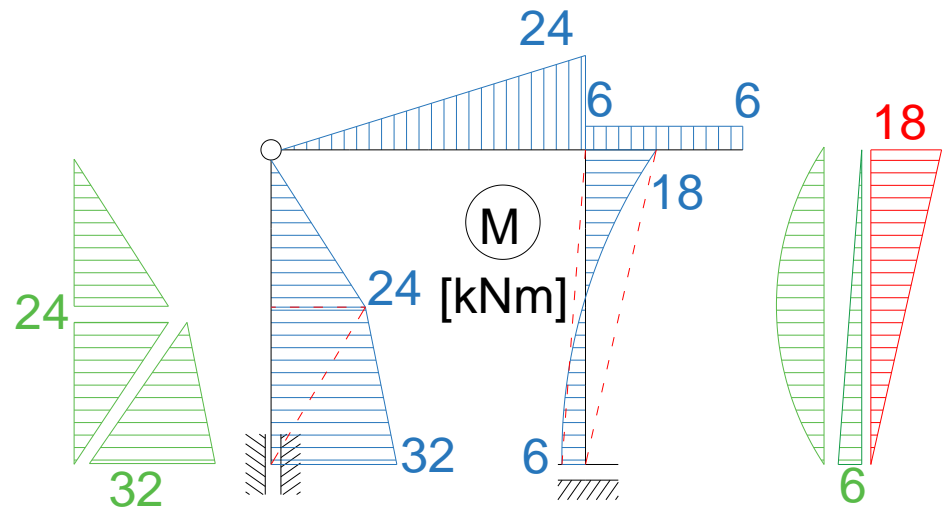
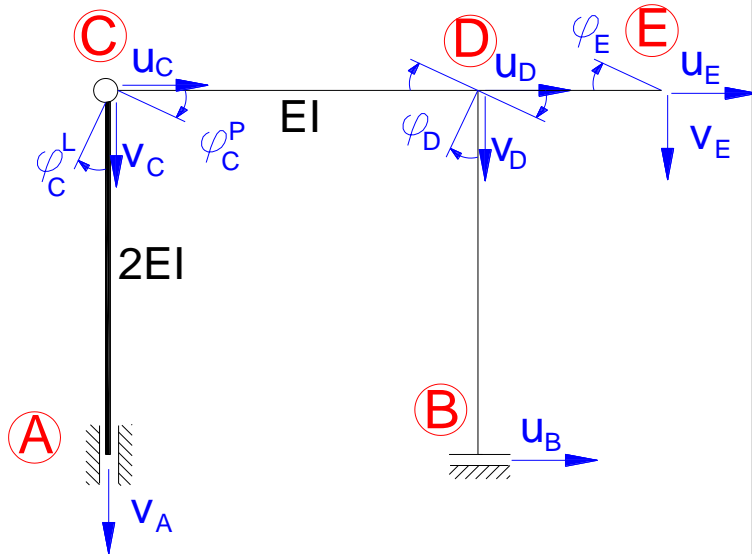
# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



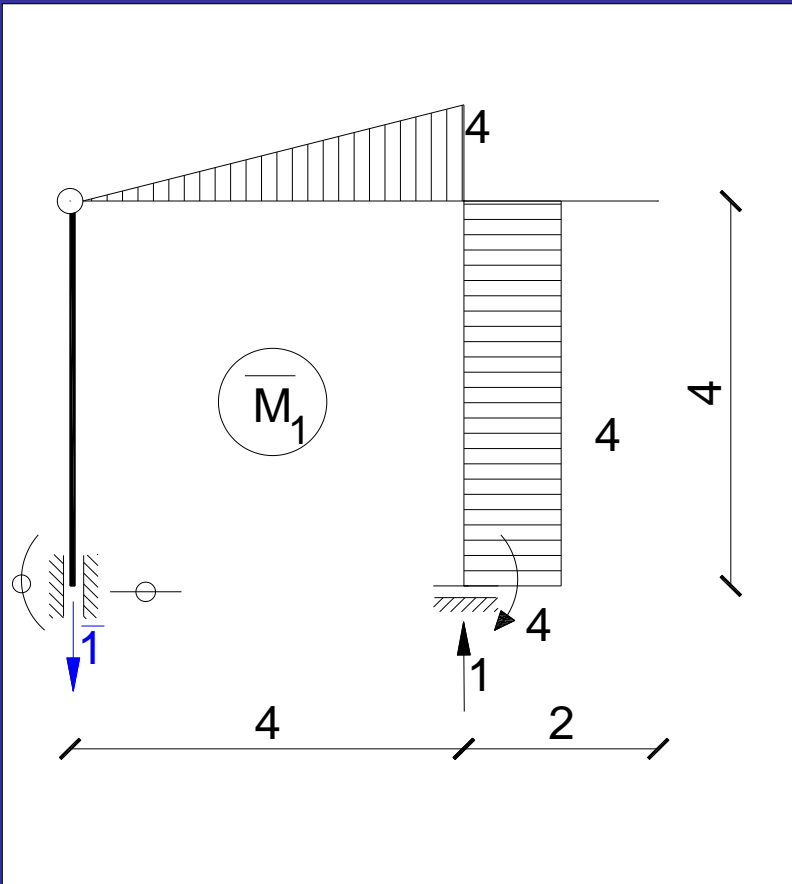
# Wykresy sił wewnętrznych:



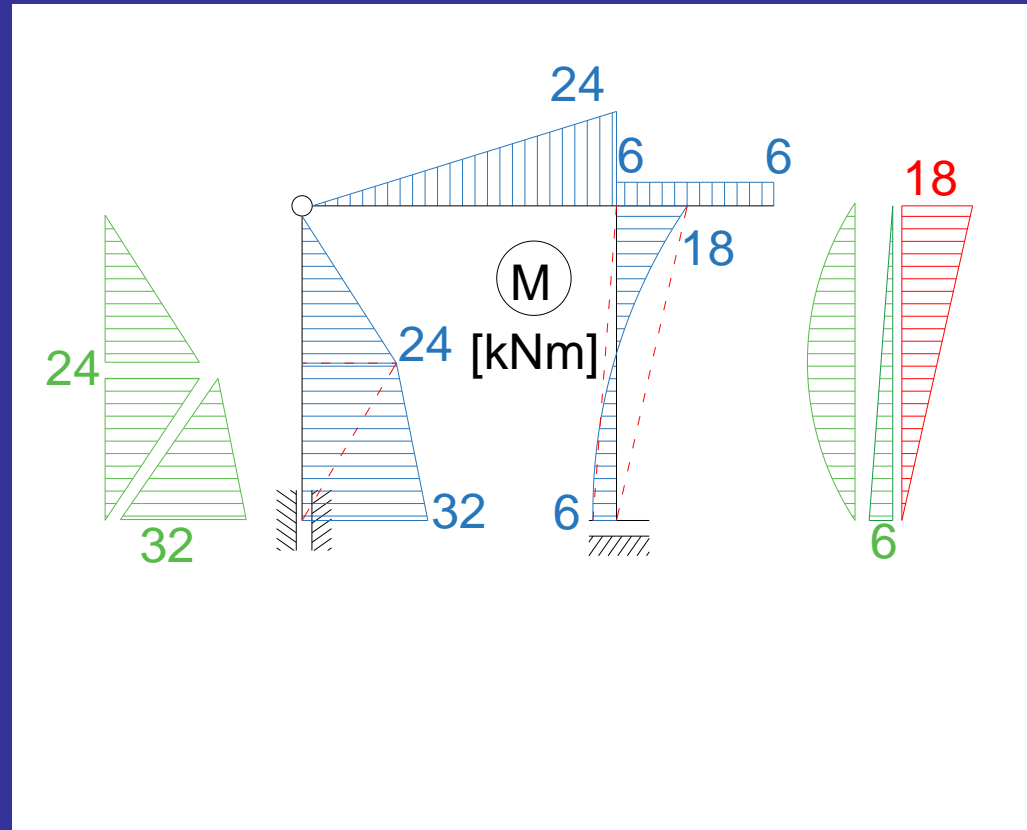
# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



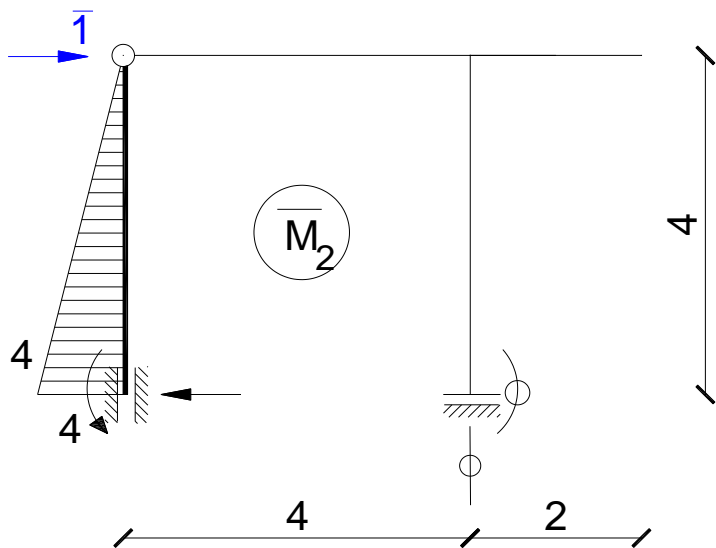
# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



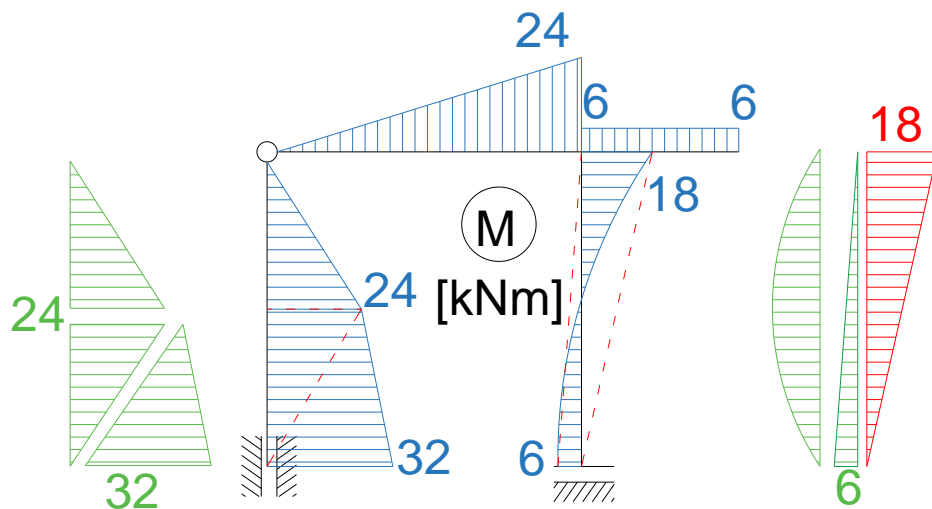
$$v_A = v_C = \frac{160}{EI}$$



# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:

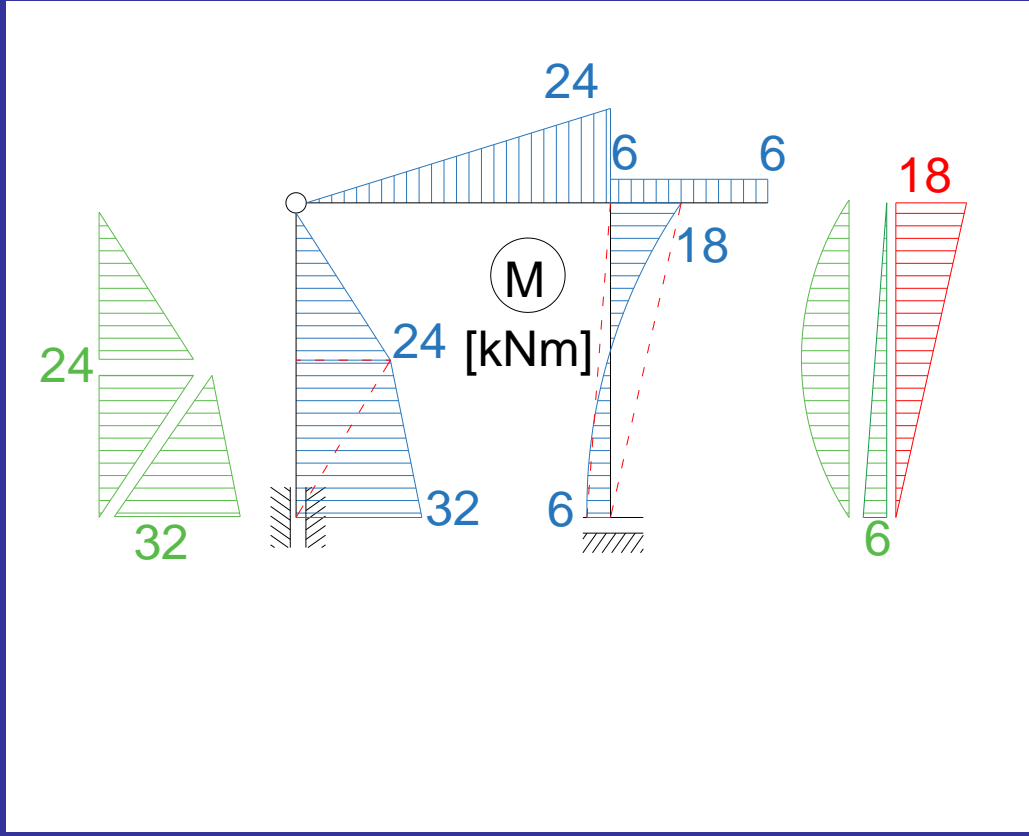
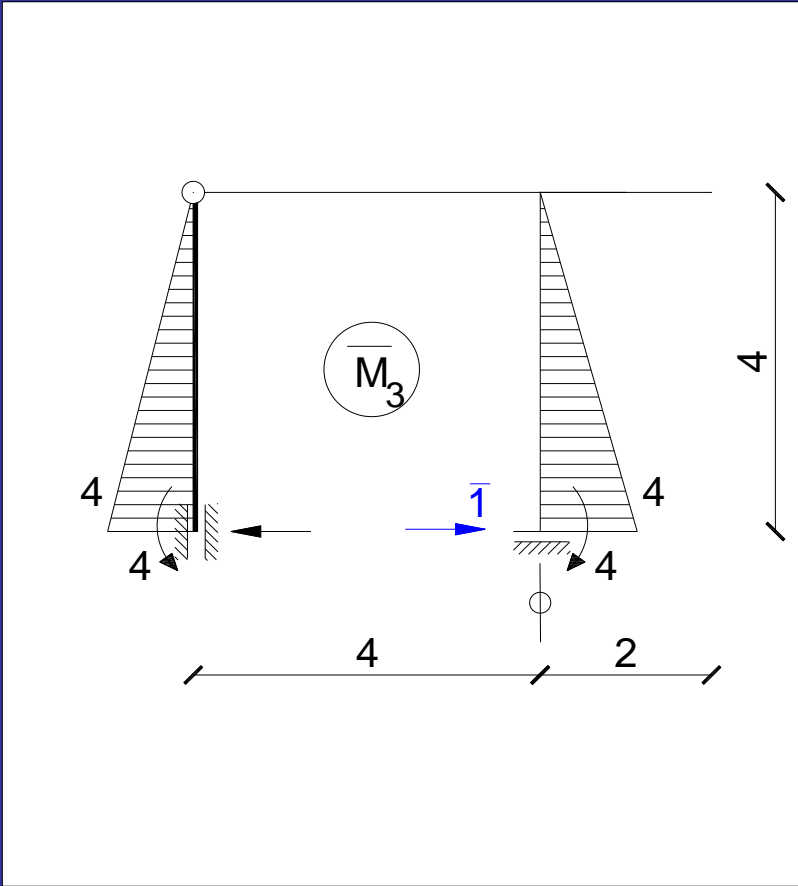


$$u_C = u_D = u_E = -\frac{304}{3EI}$$

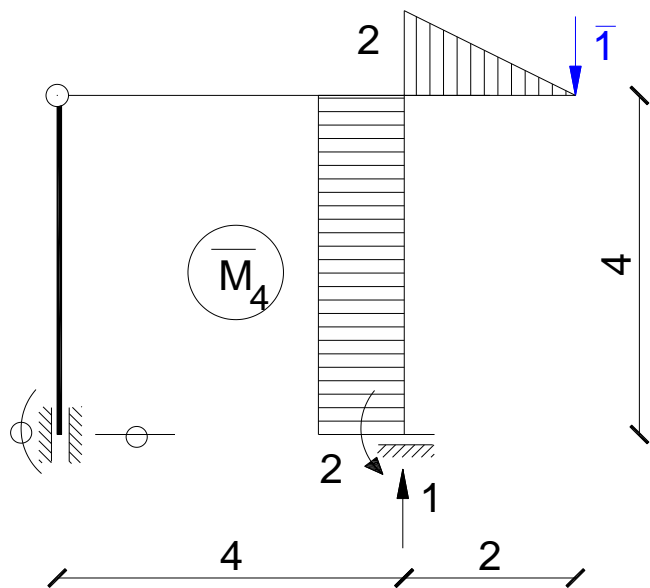


# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:

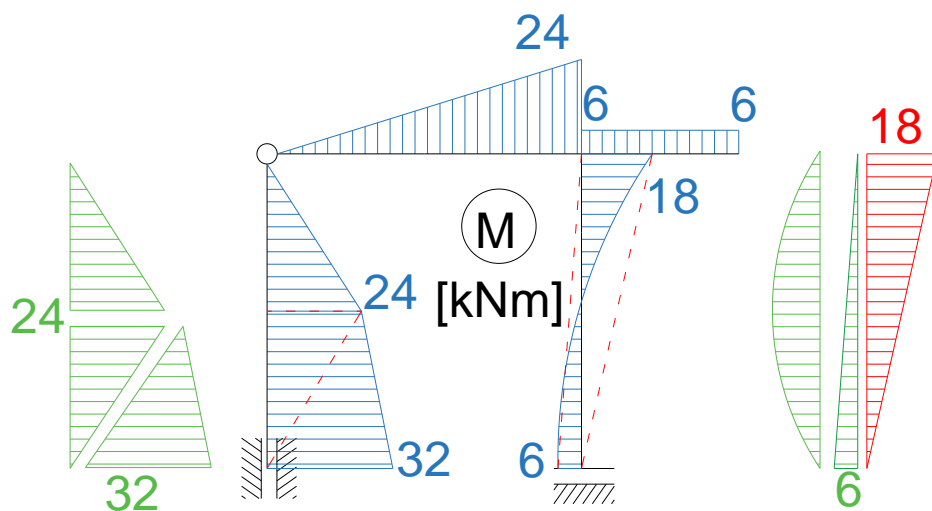
$$u_B = -\frac{352}{3EI}$$



# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:

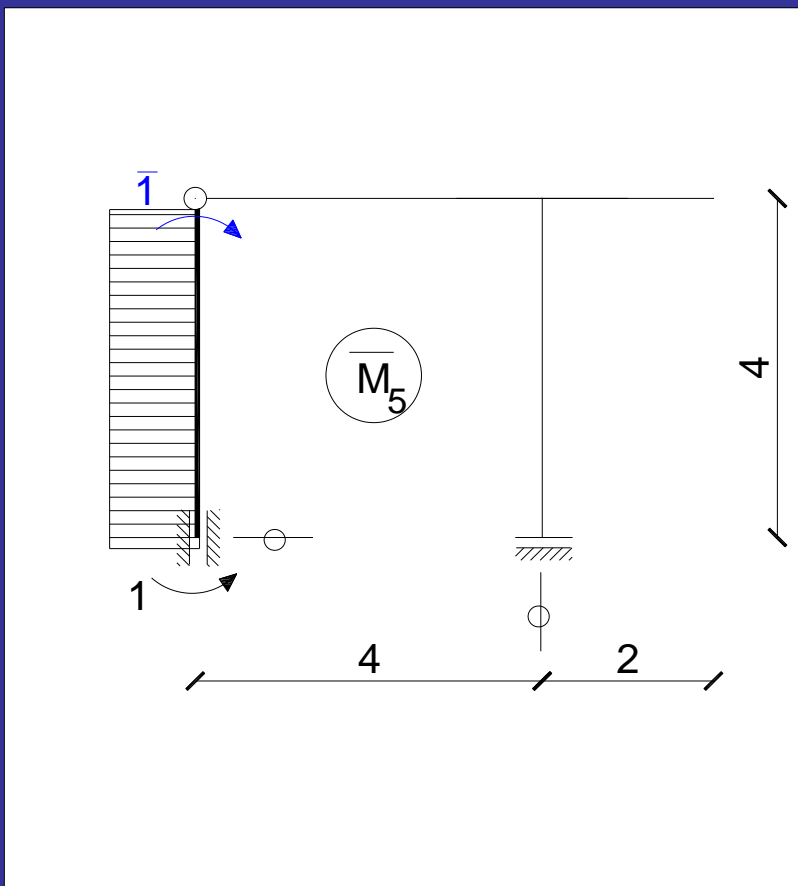


$$v_E = -\frac{4}{EI}$$

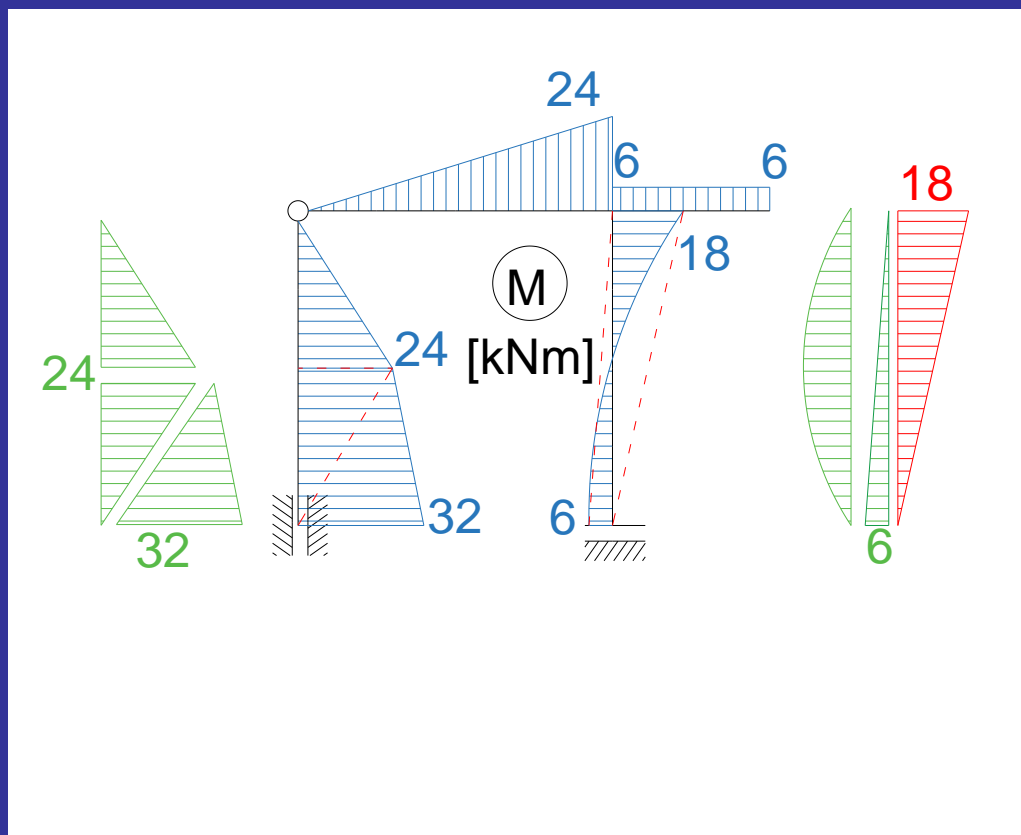




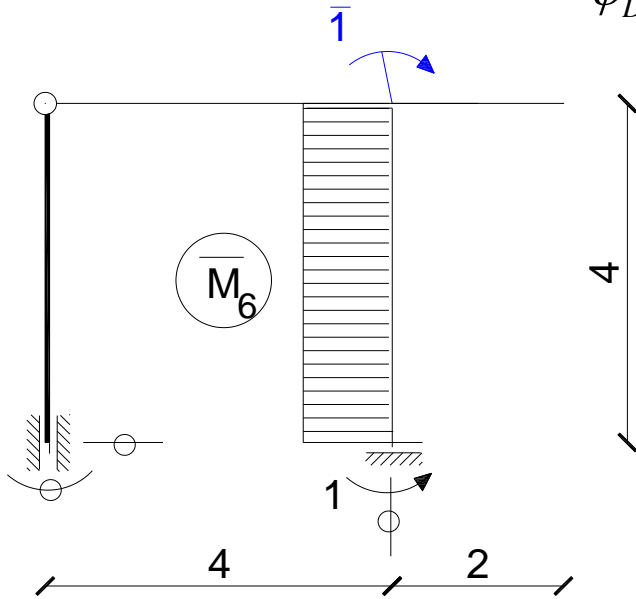
# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



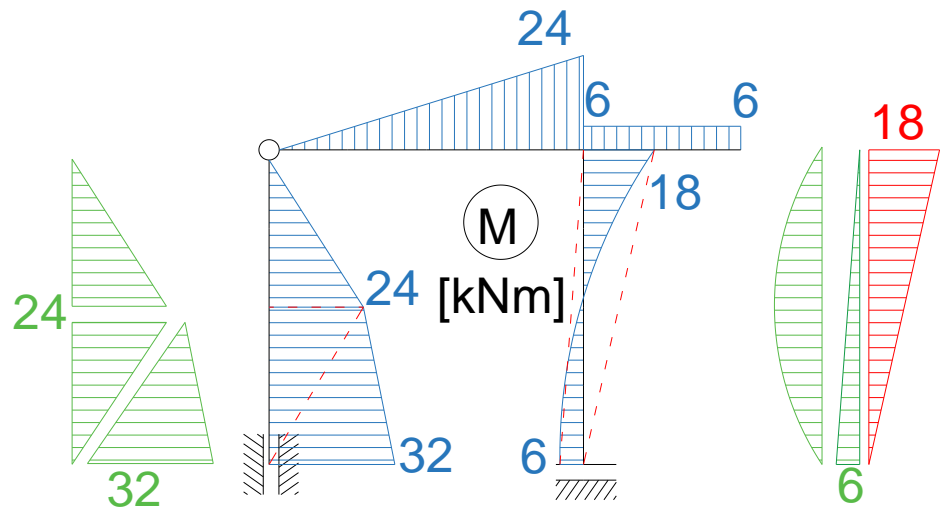
$$\varphi_C^L = -\frac{40}{EI}$$



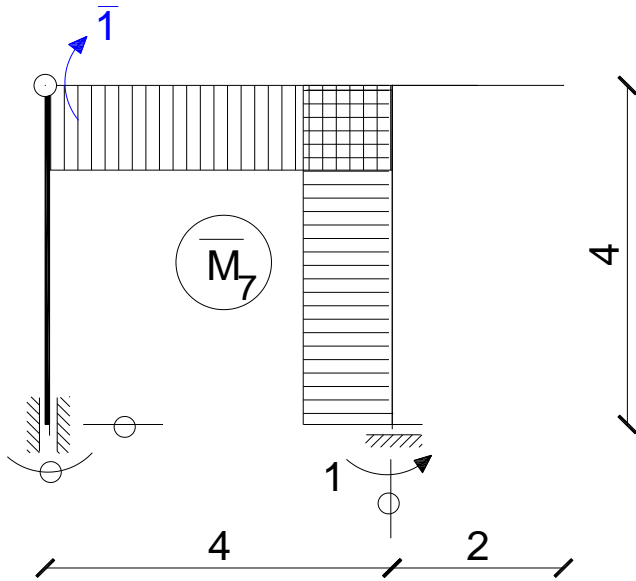
# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



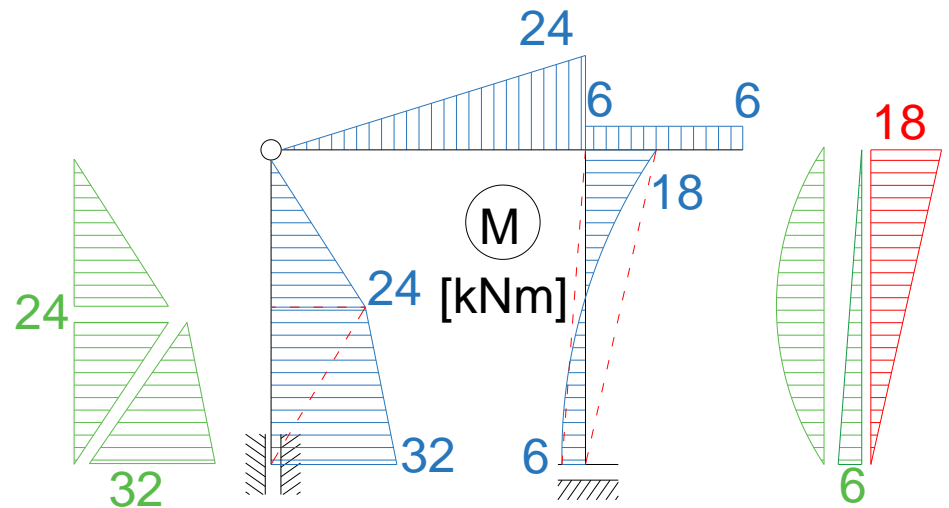
$$\varphi_D = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) = -\frac{8}{EI}$$



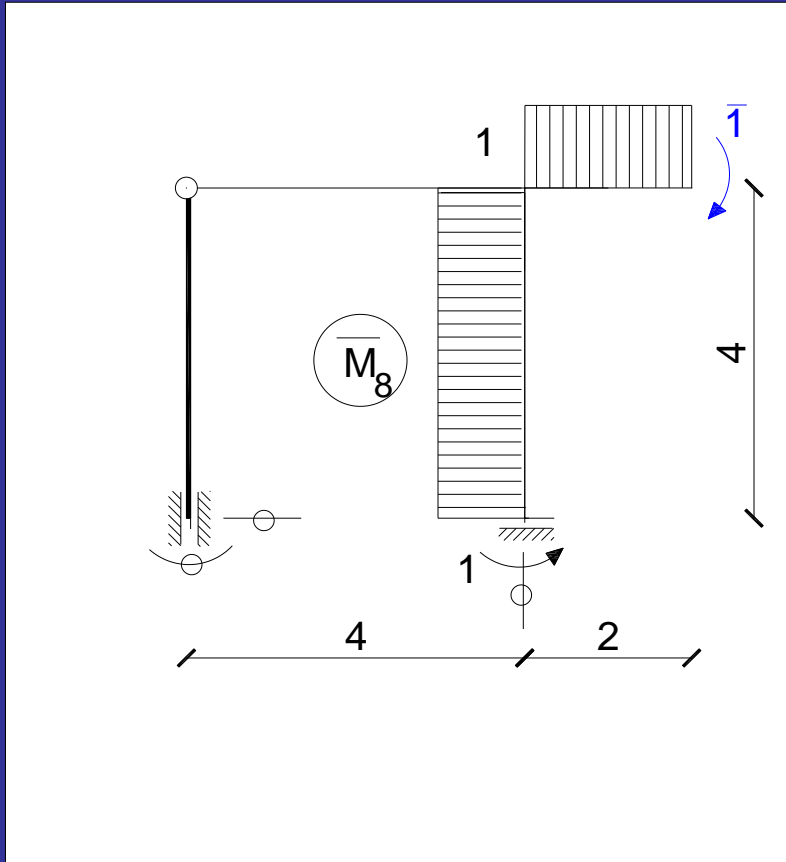
# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



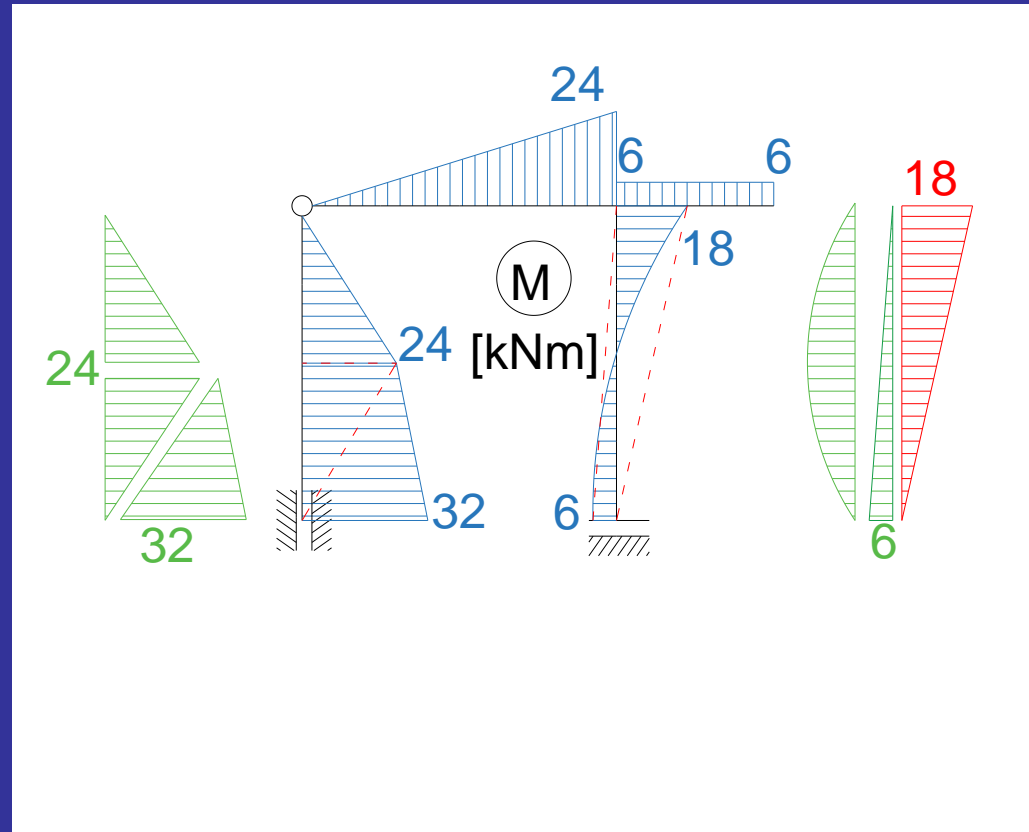
$$\varphi_C^P = -\frac{8}{EI} + \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot 1 \right) = -\frac{56}{EI}$$



# Obliczenia przemieszczeń z zasady prac wirtualnych:



$$\varphi_E = -\frac{8}{EI} + \frac{1}{EI}(6 \cdot 2 \cdot 1) = \frac{4}{EI}$$



**Metoda Sił**

# Metoda Sił

- Metoda rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych
- Układy statycznie niewyznaczalne – układy mające więcej reakcji niż liczba równań równowagi
- Liczba niewiadomych reakcji określa stopień statycznej niewyznaczalności

Stopień statycznej niewyznaczalności dla belek i ram bez obwodu zamkniętego:

$$n_s = l_r - l_p - 3$$

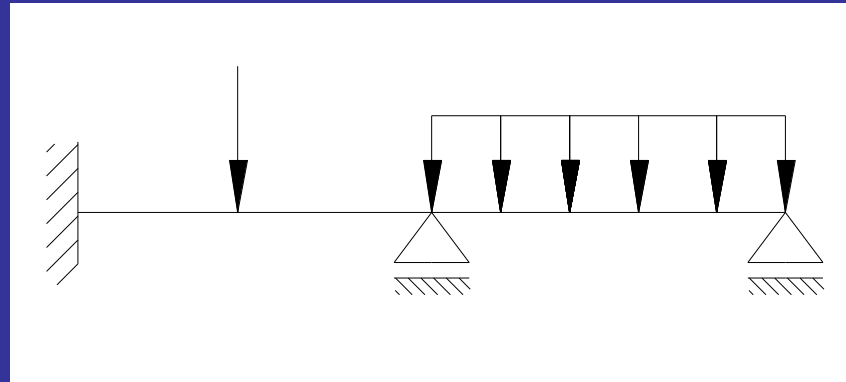
$l_r$  – liczba reakcji w układzie

$l_p$  – liczba przegubów z uwzględnieniem ich krotności

3 – liczba równań równowagi na płaszczyźnie

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wyznaczamy stopień statycznej niewyznaczalności układu



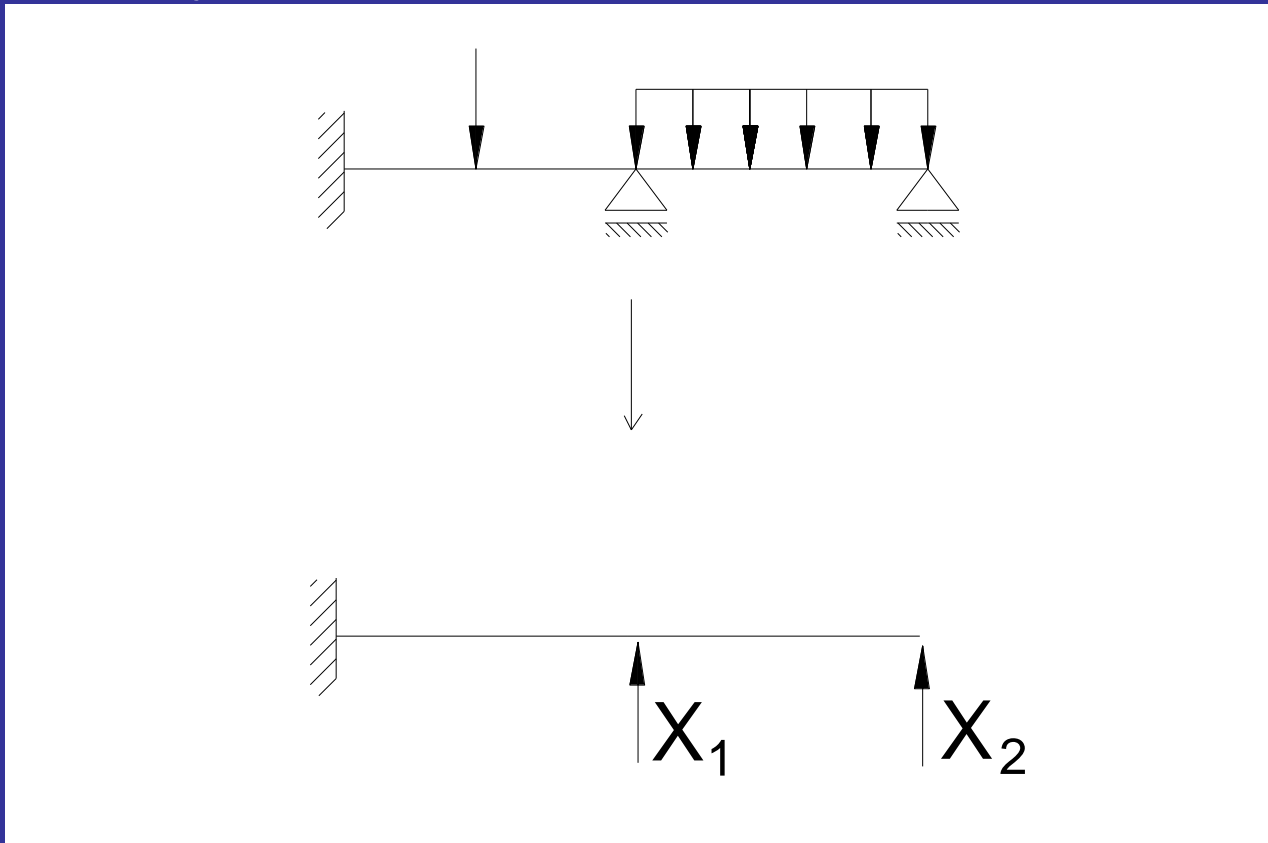
$$n_s = 5 - 0 - 3 = 2$$

Układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny



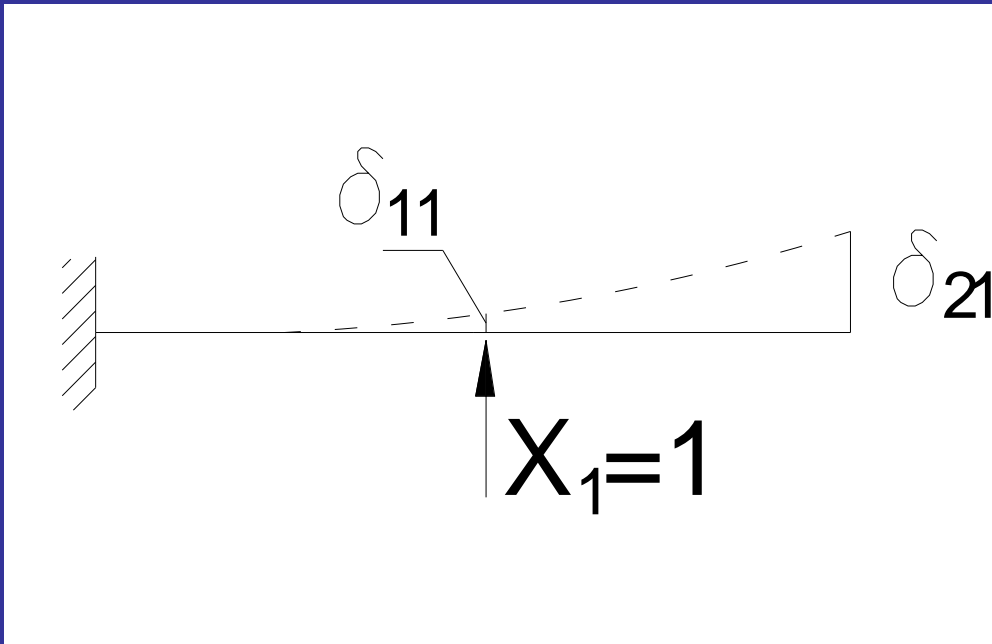
# Metoda Sił – tok postępowania

- W miejscu usuniętych więzów wprowadzamy nadliczbowe niewiadome – uogólnione siły,  
zamiast blokady przesuwu – siły skupione  
zamiast blokady obrotu - moment



# Metoda Sił – tok postępowania

- Obciążamy schemat podstawowy pierwszą nadliczbową  $X_1=1$

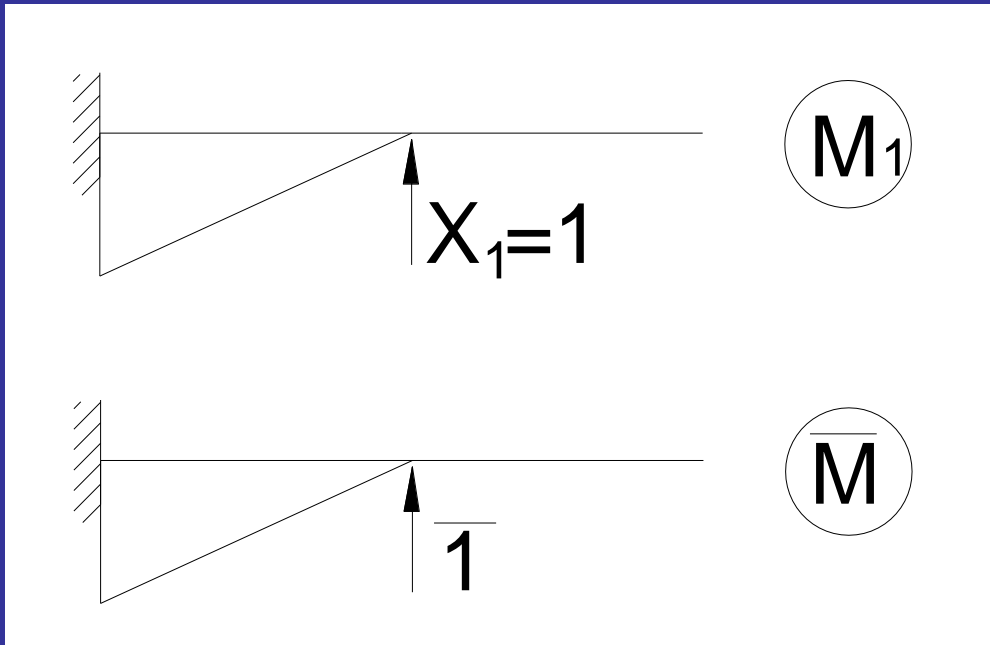


$\delta_{11}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_1$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_1 = 1$

$\delta_{21}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_2$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_1 = 1$

# Metoda Sił – tok postępowania

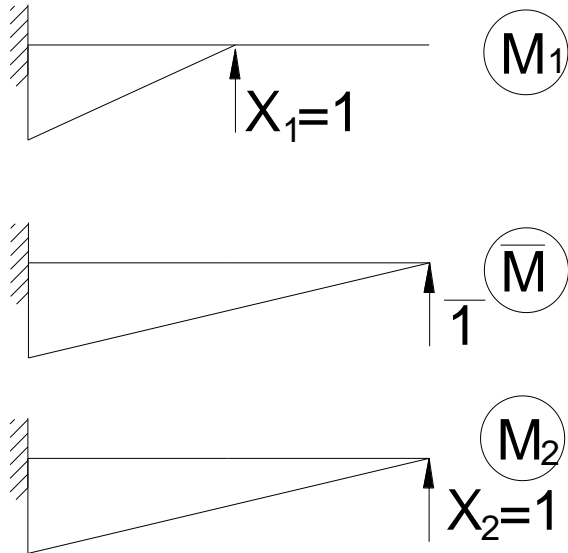
- Wyznaczenie  $\delta_{11}$



$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1 \bar{M}}{EI} ds = \int_s \frac{M_1 M_1}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

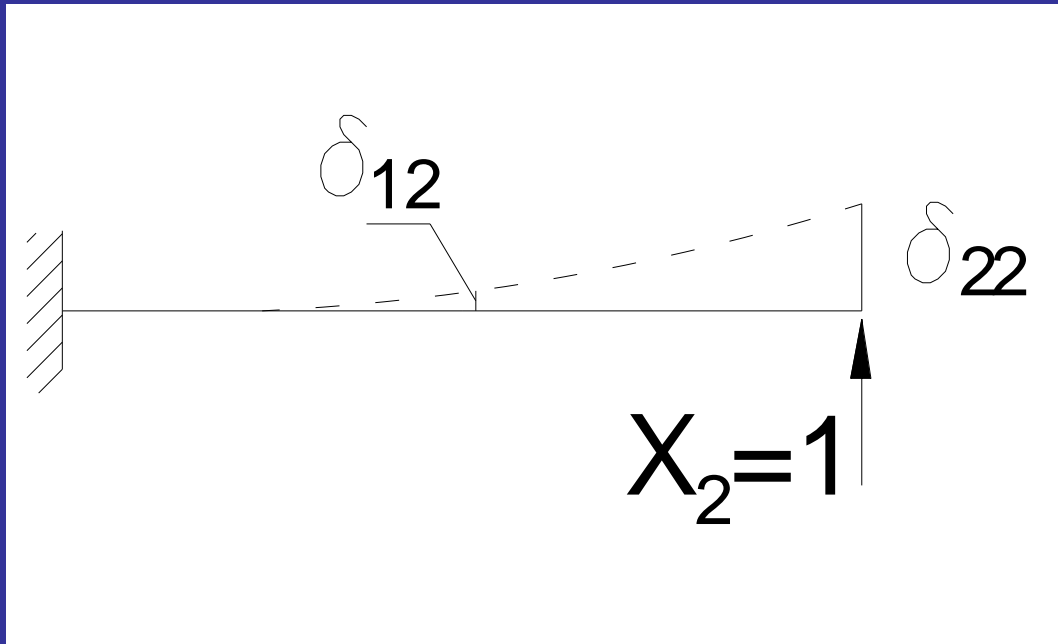
- Wyznaczenie  $\delta_{21}$



$$\delta_{21} = \int_s \frac{M_1 \bar{M}}{EI} ds = \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

- Obciążamy schemat podstawowy drugą nadliczbową  $X_2=1$

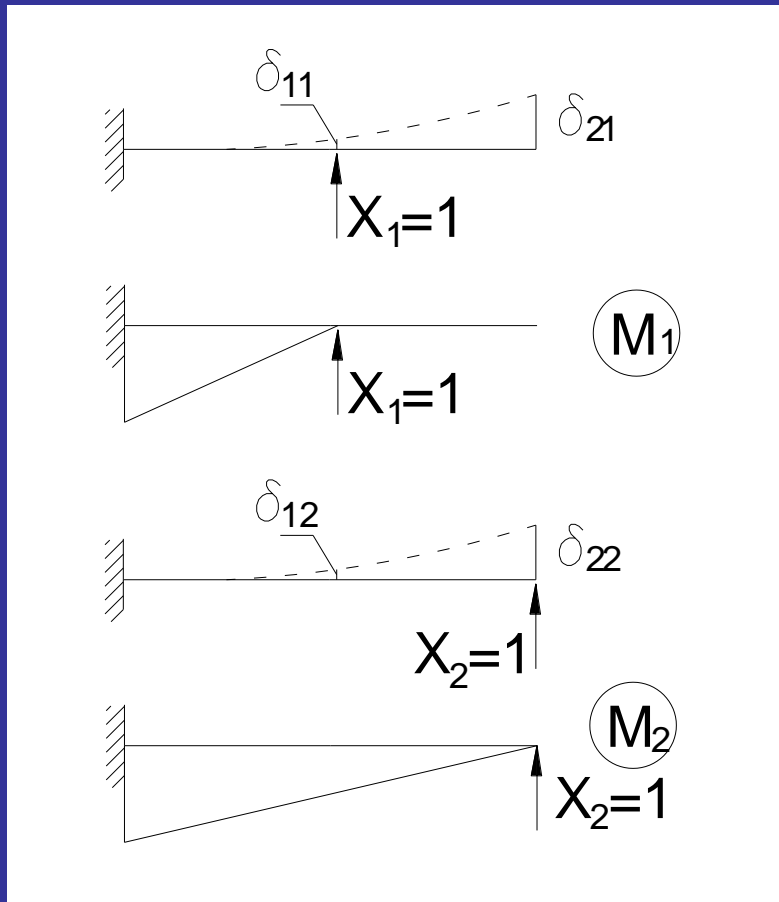


$\delta_{22}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_2$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_2 = 1$

$\delta_{12}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_1$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_2 = 1$

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wyznaczenie  $\delta_{22}$  i  $\delta_{12}$

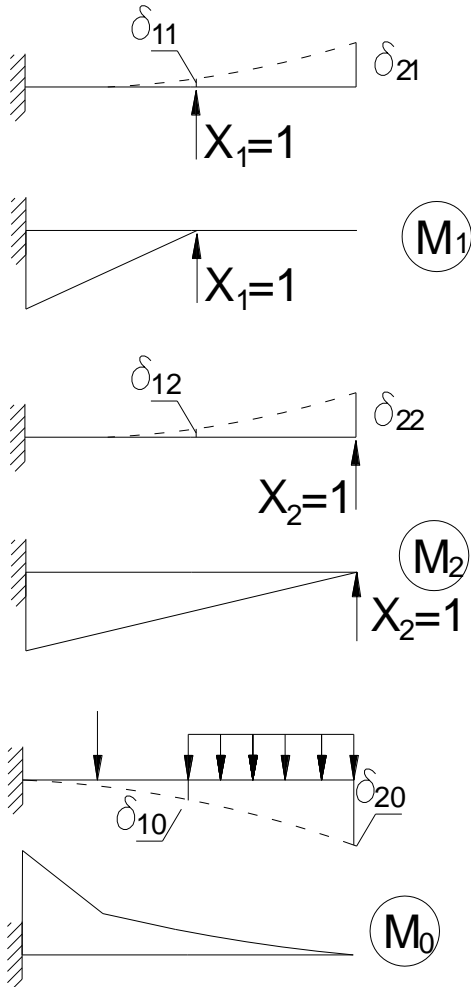


$$\delta_{22} = \int_s \frac{M_2 M_2}{EI} ds$$

$$\delta_{12} = \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wpływ obciążenia zewnętrznego -  $\delta_{10}$  i  $\delta_{20}$

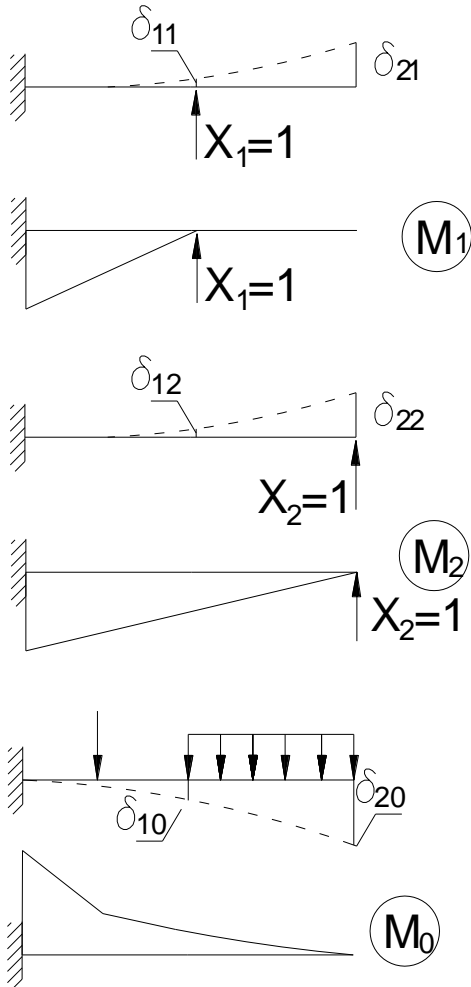


$\delta_{10}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_1$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego obciążeniem zewnętrznym

$\delta_{20}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_2$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego obciążeniem zewnętrznym

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wpływ obciążenia zewnętrznego -  $\delta_{10}$  i  $\delta_{20}$



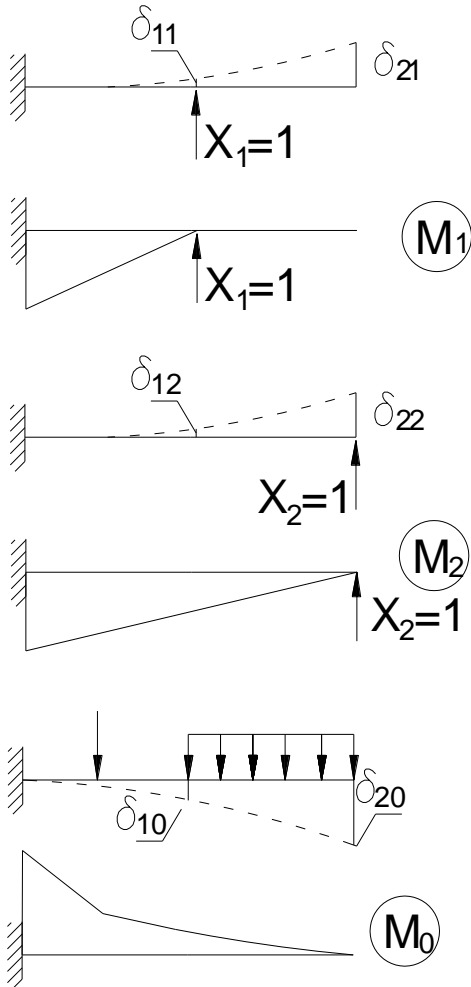
$$\delta_{10} = \int_s \frac{M_1 M_0}{EI} ds$$

$$\delta_{20} = \int_s \frac{M_2 M_0}{EI} ds$$



# Metoda Sił – tok postępowania

- Ogólnie – w przypadku belek i ram pod obciążeniem

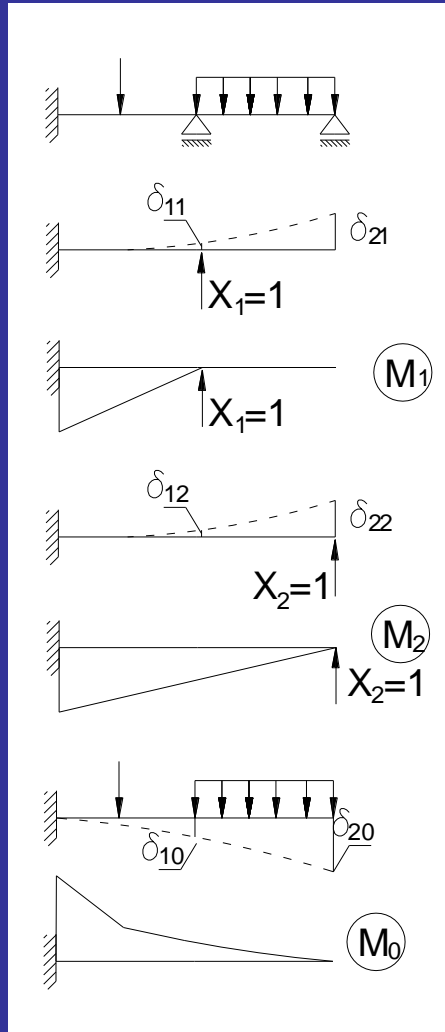


$$\delta_{jk} = \int_s \frac{M_j M_k}{EI} ds$$

$$\delta_{j0} = \int_s \frac{M_j M_0}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

W rzeczywistym schemacie statycznie niewyznaczalnym przemieszczenia w miejsce podpór są równe 0, stąd



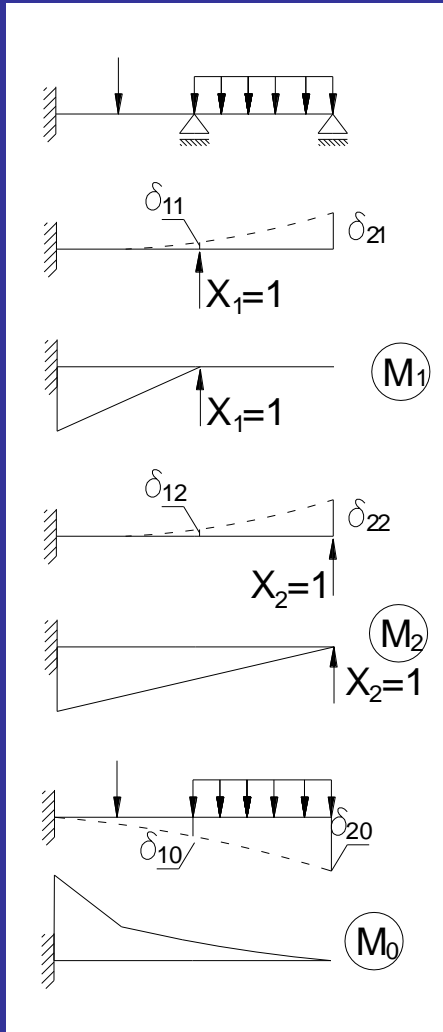
## Przemieszczenie na podporze 1

$$\delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0$$

## Przemieszczenie na podporze 2

$$\delta_2 = \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0$$

# Układ równań kanonicznych metody sił dla schematu dwukrotnie statycznie niewyznaczalnego:



$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1, X_2$$

Wyznaczenie wartości momentu w punkcie „i” od obciążenia zewnętrznego dla układu statycznie niewyznaczalnego:

$$M_i = M_{i1} \cdot X_1 + M_{i2} \cdot X_2 + M_{i0}$$

