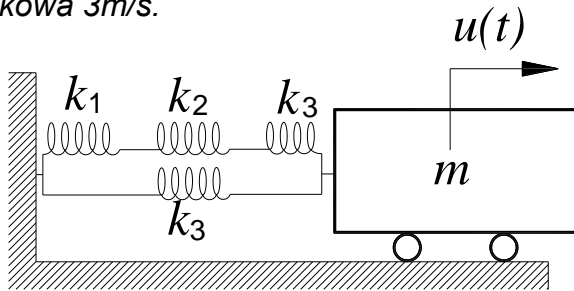


## Drgania własne układów o jednym dynamicznym stopniu swobody

**Zadanie 1.:** Wyznaczyć równanie ruchu drgań własnych dla układu z rysunku w postaci  $u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , jeżeli przemieszczenie początkowe masy wynosiło 5cm, a prędkość początkowa 3m/s.



$$\begin{aligned} k_1 &= 4 \text{ N/m} \\ k_2 &= 3 \text{ N/m} \\ k_3 &= 2 \text{ N/m} \\ m &= \frac{1}{494\pi^2} \text{ kg} \end{aligned}$$

Sztywność połączenia sprężyn:

Sprężyny  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  są połączone szeregowo:

$$\frac{1}{k_{123}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{k_2 \cdot k_3 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_1}{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}$$

$$k_{123} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{k_2 \cdot k_3 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \text{ N/m}$$

Wyznaczenie sztywności całego połączenia - sprężyny górne i dolna są połączone równolegle:

$$k = k_{123} + k_3 = \frac{12}{13} + 2 = \frac{38}{13} \text{ N/m}$$

Częstość kołowa drgań własnych układu:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{38}{13} \cdot \frac{494\pi^2}{1}} = 38\pi [\text{rad/s}]$$

Równanie ruchu:

Warunki początkowe:  $u(0) = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$  - przemieszczenie  
 $\dot{u}(0) = 3 \text{ m/s}$  - prędkość

Wyznaczenie stałych całkowania:

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \rightarrow u(0) = \underbrace{A \cos(0)}_1 + \underbrace{B \sin(0)}_0 = 0,05$$

$$A = 0,05$$

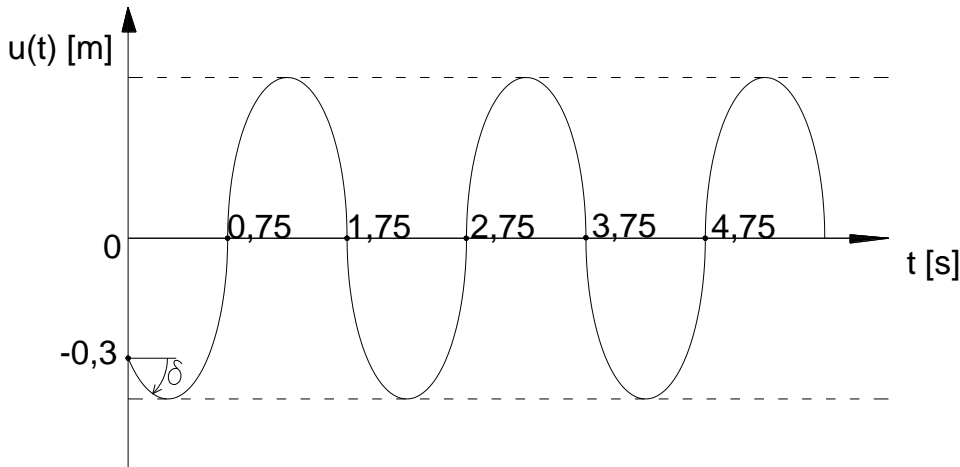
Pochodna równania ruchu :  $\dot{u}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$

$$\dot{u}(0) = -A\omega \underbrace{\sin(0)}_0 + B\omega \underbrace{\cos(0)}_1 = 3 \rightarrow B = \frac{3}{\omega} = \frac{3}{38\pi} = 0,025$$

Równanie ruchu ma postać:

$$u(t) = 0,05 \cos(38\pi \cdot t) + 0,025 \sin(38\pi \cdot t)$$

**Zadanie 2.:** Wyznaczyć równanie ruchu drgań własnych dla układu o jednym dynamicznym stopniu swobody w postaci  $u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , dla przebiegu drgań opisanego na rysunku. Określić wartość masy jeżeli sztywność połączenia wynosi  $10\text{N/m}$ .



$$\operatorname{tg}(\delta) = -\frac{\pi}{4}$$

Dane odczytane na podstawie rysunku:

- okres drgań – czas jednego pełnego wahnięcia układu:  $T = 2\text{ s}$ ;
- warunki początkowe: - przemieszczenie  $u(0) = -0,3\text{ m}$
- prędkość  $\dot{u}(0) = \operatorname{tg}(\delta) = -\frac{\pi}{4}$

Wyznaczenie częstości kołowej drgań własnych wykorzystując okresu drgań:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi [\text{rad} / \text{s}]$$

Wyznaczenie stałych całkowania na podstawie warunków początkowych:

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \rightarrow u(0) = \underbrace{A \cos(0)}_1 + \underbrace{B \sin(0)}_0 = -0,3$$

$$A = -0,3$$

Pochodna równania ruchu :  $\dot{u}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$

$$\dot{u}(0) = -A\omega \underbrace{\sin(0)}_0 + B\omega \underbrace{\cos(0)}_1 = -\frac{\pi}{4} \rightarrow B = -\frac{\pi}{4\omega} = -\frac{\pi}{4\pi} = -0,25$$

Równanie ruchu ma postać:

$$u(t) = -0,3 \cos(\pi \cdot t) - 0,25 \sin(\pi \cdot t)$$

Wyznaczenie wartości masy na podstawie wzoru na częstość kołową drgań własnych:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{10}{\pi^2} [\text{kg}]$$

Odp. : Wartość masy wynosi  $10 / \pi^2 [\text{kg}]$ .