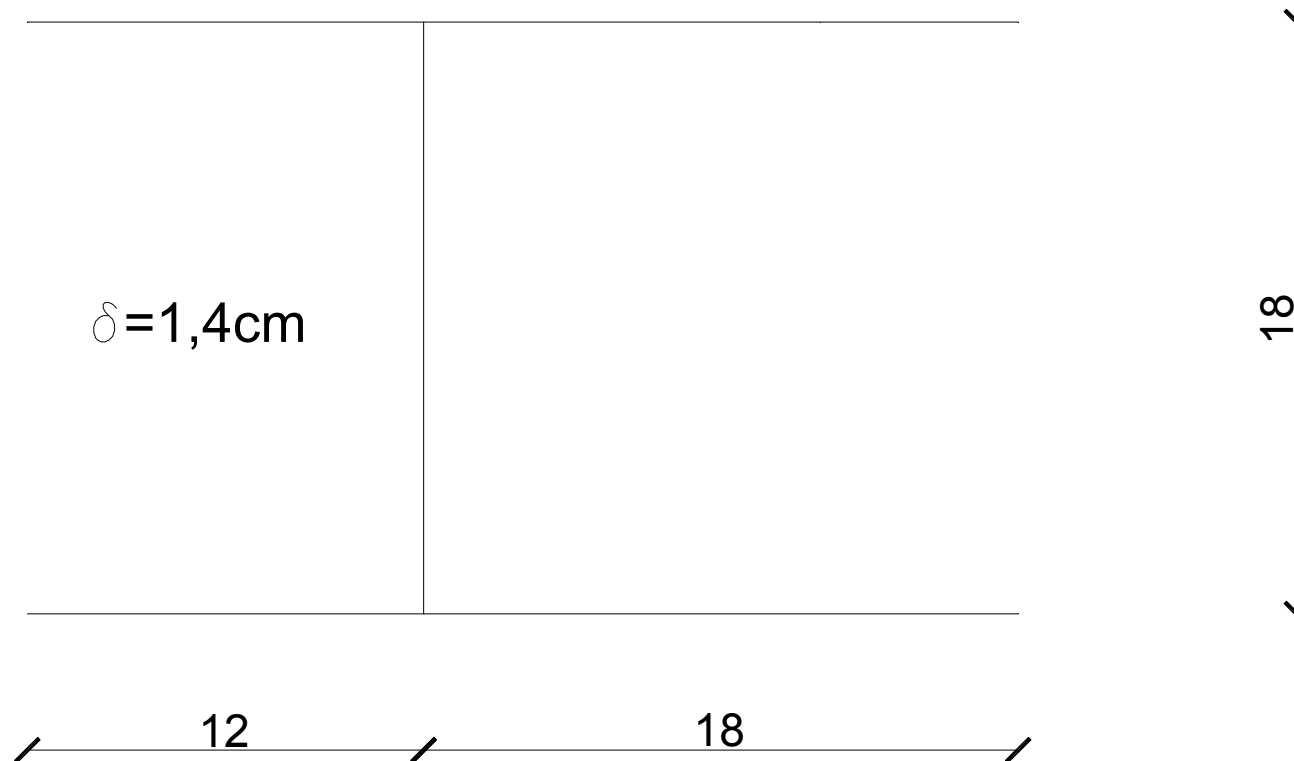
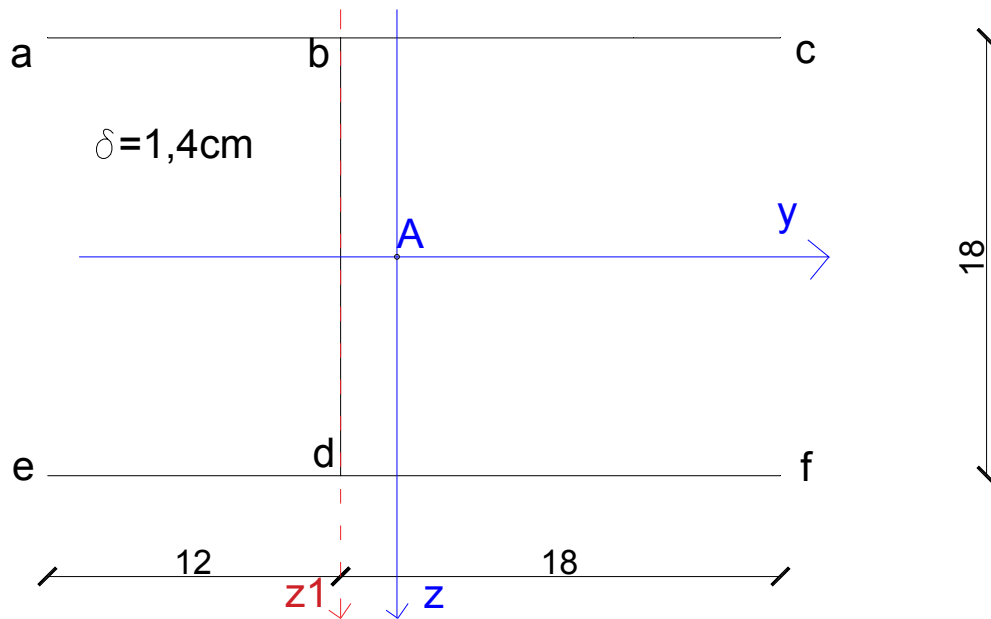


Zadanie: Wyznaczyć charakterystyki dla poniższego symetrycznego przekroju cienkościennego.





Wyznaczenie środka ciężkości

$$\sum A_i = 30 \cdot 1,4 \cdot 2 + 18 \cdot 1,4 = 109,2 \text{ cm}^2$$

Współrzędne w układzie osi yz:

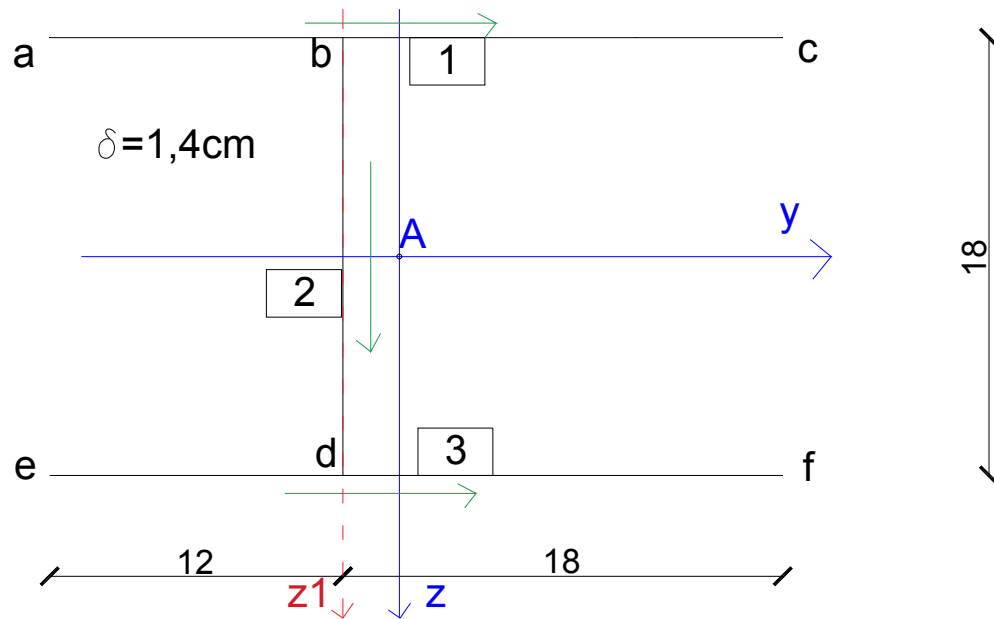
$$z = z1 - zc$$

$$y = y1 - yc$$

	a	b	c	d	e	f
z1=z	-9	-9	-9	9	9	9
y1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,307692308	15,69231	-2,307692	-14,308	15,69231

$$z_c = \frac{\sum z_{ci} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{30 \cdot 1,4 \cdot (-9) + 30 \cdot 1,4 \cdot 9 + 18 \cdot 1,4 \cdot 0}{109,2} = 0 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{\sum y_{ci} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{30 \cdot 1,4 \cdot (3) \cdot 2 + 18 \cdot 1,4 \cdot 0}{109,2} = 2,308 \text{ cm}$$



obliczenie momentów bezwładności względem osi głównych centralnych

$$J_y = \int z^2 dA = \delta \int z^2 dx$$

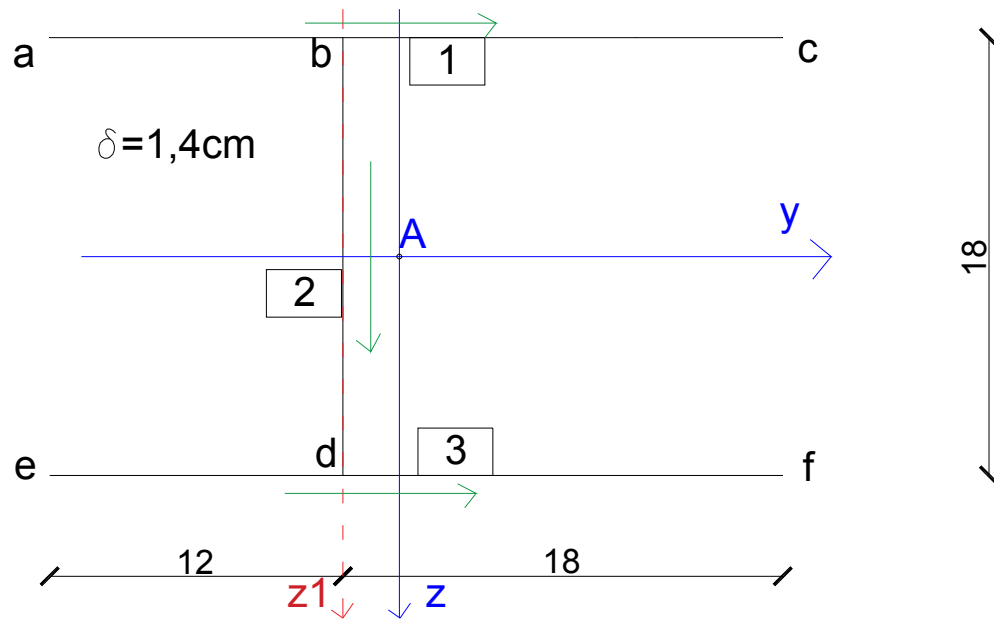
$$J_z = \int y^2 dA = \delta \int y^2 dx$$

$$J_{yz} = \int yz dA = \delta \int yz dx$$

	a	b	c	d	e	f
z1=z	-9	-9	-9	9	9	9
y1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,307692308	15,69231	-2,307692	-14,308	15,69231

Jz:							
wsp. Y							
pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-14,3077	15,69230769	-14,3077	15,692308	30	1,4	3170,13
2	-2,30769	-2,307692308	-2,30769	-2,307692	18	1,4	134,2012
3	-14,3077	15,69230769	-14,3077	15,692308	30	1,4	3170,13
						suma	6474,462

cm⁴



obliczenie momentów bezwładności względem osi głównych centralnych

$$J_y = \int z^2 dA = \delta \int z^2 dx$$

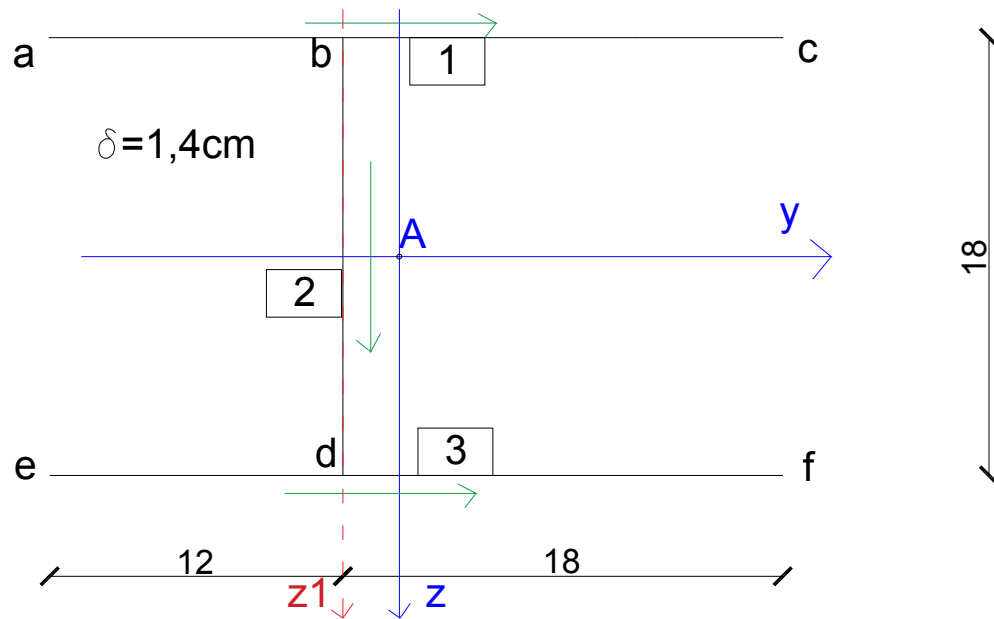
$$J_z = \int y^2 dA = \delta \int y^2 dx$$

$$J_{yz} = \int yz dA = \delta \int yz dx$$

	a	b	c	d	e	f
z1=z	-9	-9	-9	9	9	9
y1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,307692308	15,69231	-2,307692	-14,308	15,69231

Jy:							
wsp.z							
pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-9	-9	-9	-9	30	1,4	3402
2	-9	9	-9	9	18	1,4	680,4
3	9	9	9	9	30	1,4	3402
						suma	7484,4

cm4



obliczenie momentów bezwładności względem osi głównych centralnych

$$J_y = \int z^2 dA = \delta \int z^2 dx$$

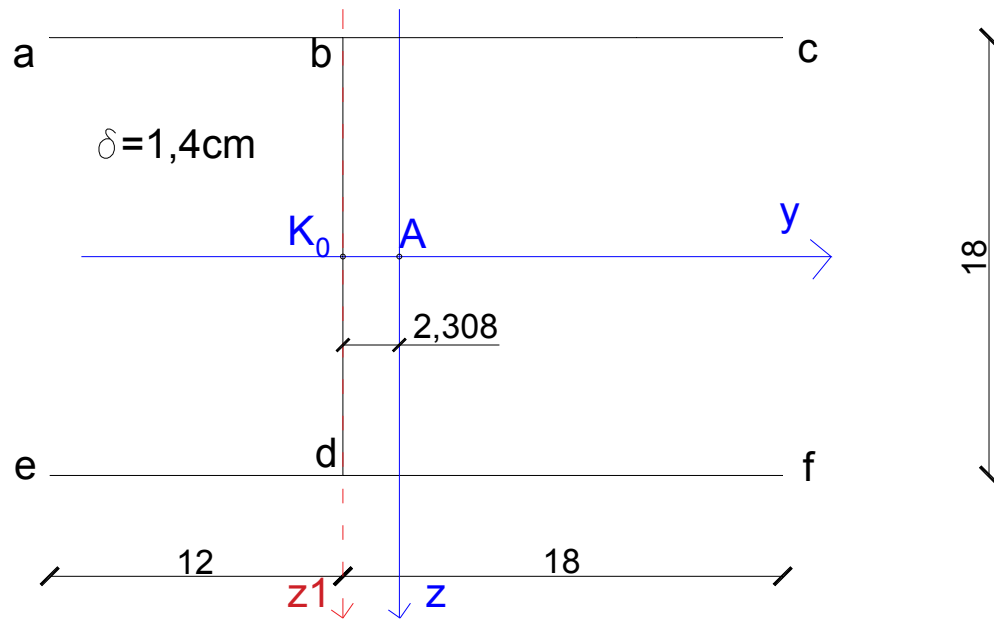
$$J_z = \int y^2 dA = \delta \int y^2 dx$$

$$J_{yz} = \int yz dA = \delta \int yz dx$$

	a	b	c	d	e	f
z1=z	-9	-9	-9	9	9	9
y1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,307692308	15,69231	-2,307692	-14,308	15,69231

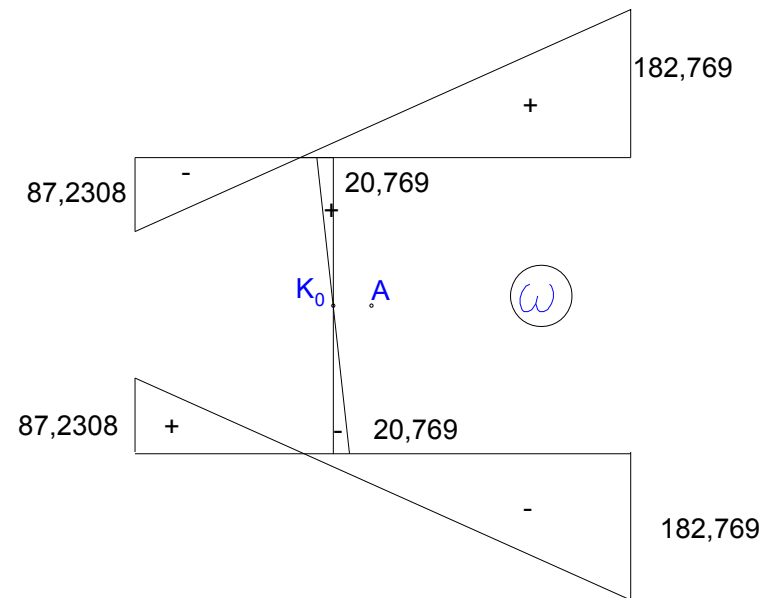
Jyz:							
wsp. y z							
pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-14,3077	15,69230769	-9	-9	30	1,4	-261,692
2	-2,30769	-2,307692308	-9	9	18	1,4	0
3	-14,3077	15,69230769	9	9	30	1,4	261,6923
						suma	0

cm⁴



Wyznaczenie wykresu ω dla środka ciężkości jako bieguna

	a	b	c	d	e	f
z1=z	-9	-9	-9	9	9	9
y1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,3077	15,6923	-2,3077	-14,308	15,6923
omega	-87,2308	20,7692	182,7692	-20,7692	87,231	-182,769



Wyznaczenie współrzędnych bieżuna

$$z_A^* = z_A - \frac{J_{\omega y}}{J_z}$$

$$y_A^* = y_A + \frac{J_{\omega z}}{J_y}$$

Jeżeli zaczynamy liczyć wstępnie ω dla środka ciężkości to:

$$z_A^* = -\frac{J_{\omega y}}{J_z}$$

$$y_A^* = \frac{J_{\omega z}}{J_y}$$

	a	b	c	d	e	f
z1=z	-9	-9	-9	9	9	9
y1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,3077	15,6923	-2,3077	-14,308	15,6923
omega	-87,2308	20,7692	182,7692	-20,7692	87,231	-182,769

$J\omega z$:

pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-87,2308	182,7692	-9	-9	30	1,4	-18056,8
2	20,76923	-20,7692	-9	9	18	1,4	-1570,15
3	87,23077	-182,769	9	9	30	1,4	-18056,8
						suma	-37683,7

cm5

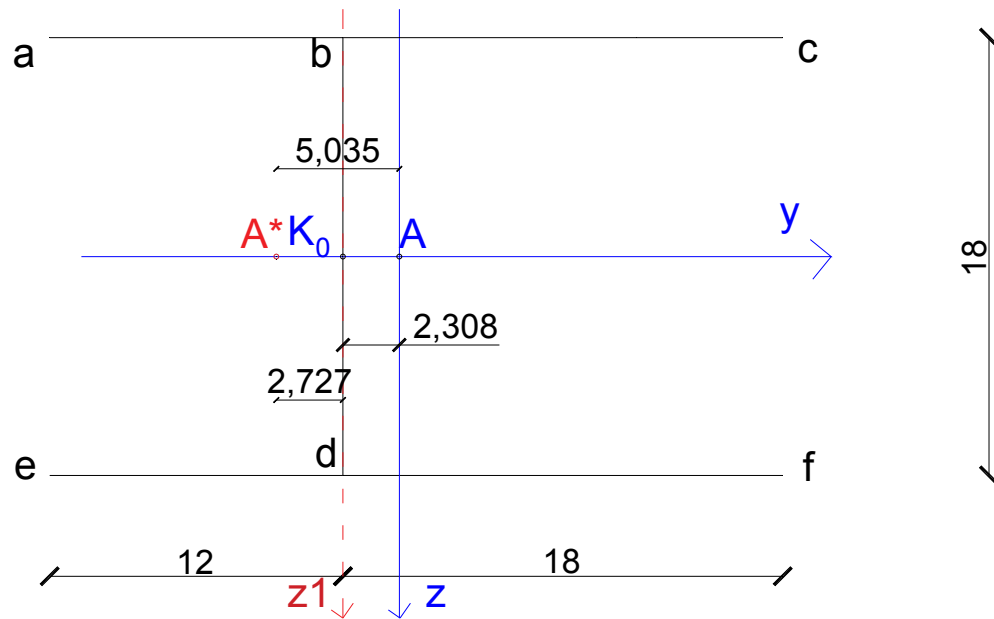
$J\omega y$:

pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-87,2308	182,7692	-14,3077	15,69231	30	1,4	29738,98
2	20,76923	-20,7692	-2,30769	-2,30769	18	1,4	0
3	87,23077	-182,769	-14,3077	15,69231	30	1,4	-29739
						suma	0

cm5

Podstawiając otrzymane wyniki uzyskujemy:

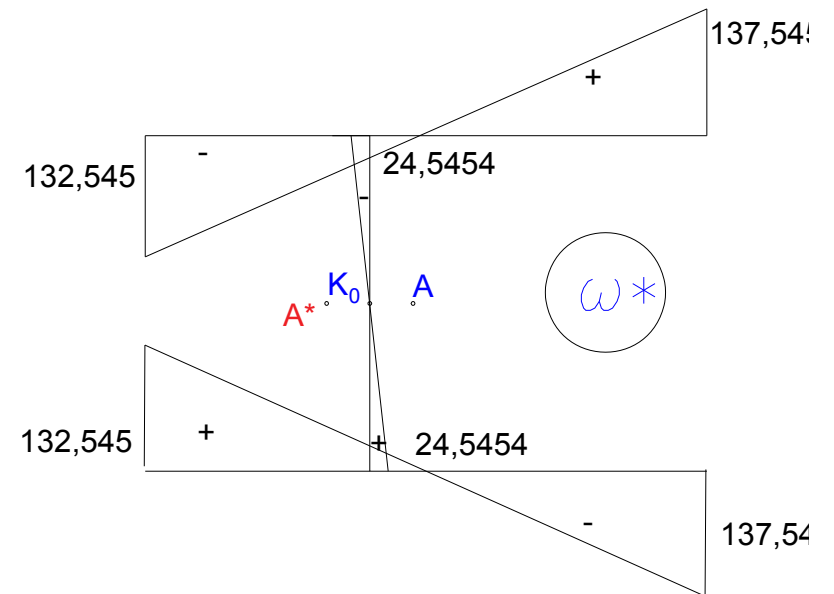
$zA^*=$	0
$yA^*=$	-5,035



Wyznaczenie wykresu ω^*
dla bieguna A^*

$z_{A^*} =$	0
$y_{A^*} =$	-5,035

	a	b	c	d	e	f
$z_1 = z$	-9	-9	-9	9	9	9
y_1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,3077	15,6923	-2,3077	-14,308	15,6923
ω	-87,2308	20,7692	182,7692	-20,7692	87,231	-182,769
ω^*	-132,545	-24,5454	137,4545	24,5454	132,55	-137,455



Sprawdzenie poprawności przyjęcia bieguna

	a	b	c	d	e	f
z1=z	-9	-9	-9	9	9	9
y1	-12	0	18	0	-12	18
y	-14,3077	-2,3077	15,6923	-2,3077	-14,308	15,6923
omega	-87,2308	20,7692	182,7692	-20,7692	87,231	-182,769
omega*	-132,545	-24,5454	137,4545	24,5454	132,55	-137,455

$J\omega*z$:

pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-132,545	137,4545	-9	-9	30	1,4	-927,818
2	-24,5455	24,54545	-9	9	18	1,4	1855,636
3	132,5455	-137,455	9	9	30	1,4	-927,818
suma							7,5E-12

$J\omega*y$:

pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-132,545	137,4545	-14,3077	15,69231	30	1,4	28421,37
2	-24,5455	24,54545	-2,30769	-2,30769	18	1,4	0
3	132,5455	-137,455	-14,3077	15,69231	30	1,4	-28421,4
suma							0

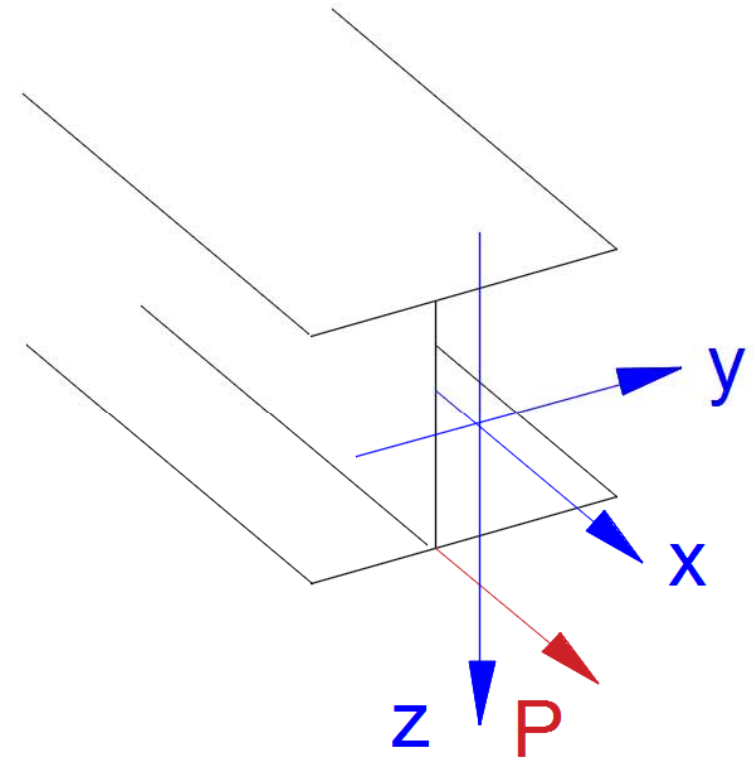
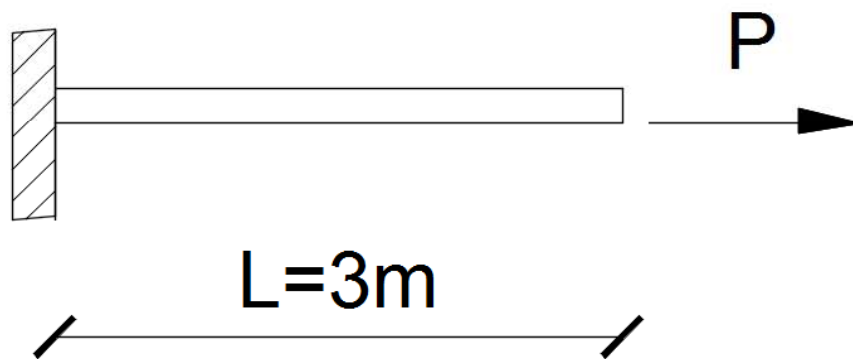
$J\omega*$:

pręt	A	B	C	D	L	δ	całka
1	-132,545	137,4545	-132,545	137,4545	30	1,4	255403
2	-24,5455	24,54545	-24,5455	24,54545	18	1,4	5060,826
3	132,5455	-137,455	132,5455	-137,455	30	1,4	255403
suma							515866,9

cm6

dr inż. Hanna Weber

Zadanie 2. Dla belki z zadania 1 obciążonej jak na rysunku rozciągającą siłą $P=2000\text{N}$, wyznaczyć wartości kąta skręcenia po długości belki i narysować wykresy M_v , M_ω , B i Θ .

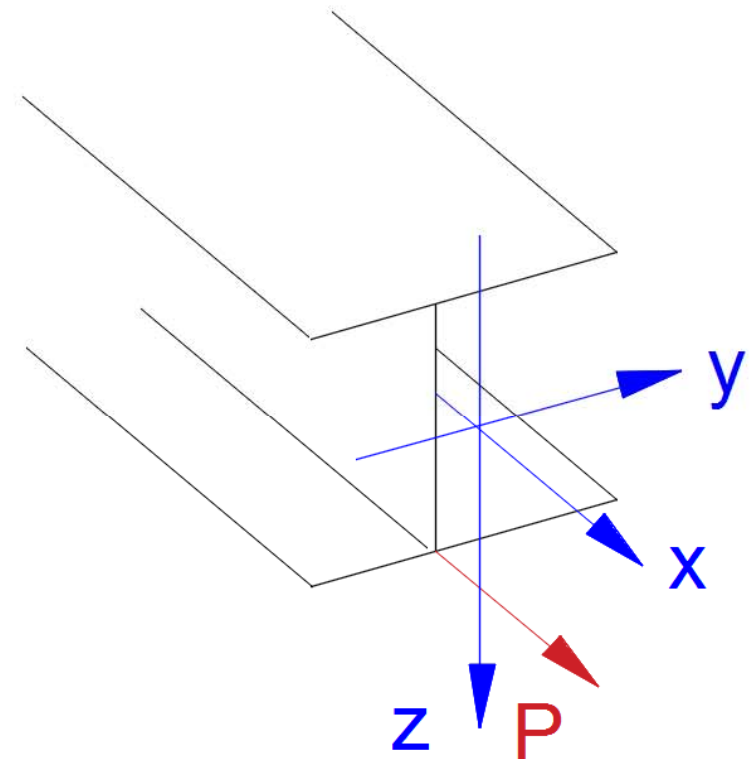
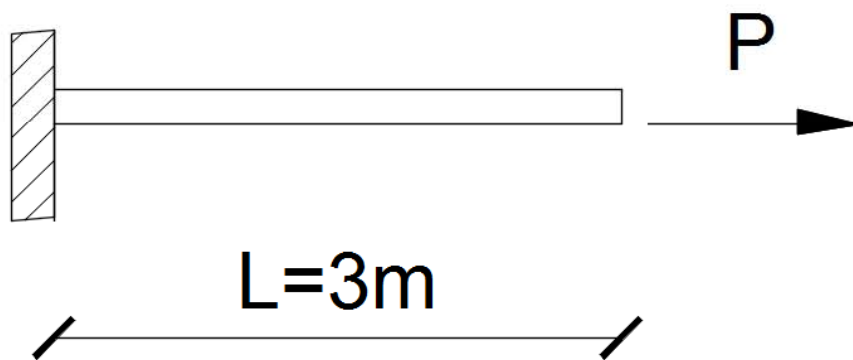


Podstawowe dane:

Jy	7,48E-05 m ⁴
Jz	6,47E-05 m ⁴
Jomega*	5,16E-07 m ⁶
E	2,00E+11 N/m ²
G	8,00E+10 N/m ²
alfa	7,44E-01
Ko	7,13E-07

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot K_0}{E \cdot J_{\omega^*}}}$$

$$K_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 L_i \cdot \delta_i^3$$



Podstawowe dane:

Jy	7,48E-05 m4
Jz	6,47E-05 m4
Jomega*	5,16E-07 m6
E	2,00E+11 N/m2
G	8,00E+10 N/m2
alfa	7,44E-01
Ko	7,13E-07

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot K_0}{E \cdot J_{\omega^*}}}$$

$$K_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 L_i \cdot \delta_i^3$$

Równanie kąta skręcenia i jego pochodne:

$$\Theta = A + B \cdot x + C \cosh(\alpha x) + D \sinh(\alpha x)$$

$$\Theta' = B + C \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha x) + D \cdot \alpha \cdot \cosh(\alpha x)$$

$$\Theta'' = C \cdot \alpha^2 \cdot \cosh(\alpha x) + D \cdot \alpha^2 \cdot \sinh(\alpha x)$$

$$\Theta''' = C \cdot \alpha^3 \cdot \sinh(\alpha x) + D \cdot \alpha^3 \cdot \cosh(\alpha x)$$

Stałe A, B, C, D wyznaczamy na podstawie warunków brzegowych:

$$x = 0 \rightarrow \Theta(x) = 0, \Theta'(x) = 0$$

$$x = L \rightarrow \Theta'' = -\frac{B}{EJ_{\omega^*}} \text{ gdzie } B = P \cdot \omega_d^*$$

$$M_x = GK_0 \cdot \Theta'(x) - EJ_{\omega^*} \cdot \Theta'''(x) = 0$$

Podstawowe dane:

Jy	7,48E-05 m4
Jz	6,47E-05 m4
Jomega*	5,16E-07 m6
E	2,00E+11 N/m2
G	8,00E+10 N/m2
alfa	7,44E-01
Ko	7,13E-07

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot K_0}{E \cdot J_{\omega^*}}}$$

$$K_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 L_i \cdot \delta_i^3$$

Wyznaczenie stałych całkowania:

A	B	C	D
1	0	1	0
0	1	0,00E+00	7,44E-01
0	0	2,61E+00	2,55E+00
0	5,71E+04	0,00E+00	0,00E+00

0
0,00E+00
-4,76E-05
0

1	1,313842	-0,38382	-2,3E-05
0	0	0	1,75E-05
0	-1,31384	0,383815	2,3E-05
0	1,344498	0	-2,4E-05

1,83E-05A
0B
-1,8E-05C
0D

Podstawowe dane:

Jy	7,48E-05 m4
Jz	6,47E-05 m4
Jomega*	5,16E-07 m6
E	2,00E+11 N/m2
G	8,00E+10 N/m2
alfa	7,44E-01
Ko	7,13E-07

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot K_0}{E \cdot J_{\omega^*}}}$$

$$K_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 L_i \cdot \delta_i^3$$

Równanie kąta skręcenia i jego pochodne:

$$\Theta = A + B \cdot x + C \cosh(\alpha x) + D \sinh(\alpha x)$$

$$\Theta' = B + C \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha x) + D \cdot \alpha \cdot \cosh(\alpha x)$$

$$\Theta'' = C \cdot \alpha^2 \cdot \cosh(\alpha x) + D \cdot \alpha^2 \cdot \sinh(\alpha x)$$

$$\Theta''' = C \cdot \alpha^3 \cdot \sinh(\alpha x) + D \cdot \alpha^3 \cdot \cosh(\alpha x)$$

1,83E-05	A
0	B
-1,8E-05	C
0	D

Bimoment – $B = -EJ_{\omega^*} \cdot \Theta''(x)$

Moment giętno-krętny – $M_{\omega} = -EJ_{\omega^*} \cdot \Theta'''(x)$

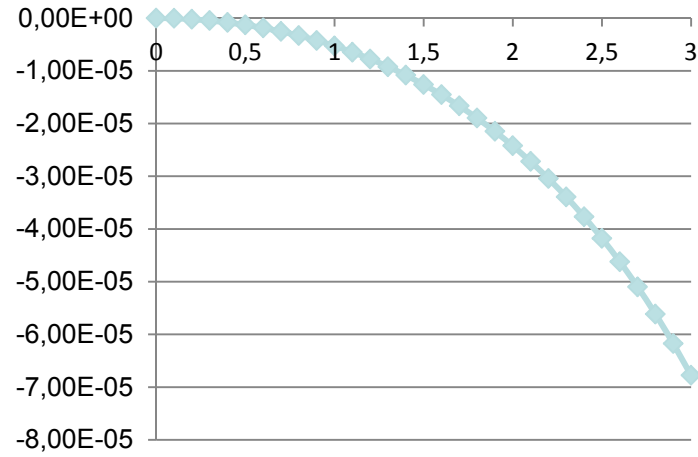
Moment czystego skręcania $M_v = GK_0 \Theta'(x)$

Obliczenia

X	ALFAX	TETA	teta'	teta''	teta'''	Mv	Momega	B
0	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	-1,01E-05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,04E+00
0,1	7,44E-02	-5,05E-08	-1,01E-06	-1,01E-05	-5,59E-07	-5,77E-02	5,77E-02	1,05E+00
0,2	1,49E-01	-2,02E-07	-2,03E-06	-1,02E-05	-1,12E-06	-1,16E-01	1,16E-01	1,05E+00
0,3	2,23E-01	-4,57E-07	-3,06E-06	-1,04E-05	-1,69E-06	-1,74E-01	1,74E-01	1,07E+00
0,4	2,98E-01	-8,14E-07	-4,10E-06	-1,06E-05	-2,27E-06	-2,34E-01	2,34E-01	1,09E+00
0,5	3,72E-01	-1,28E-06	-5,17E-06	-1,08E-05	-2,86E-06	-2,95E-01	2,95E-01	1,12E+00
0,6	4,46E-01	-1,85E-06	-6,26E-06	-1,11E-05	-3,47E-06	-3,58E-01	3,58E-01	1,15E+00
0,7	5,21E-01	-2,53E-06	-7,40E-06	-1,15E-05	-4,09E-06	-4,22E-01	4,22E-01	1,19E+00
0,8	5,95E-01	-3,33E-06	-8,57E-06	-1,19E-05	-4,74E-06	-4,89E-01	4,89E-01	1,23E+00
0,9	6,69E-01	-4,25E-06	-9,79E-06	-1,25E-05	-5,41E-06	-5,59E-01	5,59E-01	1,28E+00
1	7,44E-01	-5,29E-06	-1,11E-05	-1,30E-05	-6,12E-06	-6,31E-01	6,31E-01	1,34E+00
1,1	8,18E-01	-6,46E-06	-1,24E-05	-1,37E-05	-6,86E-06	-7,07E-01	7,07E-01	1,41E+00
1,2	8,93E-01	-7,77E-06	-1,38E-05	-1,44E-05	-7,63E-06	-7,88E-01	7,88E-01	1,49E+00
1,3	9,67E-01	-9,22E-06	-1,53E-05	-1,52E-05	-8,45E-06	-8,72E-01	8,72E-01	1,57E+00
1,4	1,04E+00	-1,08E-05	-1,68E-05	-1,61E-05	-9,32E-06	-9,61E-01	9,61E-01	1,66E+00
1,5	1,12E+00	-1,26E-05	-1,85E-05	-1,71E-05	-1,02E-05	-1,06E+00	1,06E+00	1,76E+00
1,6	1,19E+00	-1,45E-05	-2,03E-05	-1,81E-05	-1,12E-05	-1,16E+00	1,16E+00	1,87E+00
1,7	1,26E+00	-1,66E-05	-2,21E-05	-1,93E-05	-1,22E-05	-1,26E+00	1,26E+00	1,99E+00
1,8	1,34E+00	-1,90E-05	-2,41E-05	-2,06E-05	-1,33E-05	-1,38E+00	1,38E+00	2,12E+00
1,9	1,41E+00	-2,15E-05	-2,63E-05	-2,20E-05	-1,45E-05	-1,50E+00	1,50E+00	2,27E+00
2	1,49E+00	-2,42E-05	-2,85E-05	-2,35E-05	-1,58E-05	-1,63E+00	1,63E+00	2,42E+00
2,1	1,56E+00	-2,72E-05	-3,10E-05	-2,51E-05	-1,71E-05	-1,77E+00	1,77E+00	2,59E+00
2,2	1,64E+00	-3,04E-05	-3,36E-05	-2,69E-05	-1,86E-05	-1,92E+00	1,92E+00	2,78E+00
2,3	1,71E+00	-3,39E-05	-3,63E-05	-2,89E-05	-2,01E-05	-2,07E+00	2,07E+00	2,98E+00
2,4	1,79E+00	-3,77E-05	-3,93E-05	-3,10E-05	-2,18E-05	-2,25E+00	2,25E+00	3,19E+00
2,5	1,86E+00	-4,18E-05	-4,25E-05	-3,32E-05	-2,35E-05	-2,43E+00	2,43E+00	3,43E+00
2,6	1,93E+00	-4,62E-05	-4,60E-05	-3,57E-05	-2,54E-05	-2,62E+00	2,62E+00	3,68E+00
2,7	2,01E+00	-5,10E-05	-4,97E-05	-3,83E-05	-2,75E-05	-2,84E+00	2,84E+00	3,95E+00
2,8	2,08E+00	-5,62E-05	-5,37E-05	-4,12E-05	-2,97E-05	-3,06E+00	3,06E+00	4,25E+00
2,9	2,16E+00	-6,17E-05	-5,79E-05	-4,43E-05	-3,20E-05	-3,31E+00	3,31E+00	4,57E+00
3	2,23E+00	-6,77E-05	-6,25E-05	-4,76E-05	-3,46E-05	-3,57E+00	3,57E+00	4,91E+00

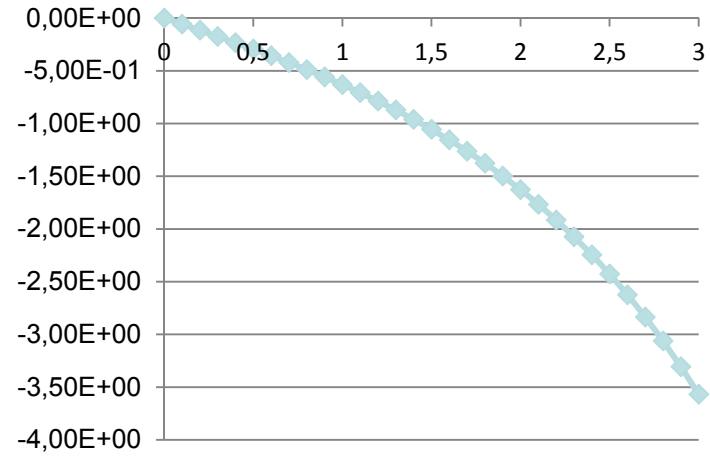
wykresy

teta (x)



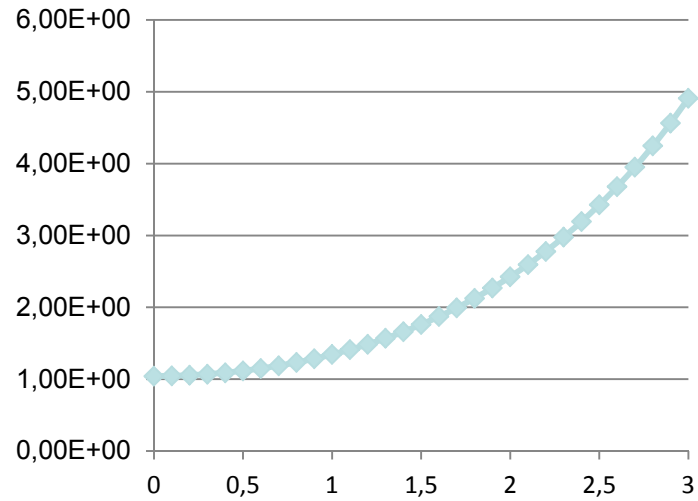
teta (x)

Mv [Nm]



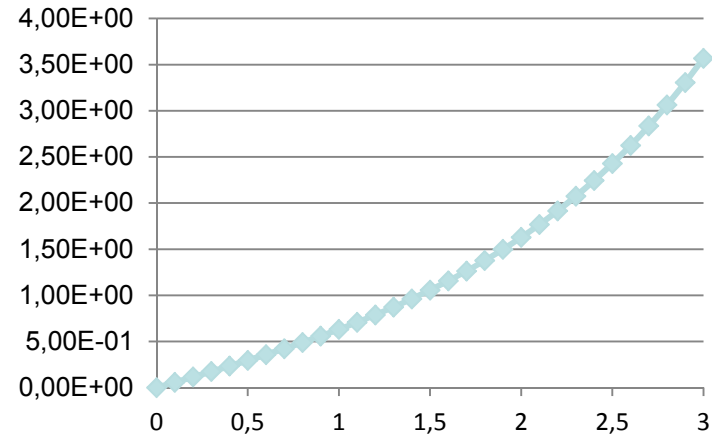
Mv [Nm]

B



B

Momega



Momega

Literatura:

- P. Jastrzębski, J. Mutermilch, W. Orłowski : *Wytrzymałość Materiałów. Cz.2*, Arkady, Warszawa 1986
- K. Rykaluk: *Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych*, DWE, Wrocław 2012