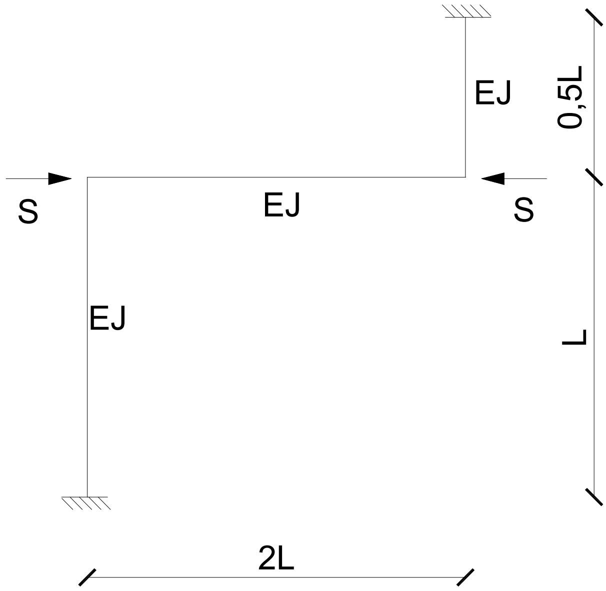
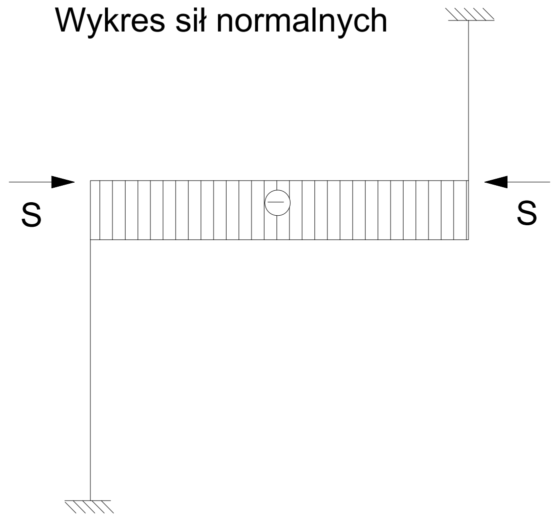
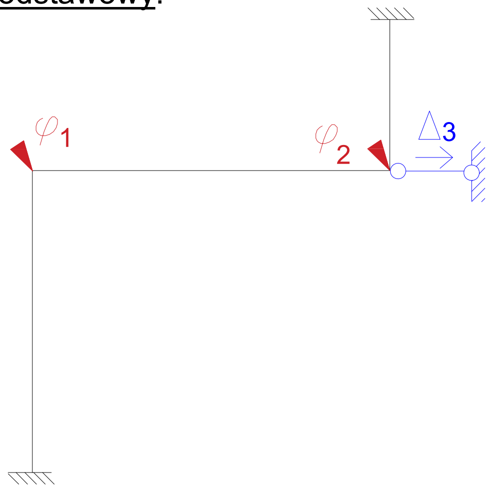
Stateczność

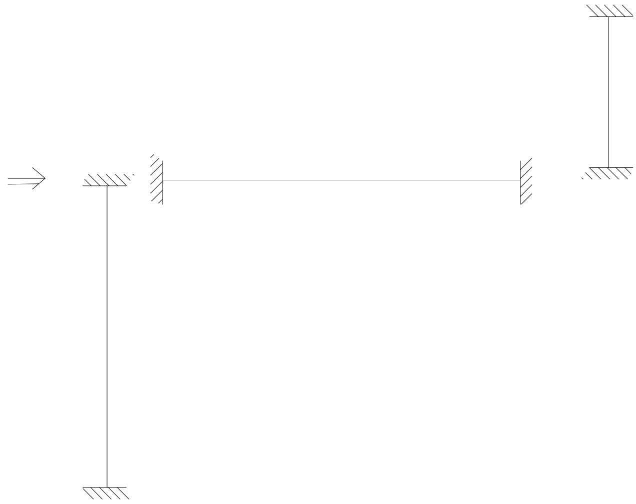
Polecenie: *Wyznaczyć wartość siły krytycznej dla poniższego schematu:*



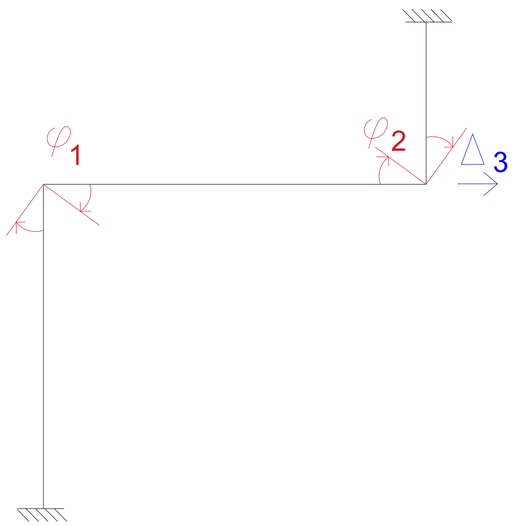


Schemat podstawowy:





Możliwe przemieszczenia w układzie:

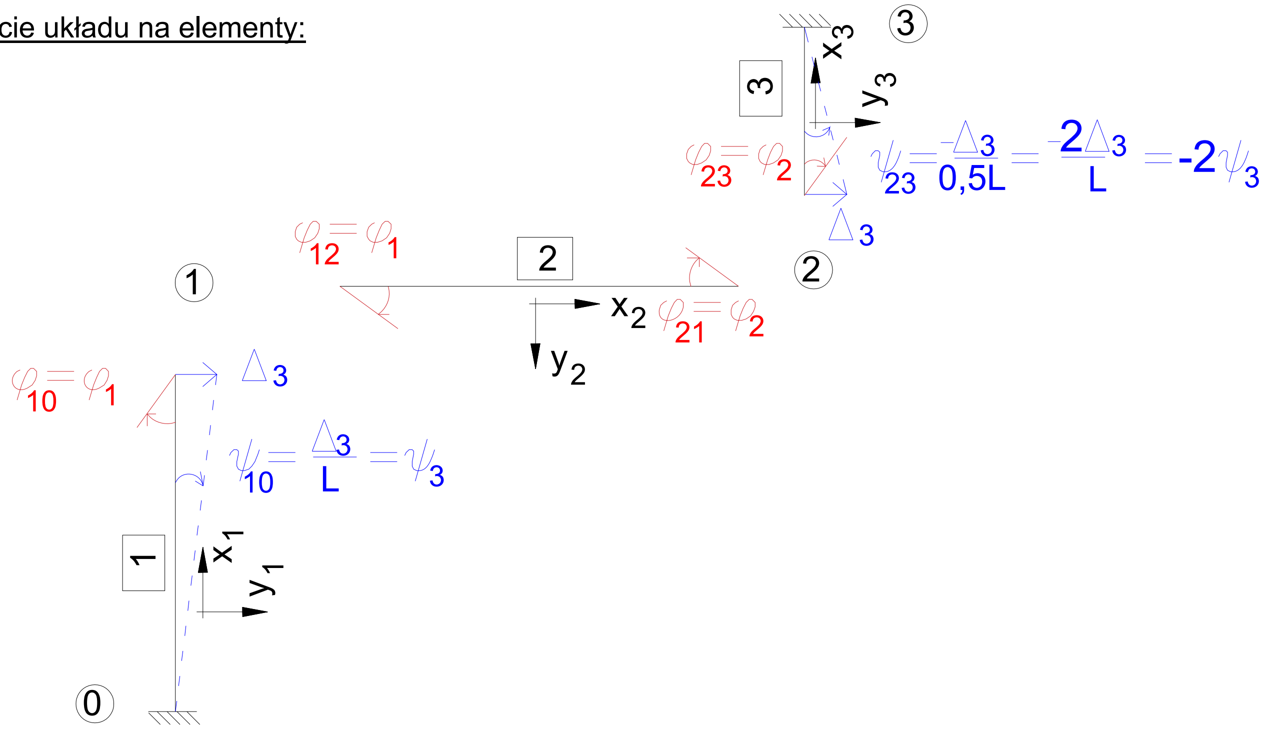


$$ng = 3(\varphi_1, \varphi_2, \Delta_3)$$

Minimalna baza przemieszczeń:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \quad \text{, gdzie} \quad \psi_3 = \frac{\Delta_3}{L}$$

Rozbicie układu na elementy:



Wektory przemieszczeń końców elementów:

$$\bar{q}_1=\begin{bmatrix}0\\ \varphi_{10}\\ \psi_{10}\end{bmatrix}\rightarrow\bar{q}_1=\begin{bmatrix}\varphi_{10}\\ \psi_{10}\end{bmatrix}\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}$$

$$\bar{q}_2=\begin{bmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{21}\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow\bar{q}_2=\begin{bmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{21}\end{bmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

$$\bar{q}_3=\begin{bmatrix}\varphi_{23}\\ 0\\ \psi_{23}\end{bmatrix}\rightarrow\bar{q}_3=\begin{bmatrix}\varphi_{23}\\ \psi_{23}\end{bmatrix}\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}$$

Zbiorczy wektor przemieszczeń:

$$\bar{q}_A=\begin{bmatrix}\bar{q}_1\\ \bar{q}_2\\ \bar{q}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_{10}\\ \psi_{10}\\ \varphi_{12}\\ \varphi_{21}\\ \varphi_{23}\\ \psi_{23}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}}_{A}x\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \psi_3\end{bmatrix}$$

Macierze sztywności elementów:

$$K_1^*=K_{1e}=\frac{EI}{L}\begin{bmatrix}4&-6\\-6&12\end{bmatrix}$$

$$K_2^* = K_{2e} - K_{2G} = \frac{EI}{2L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - S \cdot 2L \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{S \cdot 2L}{30} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EI}{L}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{S \cdot L^2}{15EI} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

Założenie $\quad \frac{S \cdot L^2}{15EI} = \mu \rightarrow K_2^* = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 2-4\mu & 1+\mu \\ 1+\mu & 2-4\mu \end{bmatrix}$

$$K_3^* = K_{3e} = \frac{EI}{0{,}5L}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix}$$

<u>Zbiorcza macierz sztywności</u>:

$$K_A^* = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} K_1^* & 0 & 0 \\ 0 & K_2^* & 0 \\ 0 & 0 & K_3^* \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4\mu & 1+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu & 2-4\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 24 \end{bmatrix}$$

<u>Wyznaczenie macierzy sztywności układu:</u>

$$K^* = A^T \cdot K_A^* \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4\mu & 1+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu & 2-4\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2-4\mu & 1+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mu & 2-4\mu & 8 & -12 \\ -6 & 12 & 0 & 0 & 24 & -48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 6-4\mu & 1+\mu & -6 \\ 1+\mu & 10-4\mu & 24 \\ -6 & 24 & 108 \end{bmatrix}$$

<u>Wyznaczenie współczynnika wyboczeniowego:</u>

$$K^* \cdot \bar{q} = 0 \Rightarrow \left|K^*\right| = 0$$

Wyznacznik z macierzy sztywności - otrzymanie wielomianu:

$$\left|K^*\right| = \begin{vmatrix} 6-4\mu & 1+\mu & -6 \\ 1+\mu & 10-4\mu & 24 \\ -6 & 24 & 108 \end{vmatrix} = 1620\mu^2 - 4968\mu + 2268 = 0$$

Pierwiastki wielomianu:

$$\left.\begin{matrix} \mu_1 = 0{,}558 \\ \mu_2 = 2{,}509 \end{matrix}\right\} \rightarrow \mu_{min.} = 0{,}558$$

Wyznaczenie wartości siły krytycznej dla układu:

$$\frac{S \cdot L^2}{15EI} = \mu \rightarrow S_{kryt.} = \frac{\mu_{min.} \cdot 15EI}{L^2} = \frac{0{,}558 \cdot 15EI}{L^2} = \frac{8{,}37EI}{L^2}$$