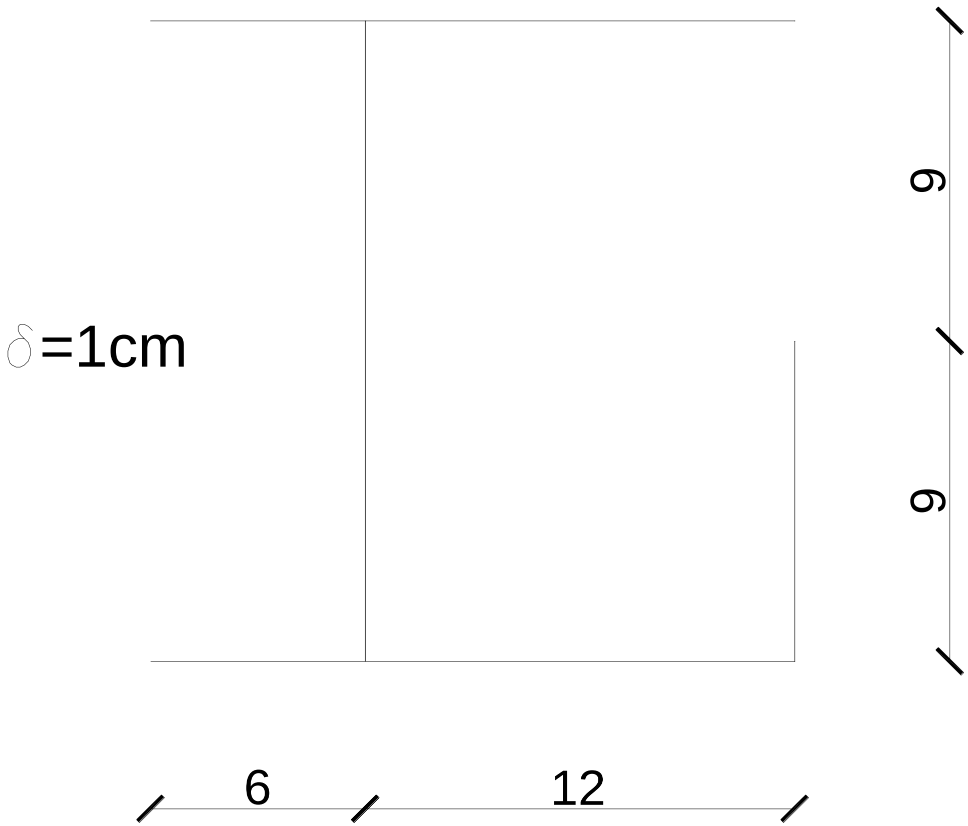
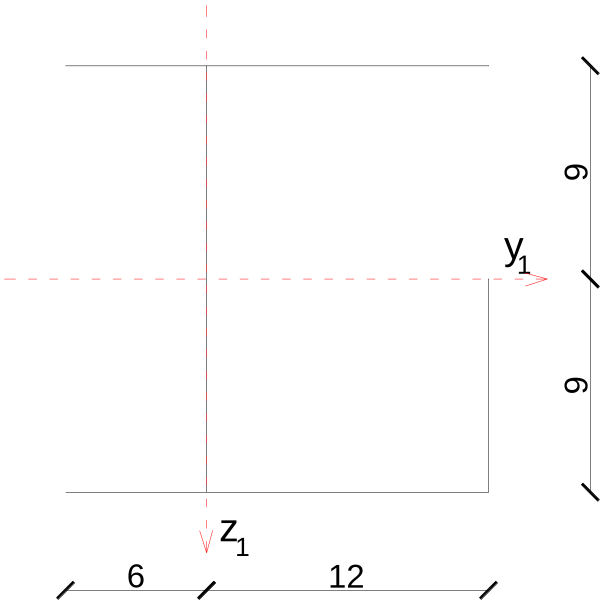
Zadanie: Wyznaczyć charakterystyki dla poniższego niesymetrycznego przekroju cienkościennego.



Wyznaczenie środka ciężkości



$$S_{y1} = \sum z_{1i} \cdot A_i = 18 \cdot 1 \cdot (-9) + 18 \cdot 1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 \cdot 4{,}5 = 40{,}5 cm^3$$

$$S_{z1} = \sum y_{1i} \cdot A_i = 18 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 12 = 216 cm^3$$

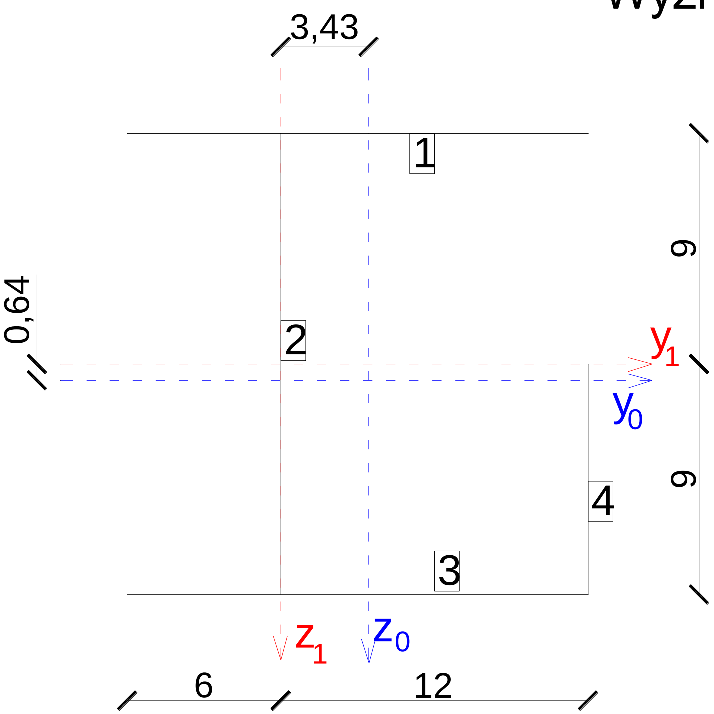
$$A = 18 \cdot 1 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 63 cm^2$$

$$y_c = \frac{S_{z1}}{A} = \frac{216}{63} = 3{,}429 cm$$

$$z_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{40{,}5}{63} = 0{,}643 cm$$

Sy1	40,5	z0	0,642857
Sz1	216	y0	3,428571
A	63		

Wyznaczenie środka ciężkości



$$S_{y1} = \sum z_{1i} \cdot A_i = 18 \cdot 1 \cdot (-9) + 18 \cdot 1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 \cdot 4{,}5 = 40{,}5 cm^3$$

$$S_{z1} = \sum y_{1i} \cdot A_i = 18 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 12 = 216 cm^3$$

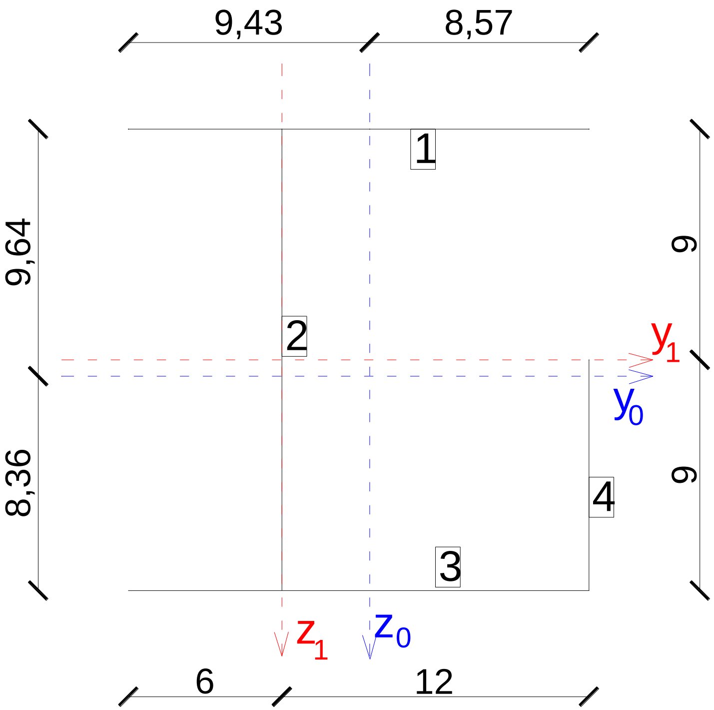
$$A = 18 \cdot 1 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 63 cm^2$$

$$y_c = \frac{S_{z1}}{A} = \frac{216}{63} = 3{,}429 cm$$

$$z_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{40{,}5}{63} = 0{,}643 cm$$

Sy1	40,5	z0	0,642857
Sz1	216	y0	3,428571
A	63		

Wyznaczenie środka ciężkości



$$S_{y1} = \sum z_{1i} \cdot A_i = 18 \cdot 1 \cdot (-9) + 18 \cdot 1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 \cdot 4{,}5 = 40{,}5 cm^3$$

$$S_{z1} = \sum y_{1i} \cdot A_i = 18 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 12 = 216 cm^3$$

$$A = 18 \cdot 1 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 63 cm^2$$

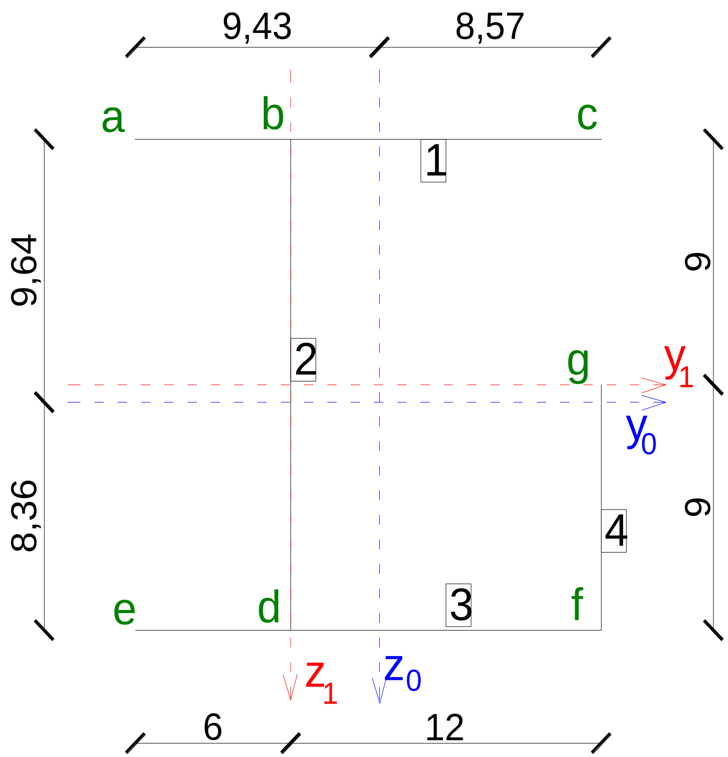
$$y_c = \frac{S_{z1}}{A} = \frac{216}{63} = 3{,}429 cm$$

$$z_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{40{,}5}{63} = 0{,}643 cm$$

<u>Wyniki z programu:</u>

Sy1	40,5	z0	0,642857
Sz1	216	y0	3,428571
A	63		

Współrzędne punktów – z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego

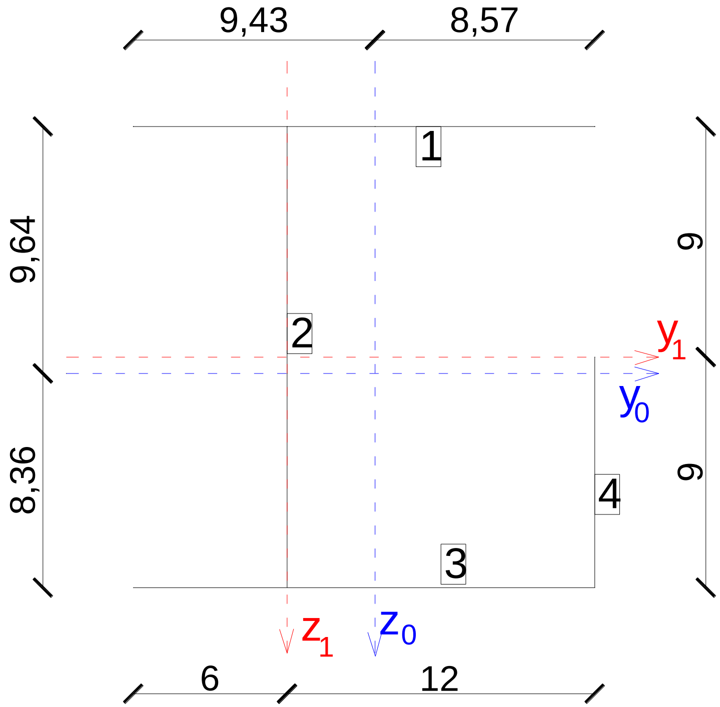


Współrzędne w układzie osi y1z1							
	a	b	c	d	e	f	g
z1	-9	-9	-9	9	9	9	0
y1	-6	0	12	0	-6	12	12

Współrzędne w układzie osi y0z0							
	a	b	c	d	e	f	g
z0	-9,643	-9,643	-9,643	8,3571	8,3571	8,3571	-0,643
y0	-9,429	-3,429	8,5714	-3,429	-9,429	8,5714	8,5714

dr inż. Hanna Weber

Wyznaczenie momentów bezwładności względem osi centralnych



$$J_{y0}=\int z^2dA=\delta\int z^2ds=3618{,}96cm^4$$

współrzędne z0

	A	B	C	D	δ	L	całka
1	-9,643	-9,643	-9,643	-9,643	1	18	1673,72
2	-9,643	8,3571	-9,643	8,3571	1	18	493,44
3	8,3571	8,3571	8,3571	8,3571	1	18	1257,15
4	8,3571	-0,643	8,3571	-0,643	1	9	194,65
						Jy0	3618,96

$$J_{z0}=\int y^2dA=\delta\int y^2ds=1851{,}43cm^4$$

współrzędne y0

	A	B	C	D	δ	L	całka
1	-9,429	8,5714	-9,429	8,5714	1	18	489,31
2	-3,429	-3,429	-3,429	-3,429	1	18	211,59
3	-9,429	8,5714	-9,429	8,5714	1	18	489,31
4	8,5714	8,5714	8,5714	8,5714	1	9	661,22
						Jz0	1851,43

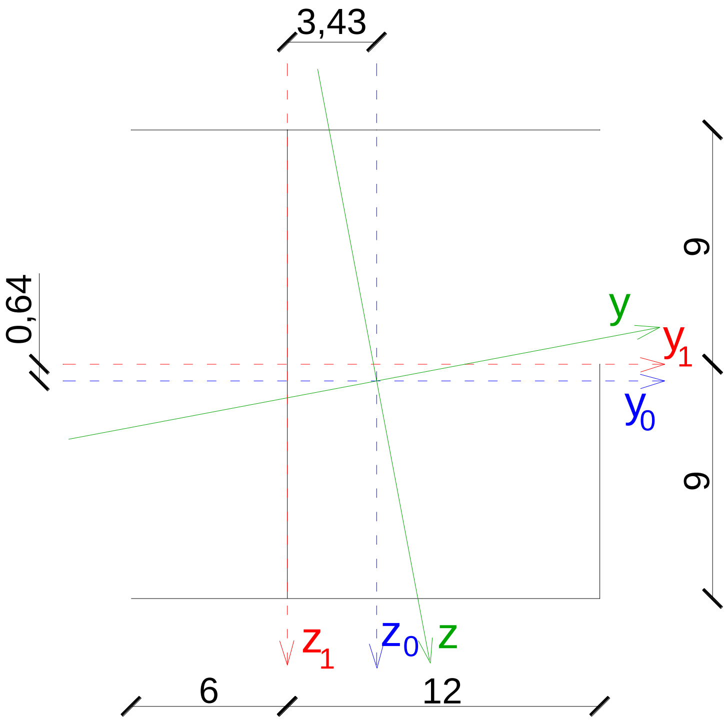
$$J_{y0z0}=\int y_0z_0dA=\delta\int y_0z_0ds$$

współrzędne y0z0

	A	B	C	D	δ	L	całka
1	-9,429	8,5714	-9,643	-9,643	1	18	74,39
2	-3,429	-3,429	-9,643	8,3571	1	18	39,67
3	-9,429	8,5714	8,3571	8,3571	1	18	-64,47
4	8,5714	8,5714	8,3571	-0,643	1	9	297,55
						Jy0z0	347,14

dr inż. Hanna Weber

Wyznaczenie kąta obrotu osi głównych centralnych



$$\tan(2\varphi) = \frac{-2J_{y0z0}}{J_{y0} - J_{z0}}$$

$$J_{y0z0} = 347{,}14cm^4$$

$$J_{y0} = 3618{,}96cm^4$$

$$J_{z0} = 1851{,}43cm^4$$

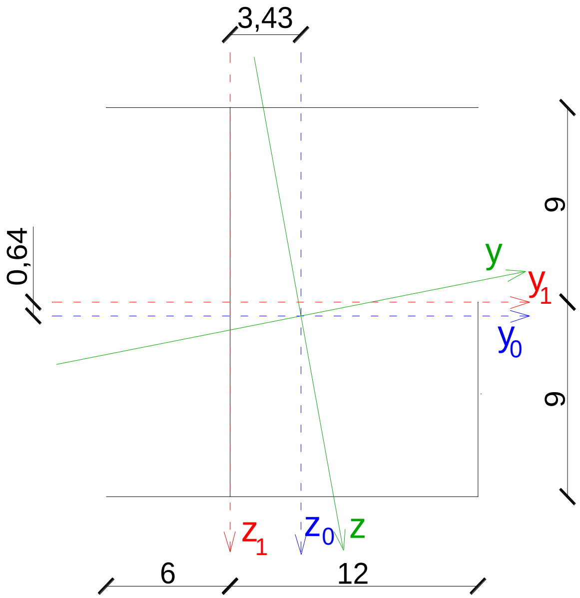
Wyznaczenie kąta obrotu

tg2φ=	-0,3928	
φ=	-0,18714	rad

φ=	-10,7224	°

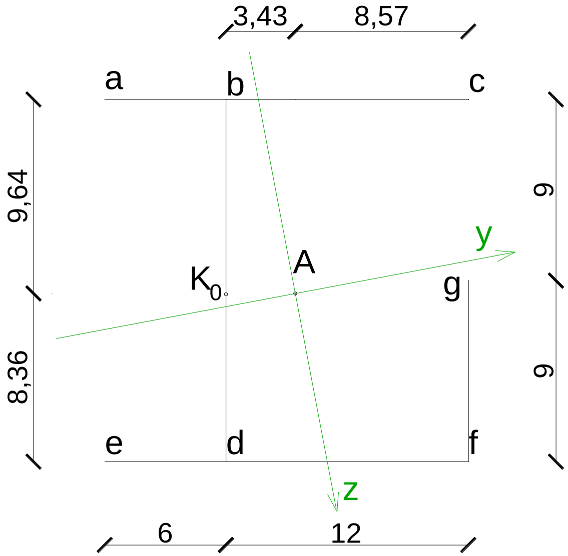
dr inż. Hanna Weber

Transformacja współrzędnych z układu osi y0z0 do yz



$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$

Współrzędne w układzie osi y0z0							
	a	b	c	d	e	f	g
z0	-9,643	-9,643	-9,643	8,3571	8,3571	8,3571	-0,643
y0	-9,429	-3,429	8,5714	-3,429	-9,429	8,5714	8,5714



Współrzędne w układzie osi yz							
	a	b	c	d	e	f	g
z	-11,2287	-10,1124	-7,8798	7,5733	6,4570	9,8060	0,9631
y	-7,4699	-1,5746	10,2158	-4,9236	-10,8188	6,8669	8,5414

dr inż. Hanna Weber

Wyznaczenie momentów bezwładności względem osi głównych centralnych

	A	B	C	D	gr	L	całka
1	-11,229	-7,8798	-11,229	-7,8798	1	18	1659,92
2	-10,112	7,57334	-10,112	7,57334	1	18	498,19
3	6,45703	9,80595	6,45703	9,80595	1	18	1207,00
4	9,80595	0,96309	9,80595	0,96309	1	9	319,58
						Jy	3684,70

współrzędne „z” po transformacji

	A	B	C	D	gr	L	całka
1	-7,4699	10,2158	-7,4699	10,2158	1	18	503,11
2	-1,5746	-4,9236	-1,5746	-4,9236	1	18	206,84
3	-10,819	6,86692	-10,819	6,86692	1	18	539,46
4	6,86692	8,54138	6,86692	8,54138	1	9	536,29
						Jz	1785,69

współrzędne „y” po transformacji

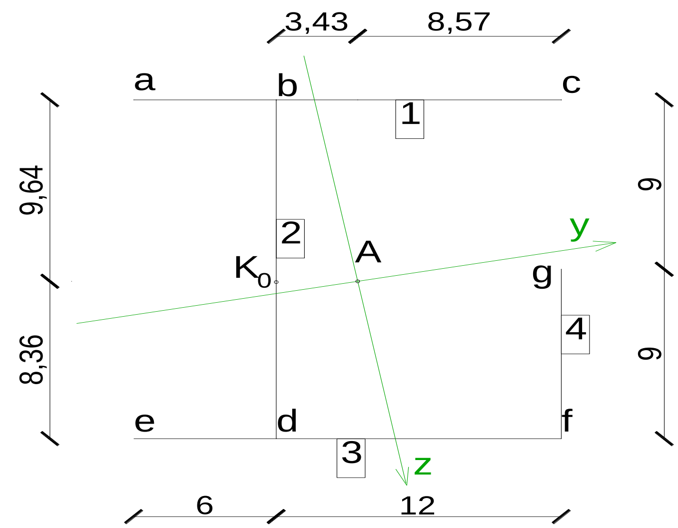
	A	B	C	D	gr	L	całka
1	-7,4699	10,2158	-11,229	-7,8798	1	18	-147,28
2	-1,5746	-4,9236	-10,112	7,57334	1	18	-14,60
3	-10,819	6,86692	6,45703	9,80595	1	18	-200,37
4	6,86692	8,54138	9,80595	0,96309	1	9	362,24
						Jyz	0,00E+00

Współrzędne „y” i „z”
po transformacji

Wyznaczenie momentów bezwładności za pomocą programu Mathcad

współrzędne węzłów po transformacji

Współrzędne w układzie osi yz							
	a	b	c	d	e	f	g
z	-11,2287	-10,1124	-7,8798	7,5733	6,4570	9,8060	0,9631
y	-7,4699	-1,5746	10,2158	-4,9236	-10,8188	6,8669	8,5414



Zdefiniowanie wartości współrzędnych
w poszczególnych punktach:

$yb := -1.5746$ $zb := -10.1124$

$yc := 10.2158$ $zc := -7.8798$

$yd := -4.9236$ $zd := 7.5733$

$ye := -10.8188$ $ze := 6.4570$

$yf := 6.8669$ $zf := 9.8060$

$yg := 8.5414$ $zg := 0.9631$

Zdefiniowanie funkcji współrzędnych „z” na poszczególnych prętach:

$$fz1(x) := za + (zc - za)\cdot\frac{x}{18}$$

$$fz2(x) := zb + (zd - zb)\cdot\frac{x}{18}$$

$$fz3(x) := ze + (zf - ze)\cdot\frac{x}{18}$$

$$fz4(x) := zf + (zg - zf)\cdot\frac{x}{9}$$

Zdefiniowanie funkcji współrzędnych „y” na poszczególnych prętach:

$$fy1(x) := ya + (yc - ya)\cdot\frac{x}{18}$$

$$fy2(x) := yb + (yd - yb)\cdot\frac{x}{18}$$

$$fy3(x) := ye + (yf - ye)\cdot\frac{x}{18}$$

$$fy4(x) := yf + (yg - yf)\cdot\frac{x}{9}$$

Wyznaczenie momentów bezwładności za pomocą programu Mathcad

Definiowanie:

$$J(i,j) := \int_0^{18} fy1(x)^i \cdot fz1(x)^j \, dx \cdot \delta + \int_0^{18} fy2(x)^i \cdot fz2(x)^j \, dx \cdot \delta + \int_0^{18} fy3(x)^i \cdot fz3(x)^j \, dx \cdot \delta + \int_0^{9} fy4(x)^i \cdot fz4(x)^j \, dx \cdot \delta$$

Wyniki:

$$Jy := J(0,2) = 3.685 \times 10^{3}$$

$$Jz := J(2,0) = 1.786 \times 10^{3}$$

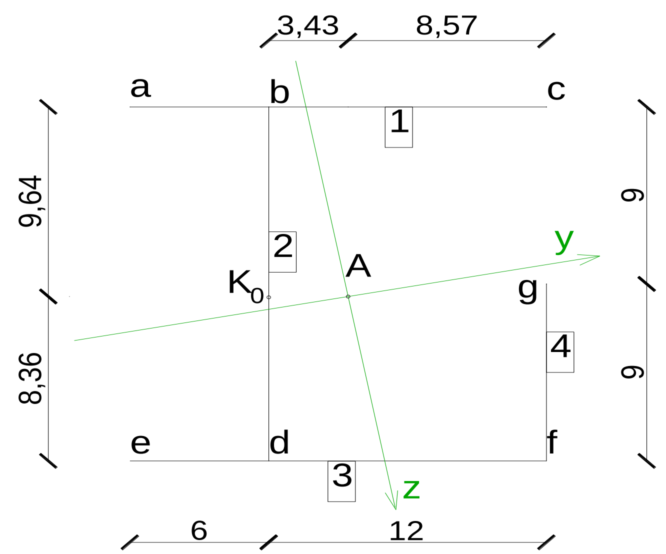
$$Jyz := J(1,1) = 5.411 \times 10^{-3}$$

$$Jy2z := J(2,1) = 2.504 \times 10^{3}$$

$$Jz2y := J(1,2) = 590.739$$

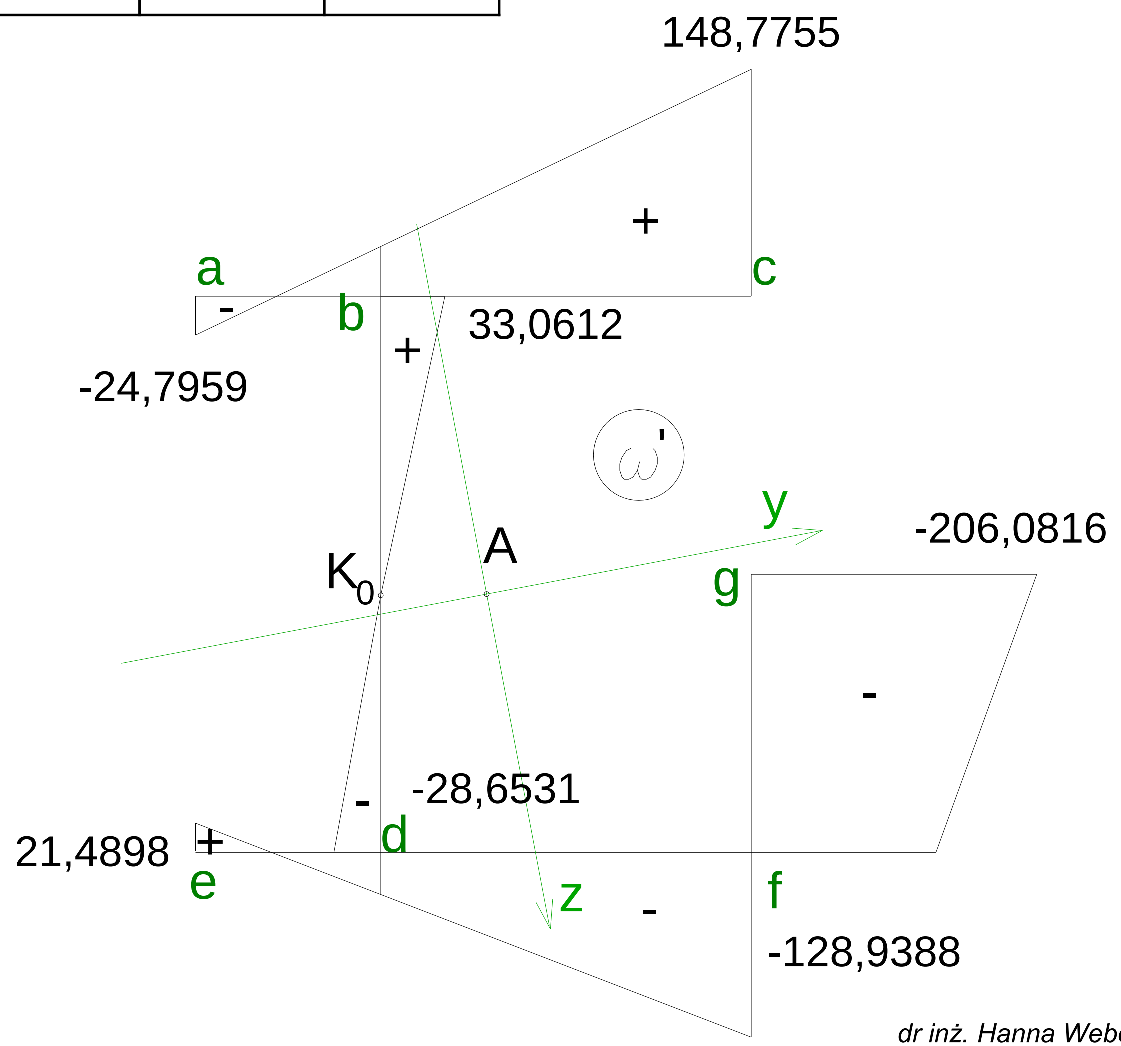
$$Jy3 := J(3,0) = 2.442 \times 10^{3}$$

$$Jz3 := J(0,3) = -5.564 \times 10^{3}$$



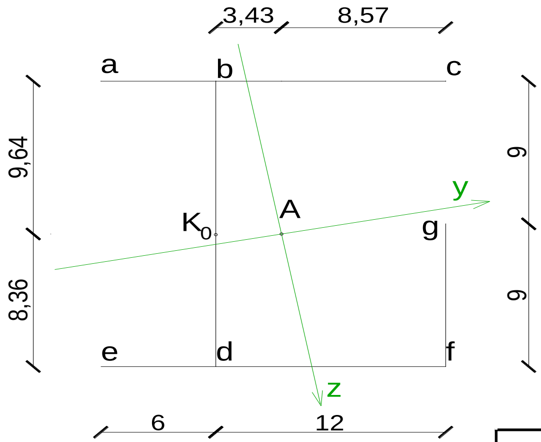
Wykres ω dla środka ciężkości jako bieguna, wrysowany dla nie obróconego układu współrzędnych i pkt. K_0 przyjętego na tej samej wysokości co śr. ciężk. A

	a	b	c	d	e	f	g
ω'	-24,7959	33,0612	148,7755	-28,6531	21,4898	-128,9388	-206,0816



dr inż. Hanna Weber

Wyznaczenie współrzędnych bieguna



	a	b	c	d	e	f	g
z	-11,2287	-10,1124	-7,8798	7,5733	6,4570	9,8060	0,9631
y	-7,4699	-1,5746	10,2158	-4,9236	-10,8188	6,8669	8,5414
ω'	-24,7959	33,0612	148,7755	-28,6531	21,4898	-128,9388	-206,0816

$$z^*{}_A = z_A - \frac{J_{\omega y}}{J_z}$$

	ω A	ω B	y C	y D	gr	L	całka
1	-24,7959	148,7755	-7,4699	10,21584	1	18	6136,59
2	33,0612	-28,6531	-1,5746	-4,92356	1	18	181,11
3	21,4898	-128,9388	-10,819	6,866917	1	18	-2079,84
4	-128,9388	-206,0816	6,86692	8,541376	1	9	-11711,59
						$J\omega y$	-7473,72

$$y^*{}_A = y_A + \frac{J_{\omega z}}{J_y}$$

	ω A	ω B	z C	z D	gr	L	całka
1	-24,7959	148,7755	-11,229	-7,87977	1	18	-9788,85
2	33,0612	-28,6531	-10,112	7,573338	1	18	-1687,56
3	21,4898	-128,9388	6,45703	9,805951	1	18	-8619,14
4	-128,9388	-206,0816	9,80595	0,96309	1	9	-7606,04
						$J\omega z$	-27701,59

Jeżeli zaczynamy liczyć wstępnie ω dla środka ciężkości to:

$$z^*{}_A = -\frac{J_{\omega y}}{J_z}$$

$$y^*{}_A = \frac{J_{\omega z}}{J_y}$$

Podstawiając otrzymane wyniki uzyskujemy:

zA*=	4,1853
yA*=	-7,5180

dr inż. Hanna Weber

Transformacja współrzędnych bieguna z układu obróconego do układu osi y0z0

zA*=	4,1853
yA*=	-7,5180

→ współrzędne w obróconym układzie

Aby otrzymać współrzędne bieguna w układzie osi y0z0, mnożymy macierz odwrotną do macierzy transformacji przez z_A* i y_A*

macierz odwrotna

0,98254	-0,18605
0,186051	0,98254

x

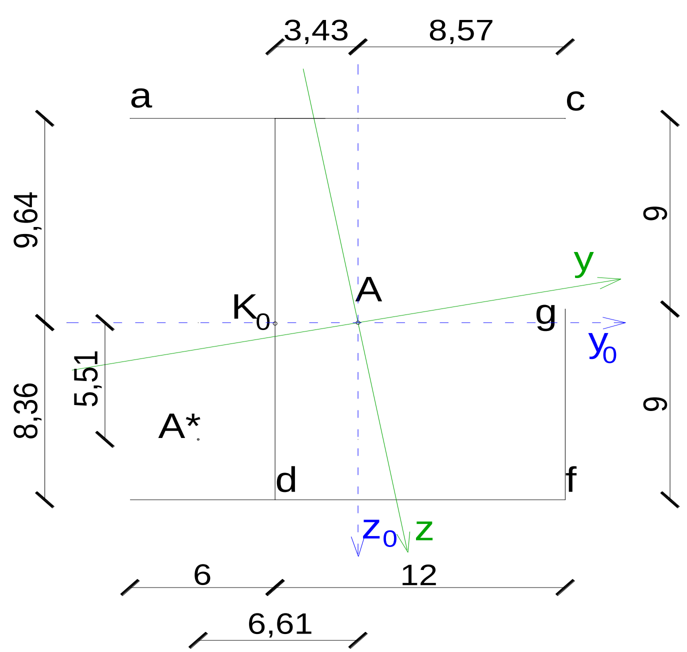
4,1853
-7,5180

=

5,5110 (z)
-6,6081 (y)

→ współrzędne bieguna w układzie osi y0z0

Naniesienie bieguna na rysunek A* →



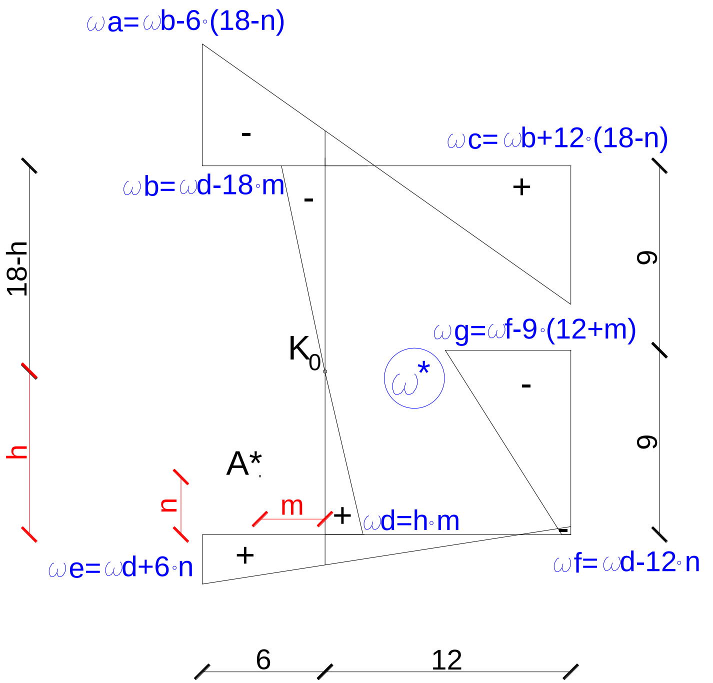
dr inż. Hanna Weber

Wyznaczenie położenia K_0 , w celu otrzymania $S\omega^*=0$

Liczymy wartość S_ω

$$S_\omega = \int_A \omega dA = \delta \int_0^l \omega ds$$

Szukamy takiego położenia K_0, dla którego S_ω będzie równe 0.



Dla punktu K_0, w odległości 8 cm od dołu przekroju:

m=	3,1795
n=	2,8462

	a	b	c	d	e	f	g
ω1	-122,718	-31,7949	150,0513	25,4359	42,51282	-8,71795	-145,333

h (K0)
8,0000

Sω
-2,00E+02

Dla punktu K_0, w odległości 9 cm od dołu przekroju:

m=	3,1795
n=	2,8462

	a	b	c	d	e	f	g
ω*	-119,538	-28,6154	153,2308	28,61538	45,69231	-5,53846	-142,154

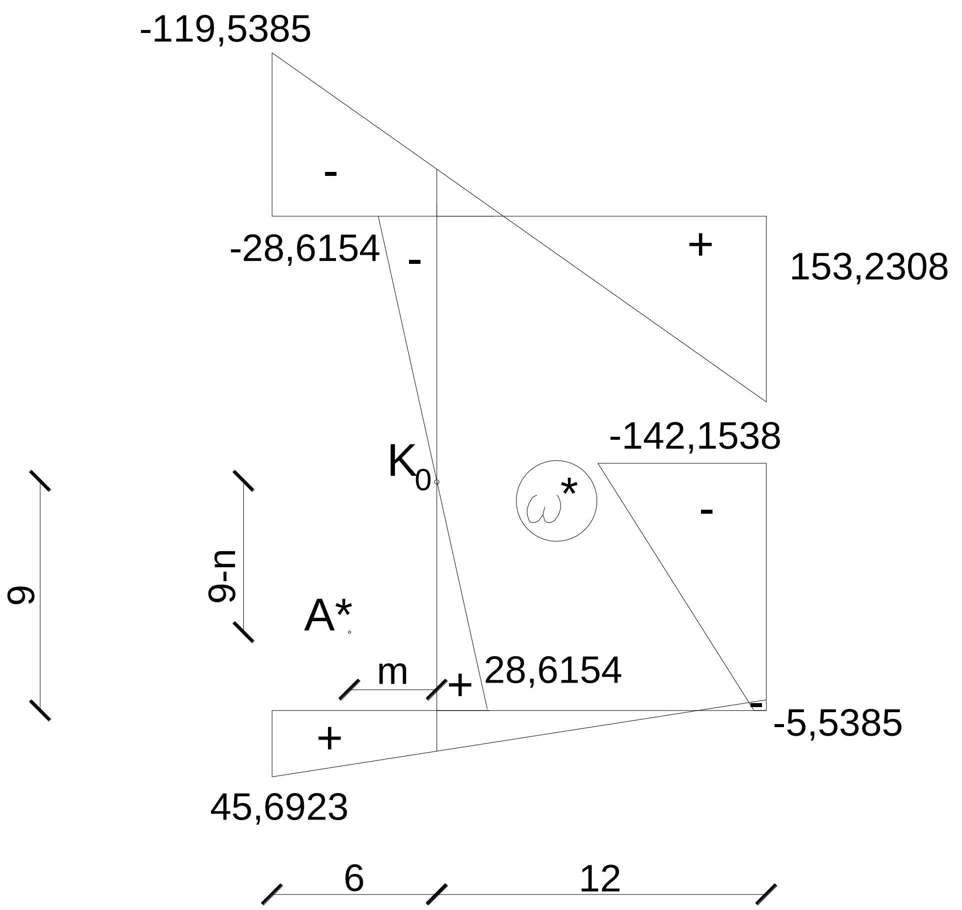
h (K0)
9,0000

Sω
0,00E+00

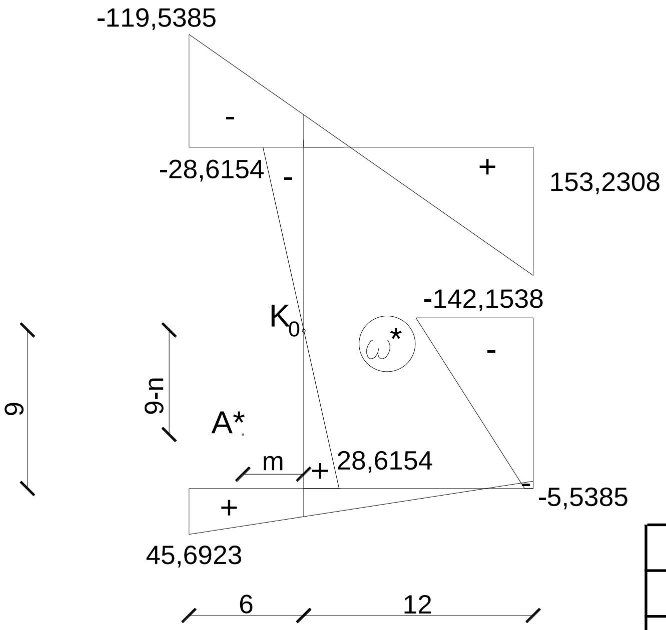
dr inż. Hanna Weber

Wykres ω^* dla bieguna A* i pkt. K_0 odległości 9 cm od dołu przekroju:

	a	b	c	d	e	f	g
ω^*	-119,5385	-28,6154	153,2308	28,6154	45,6923	-5,5385	-142,1538



Sprawdzenie poprawności wykresu ω^*



Warunek konieczny:

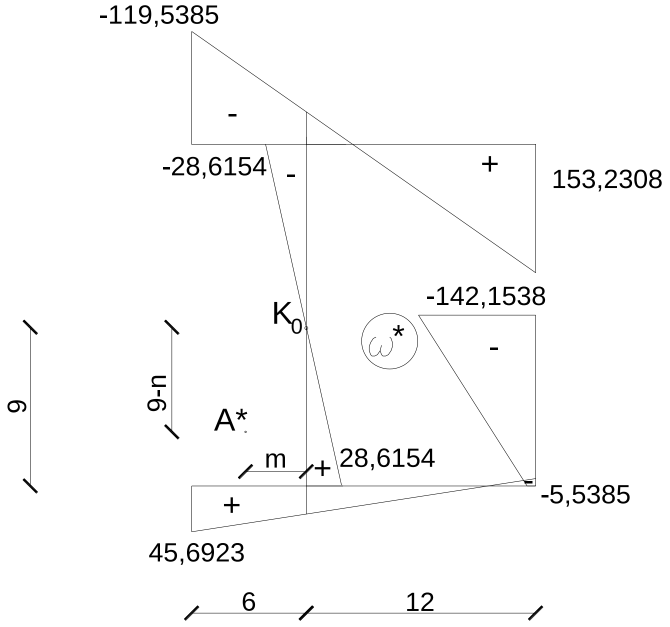
$J\omega^*y=0$

$J\omega^*z=0$

	ω^*	ω^*	y	y			
	A	B	C	D	gr	L	całka
1	-119,5385	153,2308	-7,46989	10,21584	1	18	7652,51
2	-28,6154	28,6154	-1,57465	-4,923564	1	18	-287,49
3	45,6923	-5,5385	-10,8188	6,866917	1	18	-2073,16
4	-5,5385	-142,1538	6,866917	8,541376	1	9	-5291,86
						$J\omega^*y$	0,00

	ω^*	ω^*	z	z			
	A	B	C	D	gr	L	całka
1	-119,5385	153,2308	-11,2287	-7,87977	1	18	-1526,91
2	-28,6154	28,6154	-10,1124	7,573338	1	18	1518,25
3	45,6923	-5,5385	6,457032	9,805951	1	18	2681,24
4	-5,5385	-142,1538	9,805951	0,96309	1	9	-2672,58
						$J\omega^*z$	0,00

Obliczenia za pomocą programu Mathcad



Zdefiniowanie wartości ω^*
dla poszczególnych punktów:

$$\omega a := -119.5385$$

$$\omega b := -28.6154$$

$$\omega c := 153.2308$$

$$\omega d := 28.6154$$

$$\omega e := 45.6923$$

$$\omega f := -5.5385$$

$$\omega g := -142.1538$$

Zdefiniowanie funkcji ω^*
dla poszczególnych prętów:

$$f\omega 1(x) := \omega a + (\omega c - \omega a)\cdot\frac{x}{18}$$

$$f\omega 2(x) := \omega b + (\omega d - \omega b)\cdot\frac{x}{18}$$

$$f\omega 3(x) := \omega e + (\omega f - \omega e)\cdot\frac{x}{18}$$

$$f\omega 4(x) := \omega f + (\omega g - \omega f)\cdot\frac{x}{9}$$

Zdefiniowanie momentu:

$$Ja(i,j,k) := \int_0^{18} fy1(x)^i\cdot fz1(x)^j\cdot f\omega 1(x)^k\,dx\cdot\delta + \int_0^{18} fy2(x)^i\cdot fz2(x)^j\cdot f\omega 2(x)^k\,dx\cdot\delta + \int_0^{18} fy3(x)^i\cdot fz3(x)^j\cdot f\omega 3(x)^k\,dx\cdot\delta + \int_0^{9} fy4(x)^i\cdot fz4(x)^j\cdot f\omega 4(x)^k\,dx\cdot\delta$$

Wyniki:

$$J\omega y := Ja(1,0,1) = -0.028$$

$$J\omega z := Ja(0,1,1) = -0.036$$

$$J\omega := Ja(0,0,2) = 1.959\times 10^{5}$$

$$S\omega := Ja(0,0,1) = -4.5\times 10^{-4}$$

Wyznaczenie sił krytycznych

$$P_y = EJ_z\alpha^2$$ → przy wyboczeniu giętnym

$$P_z = EJ_y\alpha^2$$ → przy wyboczeniu giętnym

$$P_\omega = \frac{1}{r^2}\left[EJ_\omega\alpha^2 + GK_0\right]$$ → przy wyboczeniu skrętnym

Dla przekroju z dwiema osiami symetrii, kiedy biegun pokrywa się ze środkiem ciężkości:

$$r^2 = \frac{J_y + J_z}{A}$$

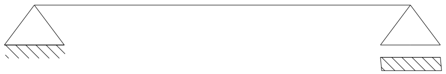
W pozostałych przypadkach:

$$r^2 = \frac{J_y + J_z}{A} + y_A^2 + z_A^2$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{aL} \qquad n = 1 \qquad a \rightarrow$$ zależne od sposobu podparcia

Wartości współczynnika „a”

→ a = 2,0



→ a = 1,0

→ a = 0,7

→ a = 0,5

Obciążenie w dowolnym punkcie o współrzędnych (y_p , z_p)

$$\begin{bmatrix} P-P_y & 0 & P(z_A-z_P) \\ 0 & P-P_z & -P(y_A-y_P) \\ P(z_A-z_P) & -P(y_A-y_P) & \left(P-P_\omega\right)r^2+2C_yM_z-2C_zM_y-C_\omega\dfrac{B}{J_\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_z = Py_P \qquad M_y = -Pz_P$$

$$2C_z = \frac{J_{z^3} - 2J_y z_A + J_{y^2 z}}{J_y}$$

$$2C_y = \frac{J_{y^3} - 2J_z y_A + J_{z^2 y}}{J_z}$$

Gdy ω=0 to bimoment jest zerowy

Wprowadzając zależności otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} P-P_y & 0 & P(z_A-z_P) \\ 0 & P-P_z & -P(y_A-y_P) \\ P(z_A-z_P) & -P(y_A-y_P) & \left(P-P_\omega\right)r^2+2C_yPy_P+2C_zPz_P-C_\omega\dfrac{B}{J_\omega} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

z_A, y_A - współrzędne bieguna

z_P, y_P - współrzędne punktu przyłożenia siły

Obciążenie w dowolnym punkcie o współrzędnych (y_p , z_p)

Rozwiązanie zadania:

$$\begin{vmatrix} P-P_y & 0 & P(z_A-z_P) \\ 0 & P-P_z & -P(y_A-y_P) \\ P(z_A-z_P) & -P(y_A-y_P) & \left(P-P_\omega\right)r^2+2C_yPy_P+2C_zPz_P-C_\omega\dfrac{B}{J_\omega} \end{vmatrix}=0$$

Liczymy wyznacznik i przyrównujemy go do zera, rozwiązaniem wielomianu będą trzy siły krytyczne przy wyboczeniu giętno-skrętnym.

Obciążenie w środku ciężkości (y_p=0 , z_p=0)

Rozwiązanie zadania:

$$\begin{vmatrix} P - P_y & 0 & Pz_A \\ 0 & P - P_z & -Py_A \\ Pz_A & -Py_A & \left(P - P_\omega\right)r^2 \end{vmatrix} = 0$$

$M_z = 0$ $\qquad$ $M_y = 0$

Wyznaczenie sił krytycznych w programie Mathcad

dla belki wspornikowej długości 4m, E=200GPa, G=80GPa,
przy obciążeniu siłą ściskającą w punkcie K_0

Definiowanie współczynników, stałych i sił:

$E := 20000 \qquad G := 8000 \qquad n := 1 \qquad a := 2 \qquad L := 400$

$$\alpha := \frac{(n\cdot\pi)}{(a\cdot L)} = 3.927\times 10^{-3} \qquad A := 63$$

$$Py := E\cdot Jz\cdot\alpha^2 = 550.752 \qquad Pz := E\cdot Jy\cdot\alpha^2 = 1.136\times 10^3$$

$$zA := 4.1853 \qquad yA := -7.5180$$

$$r2 := zA^2 + yA^2 + \frac{(Jy + Jz)}{A} = 160.869$$

$$K0 := 1\cdot\frac{\left(18\cdot 1^3\cdot 3 + 9\cdot 1^3\right)}{3} = 21$$

$$P\omega := \frac{E\cdot J\omega\cdot\alpha^2 + G\cdot K0}{r2} = 1.42\times 10^3$$

dr inż. Hanna Weber

Wyznaczenie sił krytycznych przy obciążeniu siłą ściskającą w punkcie K_0

$yP := -3.2491 \qquad zP := -1.2695$ Współrzędne punktu K_0 w układzie osi obróconych - yz

$$Cy := \frac{Jy3 - 2\cdot Jz\cdot yA + Jz2y}{2\cdot Jz} = 8.367$$

$$Cz := \frac{Jz3 - 2\cdot Jy\cdot zA + Jy2z}{2\cdot Jy} = -4.601$$

$$B := \begin{bmatrix} P - Py & 0 & P\cdot(zA - zP) \\ 0 & P - Pz & -P\cdot(yA - yP) \\ P\cdot(zA - zP) & -P\cdot(yA - yP) & (P - P\omega)\cdot r2 + 2\cdot Cy\cdot P\cdot yP + 2\cdot Cz\cdot P\cdot zP \end{bmatrix}$$

$$\text{Wyznacznik} := |B| \rightarrow 70.200275789076762\cdot P^3 - 383959.48399033378649\, P^2 + 4.5935978165436615 78e8\, P - 1.4296905689340369157e11$$

$$Pkryt := \text{Wyznacznik solve}, P \rightarrow \begin{pmatrix} 1025.7063402077597235 \\ 3939.810255894490463 \\ 503.97023531669828303 \end{pmatrix}$$

Wyniki:

$$Pmin := \begin{pmatrix} Py \\ Pz \\ P\omega \\ Pkryt_0 \\ Pkryt_1 \\ Pkryt_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550.752 \\ 1.136\times 10^3 \\ 1.42\times 10^3 \\ 1.026\times 10^3 \\ 3.94\times 10^3 \\ 503.97 \end{pmatrix}$$

$$Pkrytyczna := Pmin_5 \rightarrow 503.97023531669828 \text{kN}$$

Literatura:

- P. Jastrzębski, J. Mutermilch, W. Orłowski : *Wytrzymałość Materiałów. Cz.2,* Arkady, Warszawa 1986

- K. Rykaluk: *Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych*, DWE, Wrocław 2012