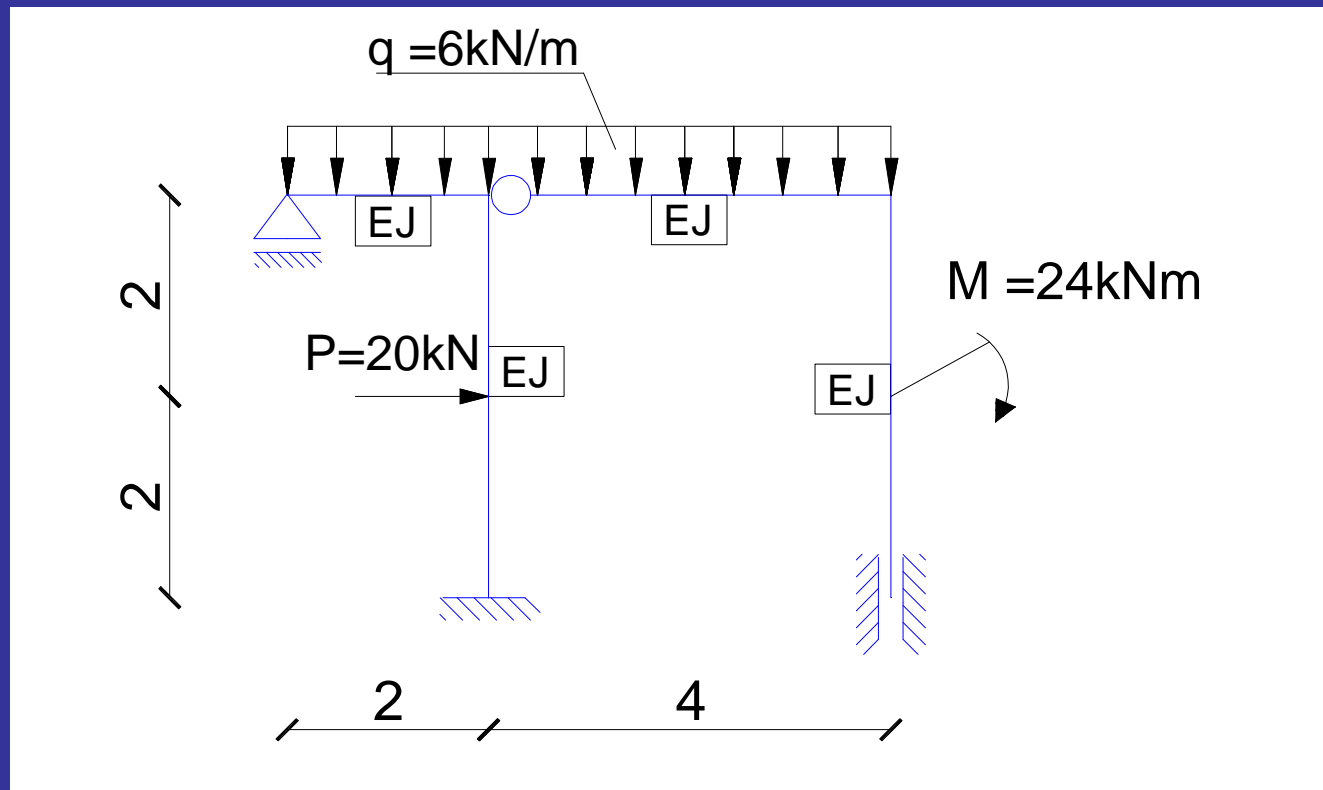


Metoda Sił

Rysowanie wykresów sił wewnętrznych
w ramach statycznie niewyznaczalnych

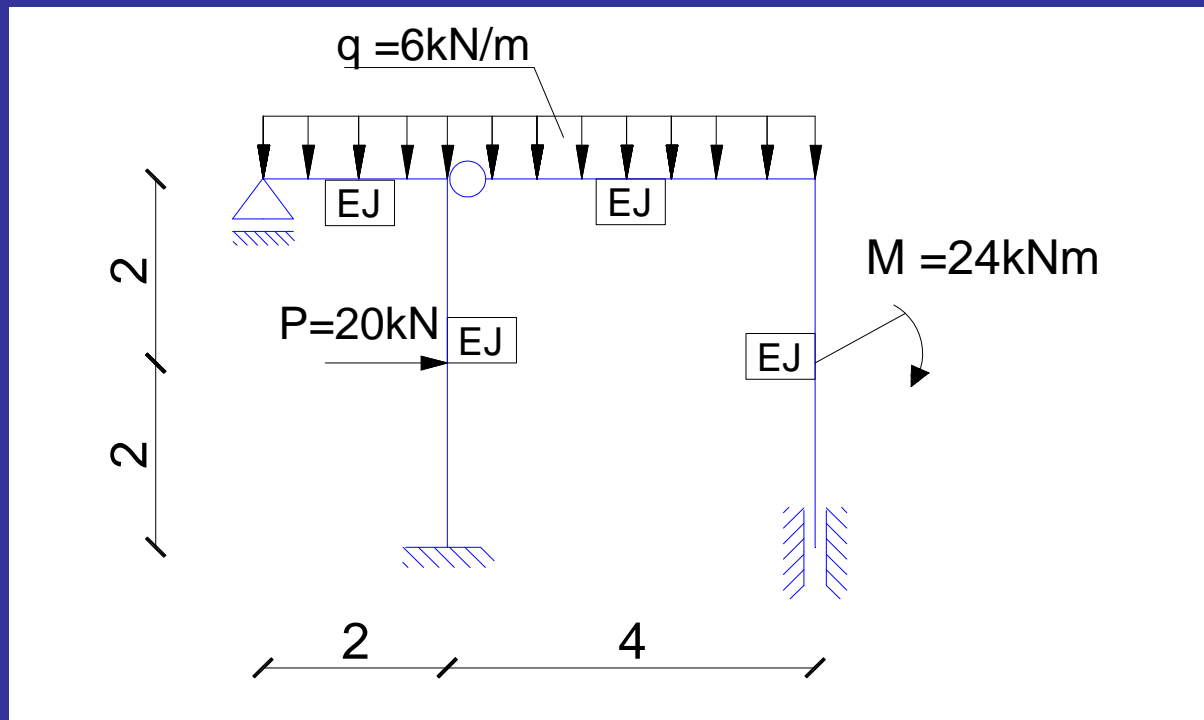
dr inż. Hanna Weber

Zadanie: Narysuj wykresy sił N, T, M.
Zadanie rozwiąż metodą sił.



dr inż. Hanna Weber

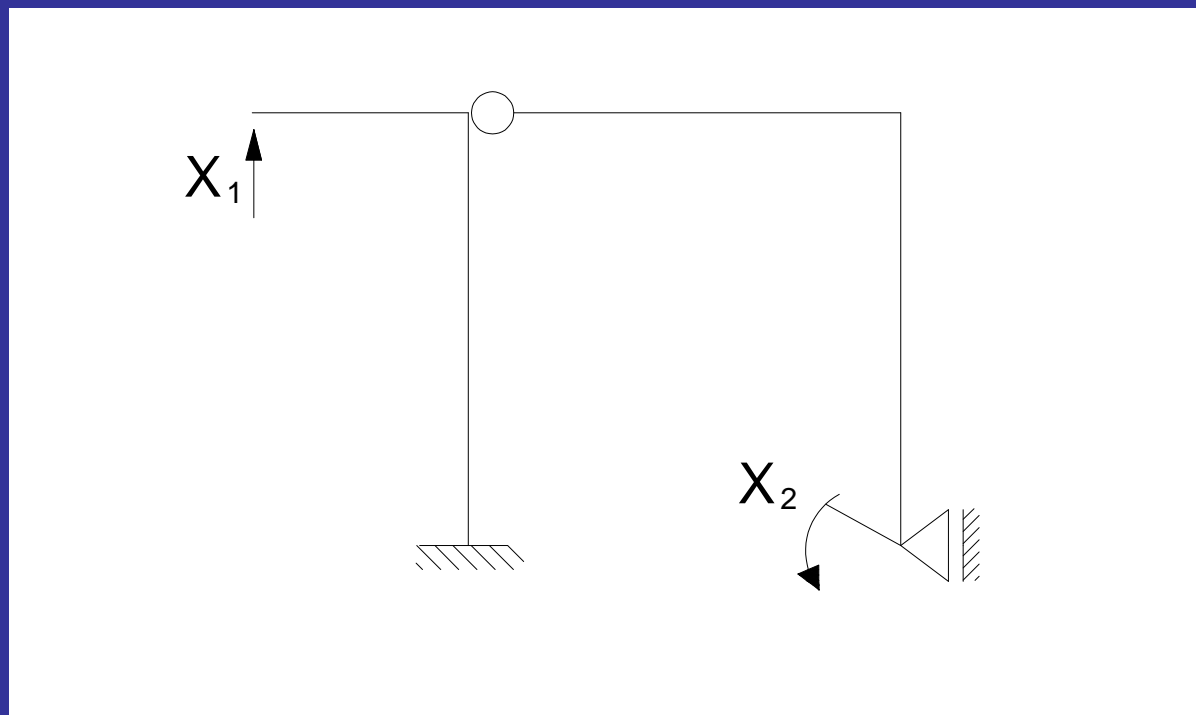
Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności :



$$n_s = l_r - l_p - 3 = 6 - 1 - 3 = 2$$

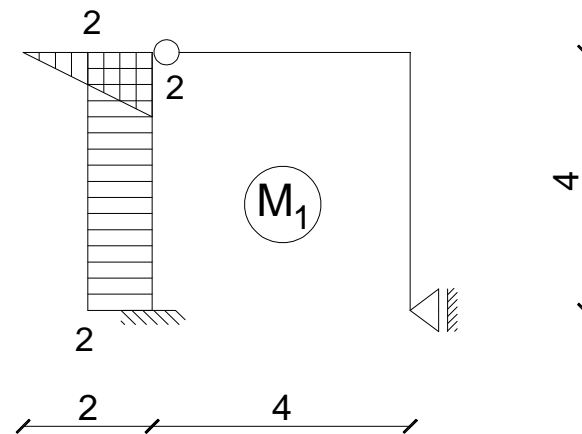
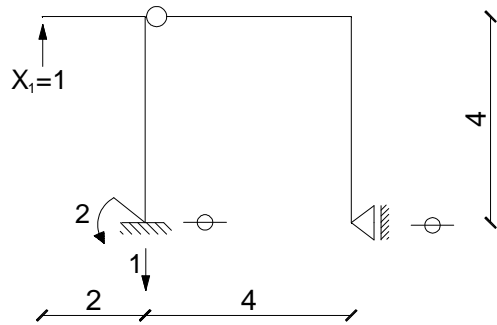
Układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

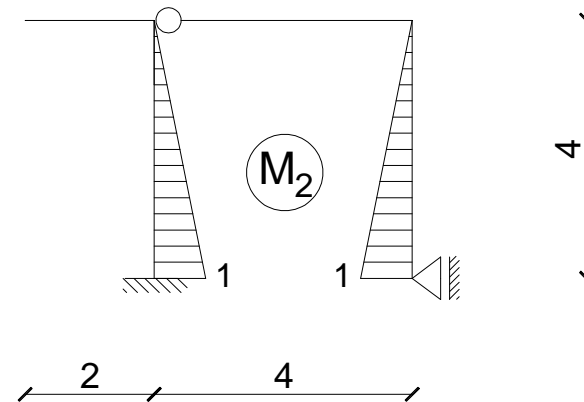
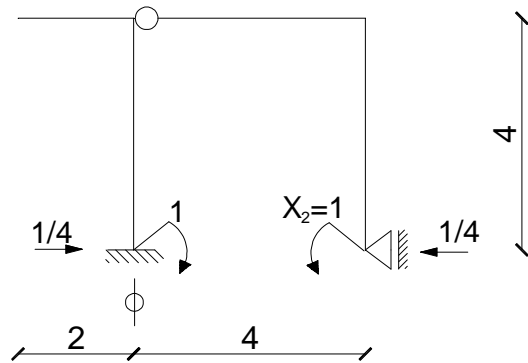


dr inż. Hanna Weber

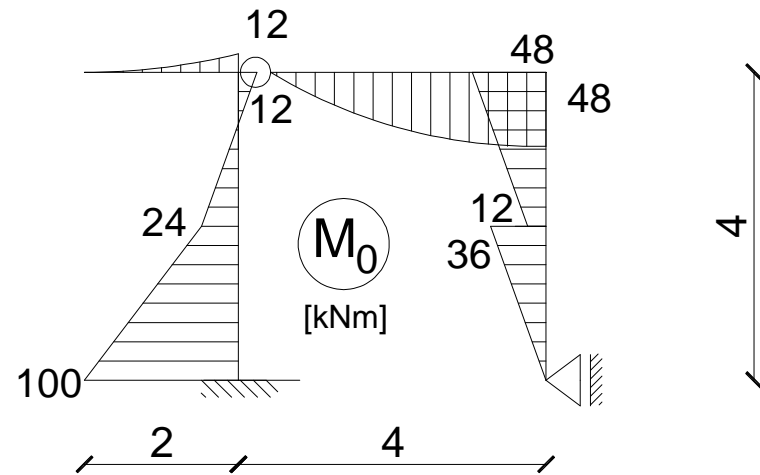
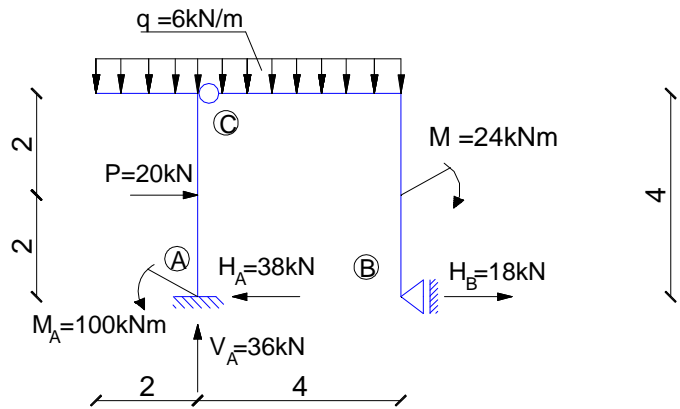
Wykres $X_1=1$



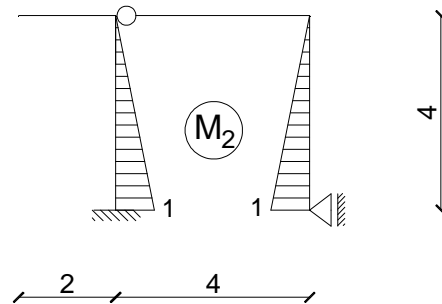
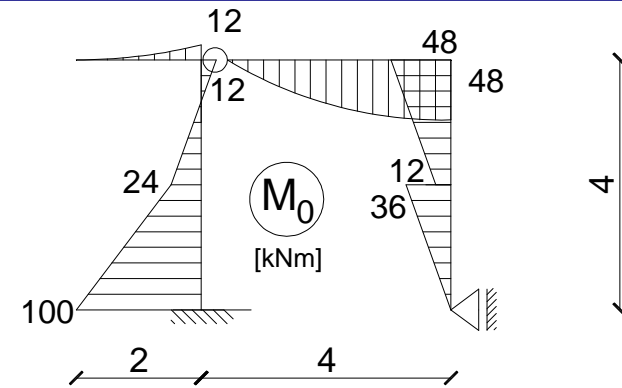
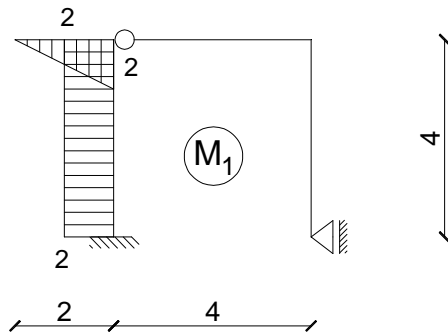
Wykres $X_2=1$



Wykres od obciążenia zewnętrznego:



Całkowanie wykresów:



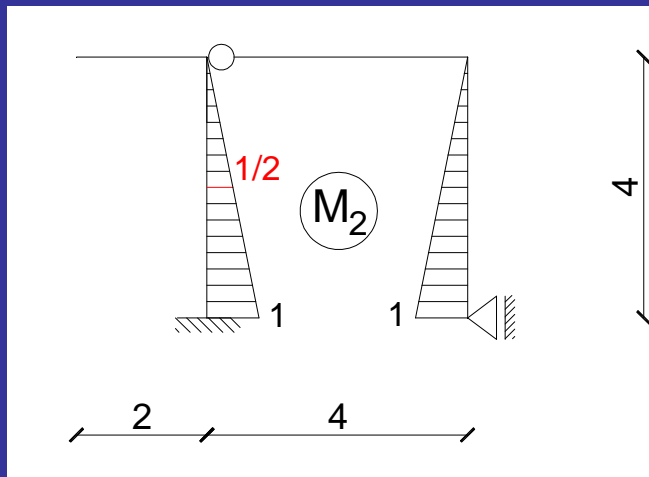
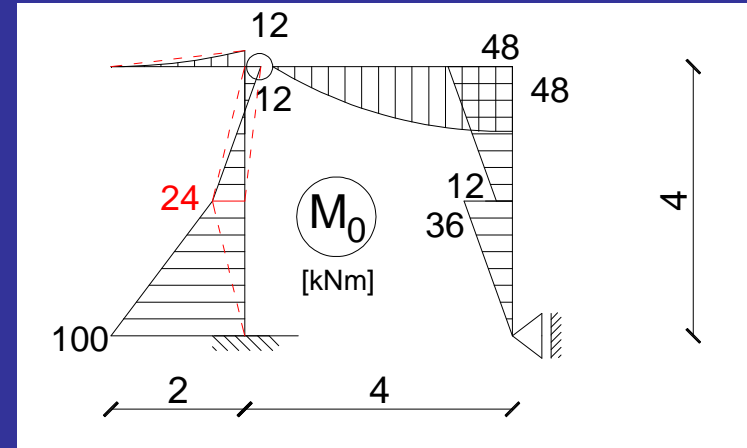
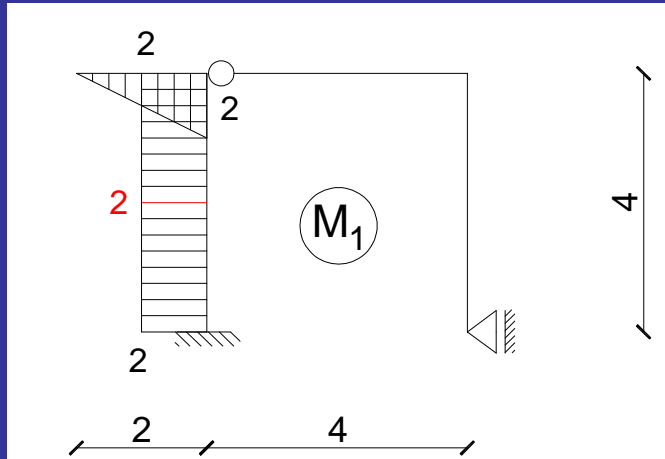
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \right) = \frac{56}{3EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} \left(2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{4}{EI} = \delta_{21}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{8}{3EI}$$

dr inż. Hanna Weber

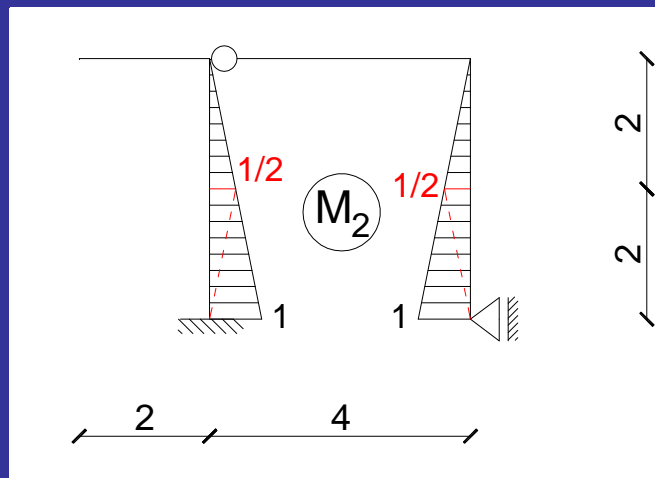
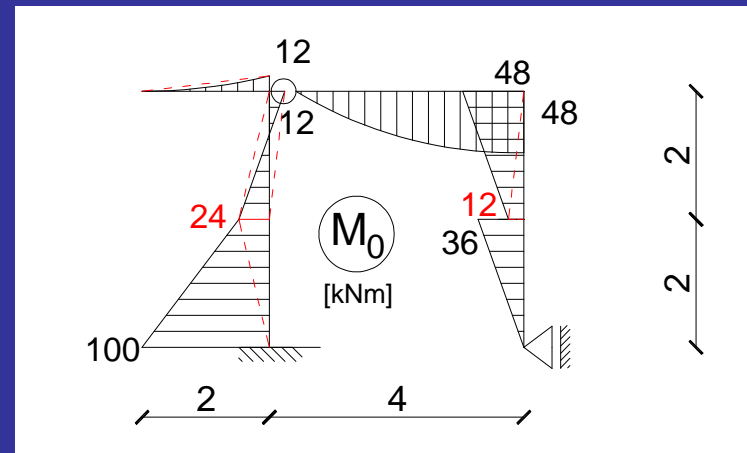
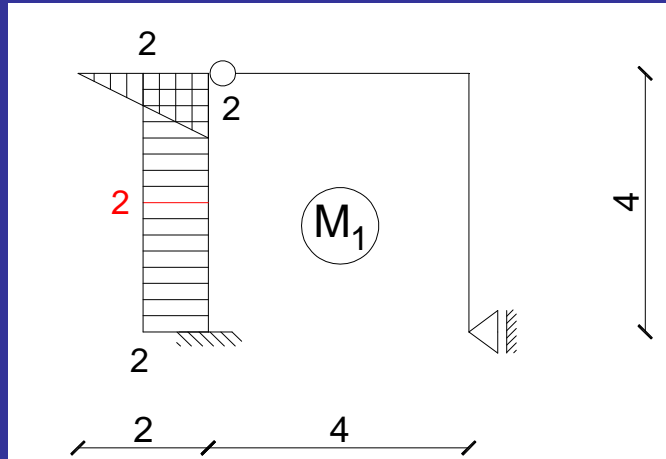
Całkowanie wykresów:



$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) \\ &+ \frac{1}{EI} 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{24}{2} - \frac{12}{2} \right) + \frac{1}{EI} 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{100}{2} + \frac{24}{2} \right) \\ &= \frac{260}{EI} \end{aligned}$$

dr inż. Hanna Weber

Całkowanie wykresów:



$$\begin{aligned} \delta_{20} = & \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{2}{3} \cdot 24 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 24 + \frac{1}{3} \cdot 100 \right) \right) \\ & - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot 24 \right) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 48 \right) \\ & + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{208}{3EI} \end{aligned}$$

dr inż. Hanna Weber

Układ równań kanonicznych metody sił
dla schematu dwukrotnie statycznie
niewyznaczalnego:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{56}{3EI} \cdot X_1 - \frac{4}{EI} \cdot X_2 + \frac{260}{EI} = 0 \\ -\frac{4}{EI} \cdot X_1 + \frac{8}{3EI} \cdot X_2 - \frac{208}{3EI} = 0 \end{cases}$$

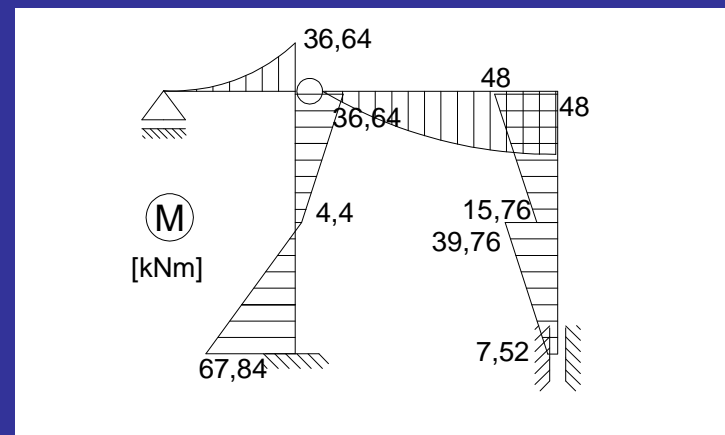
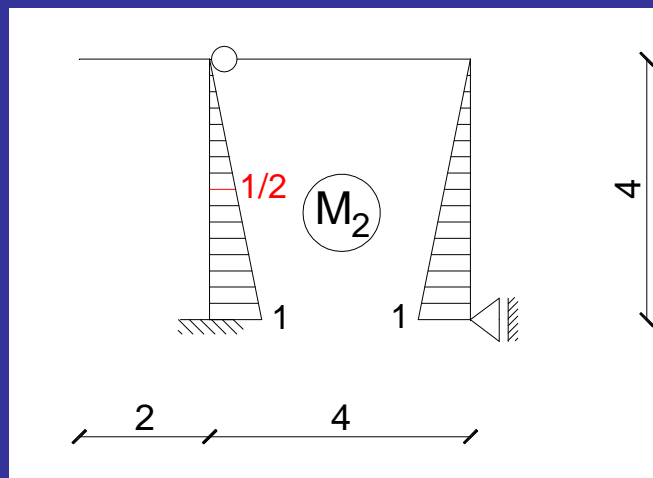
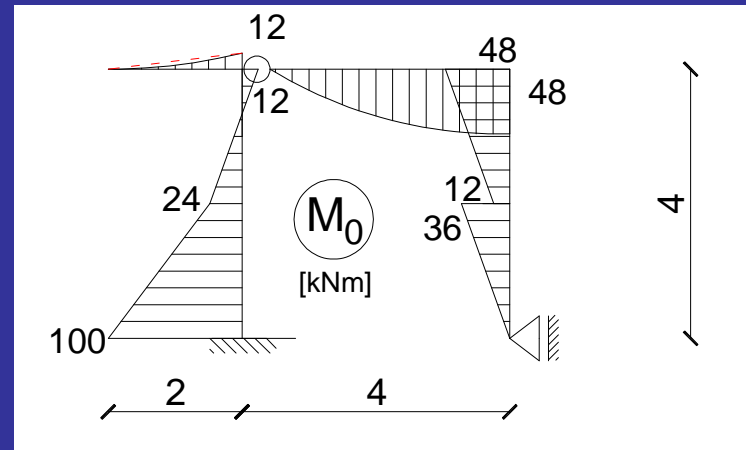
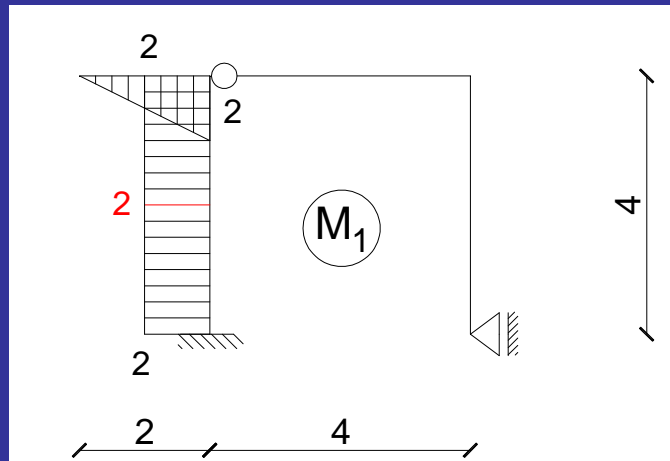
↓

$$X_1 = -12,32kN$$

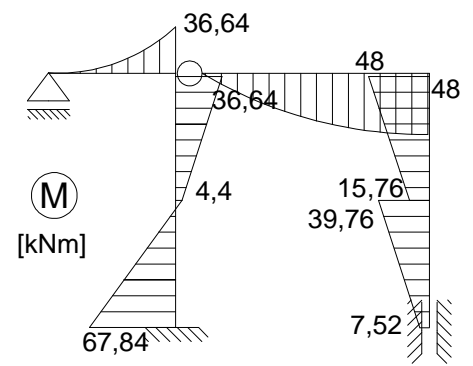
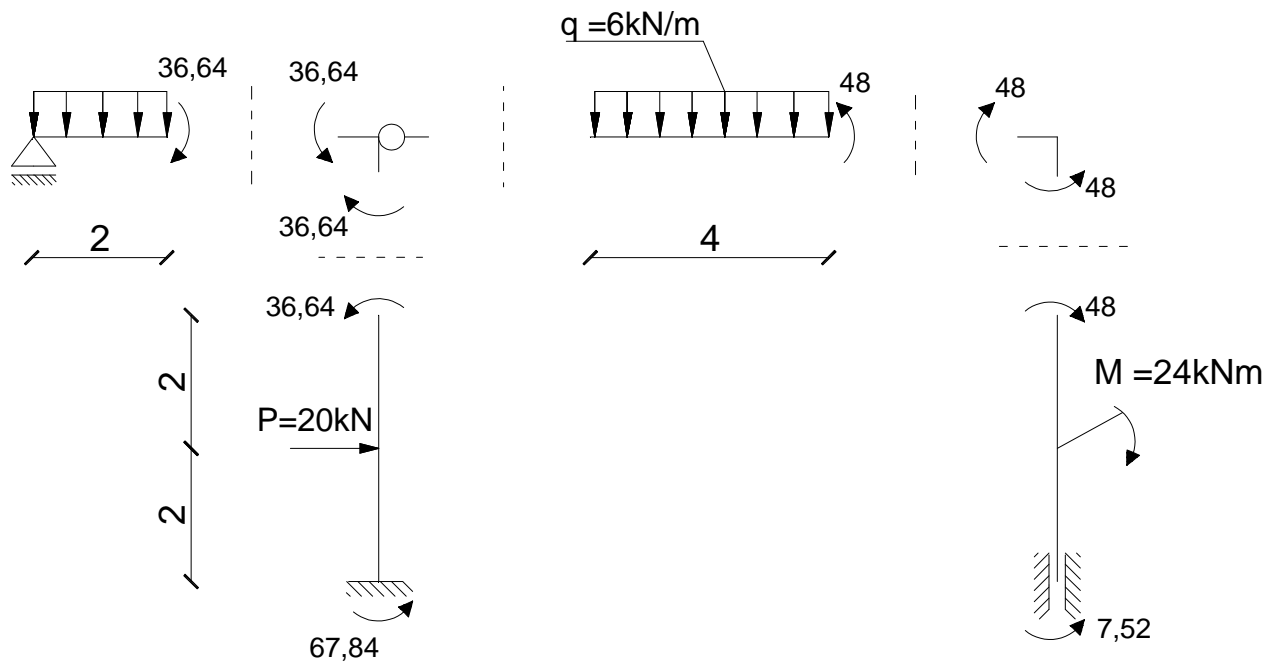
$$X_2 = 7,52kNm$$

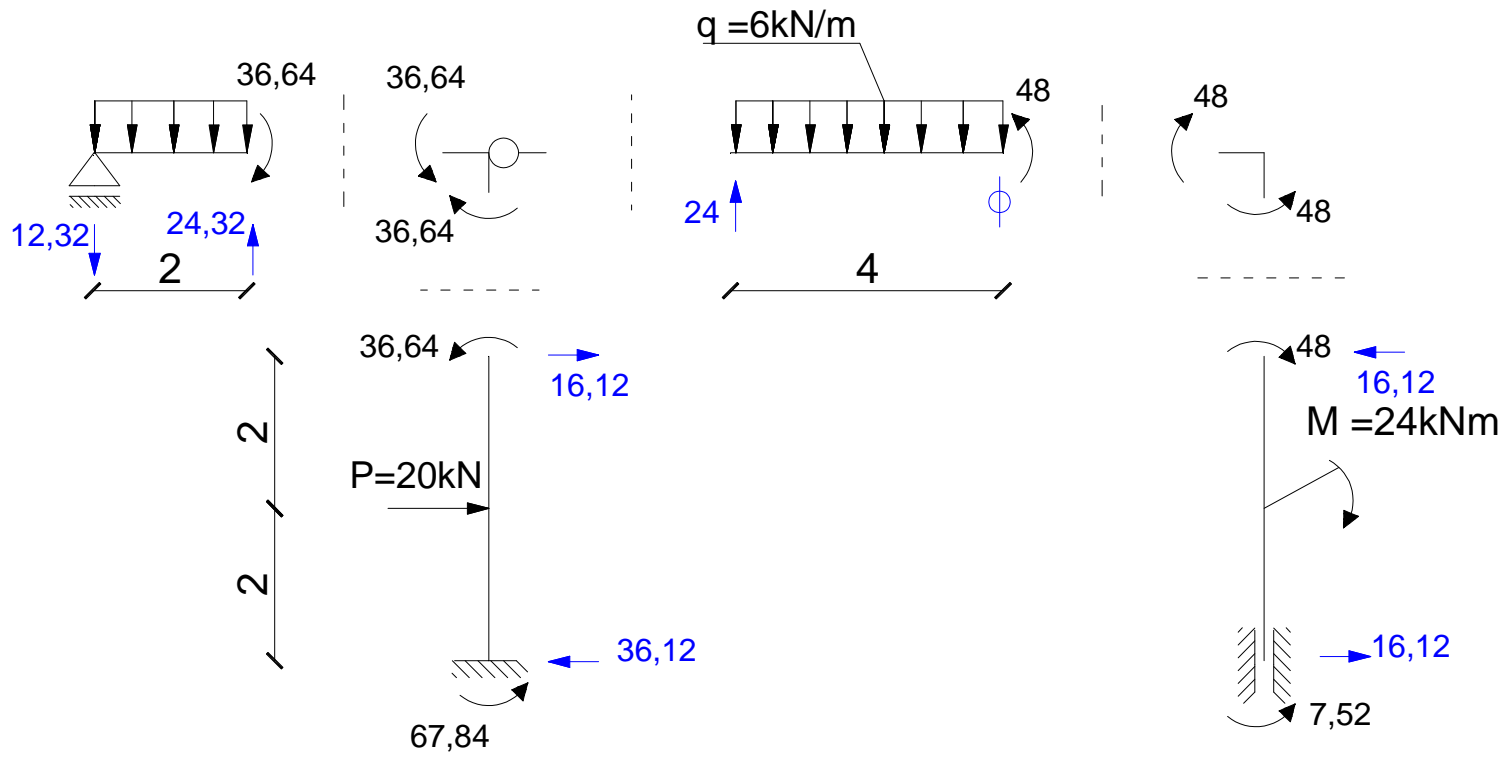
dr inż. Hanna Weber

Tworzenie ostatecznego wykresu momentów:

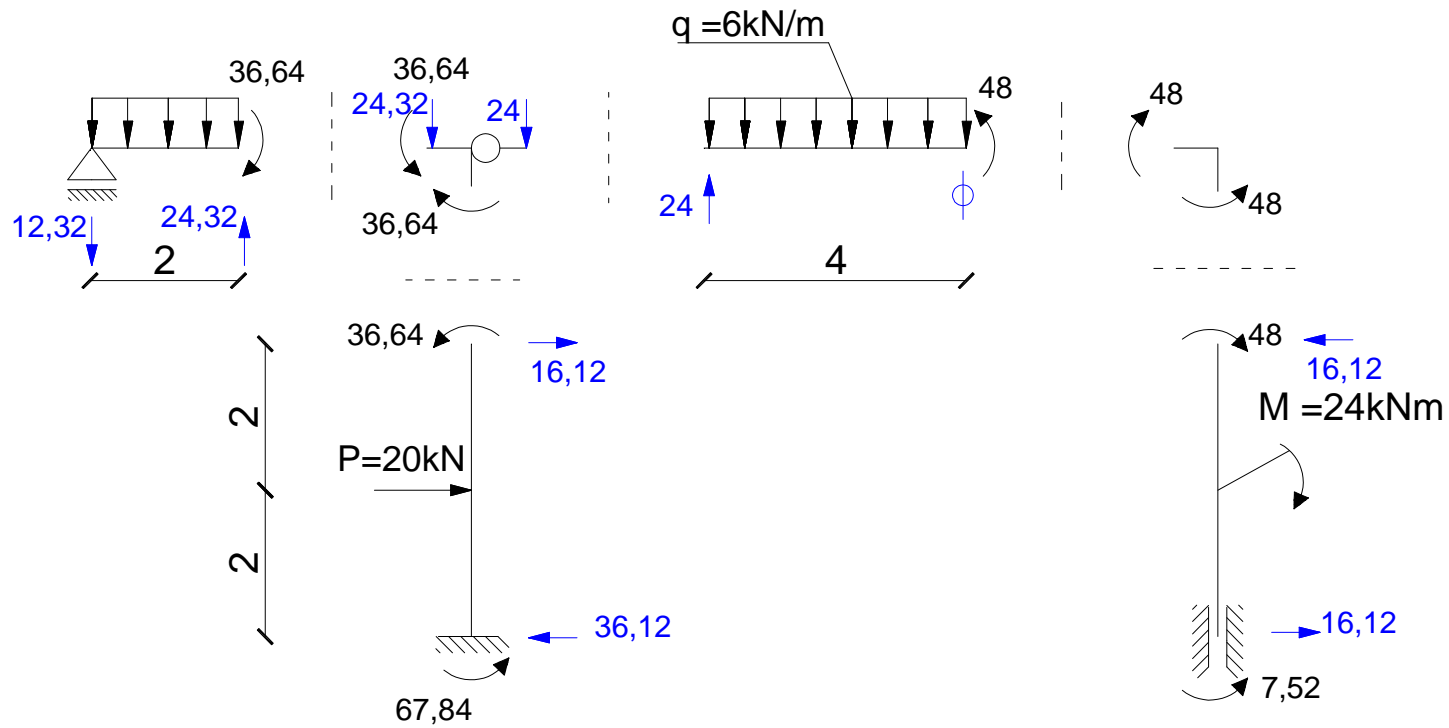


$$M_i = M_{i1} \cdot X_1 + M_{i2} \cdot X_2 + M_{i0}$$

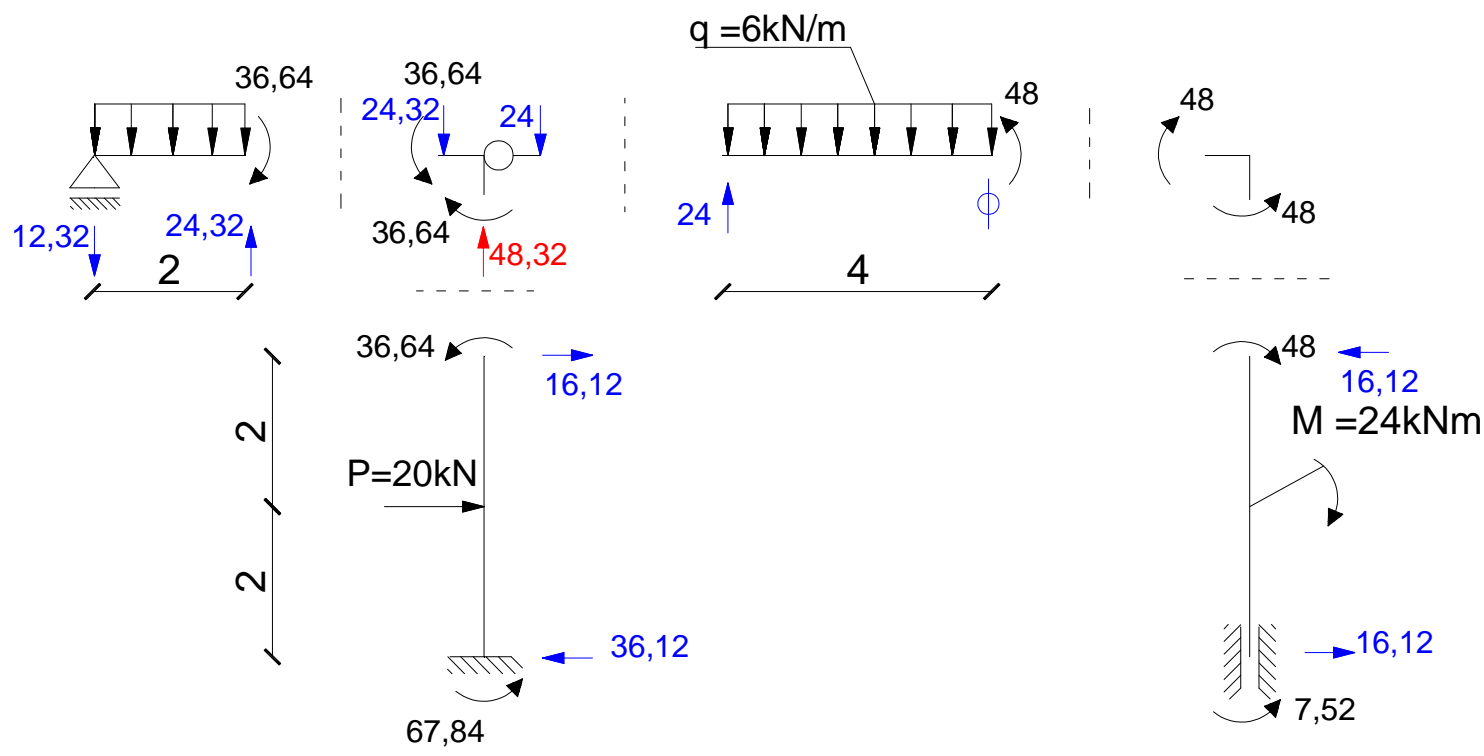




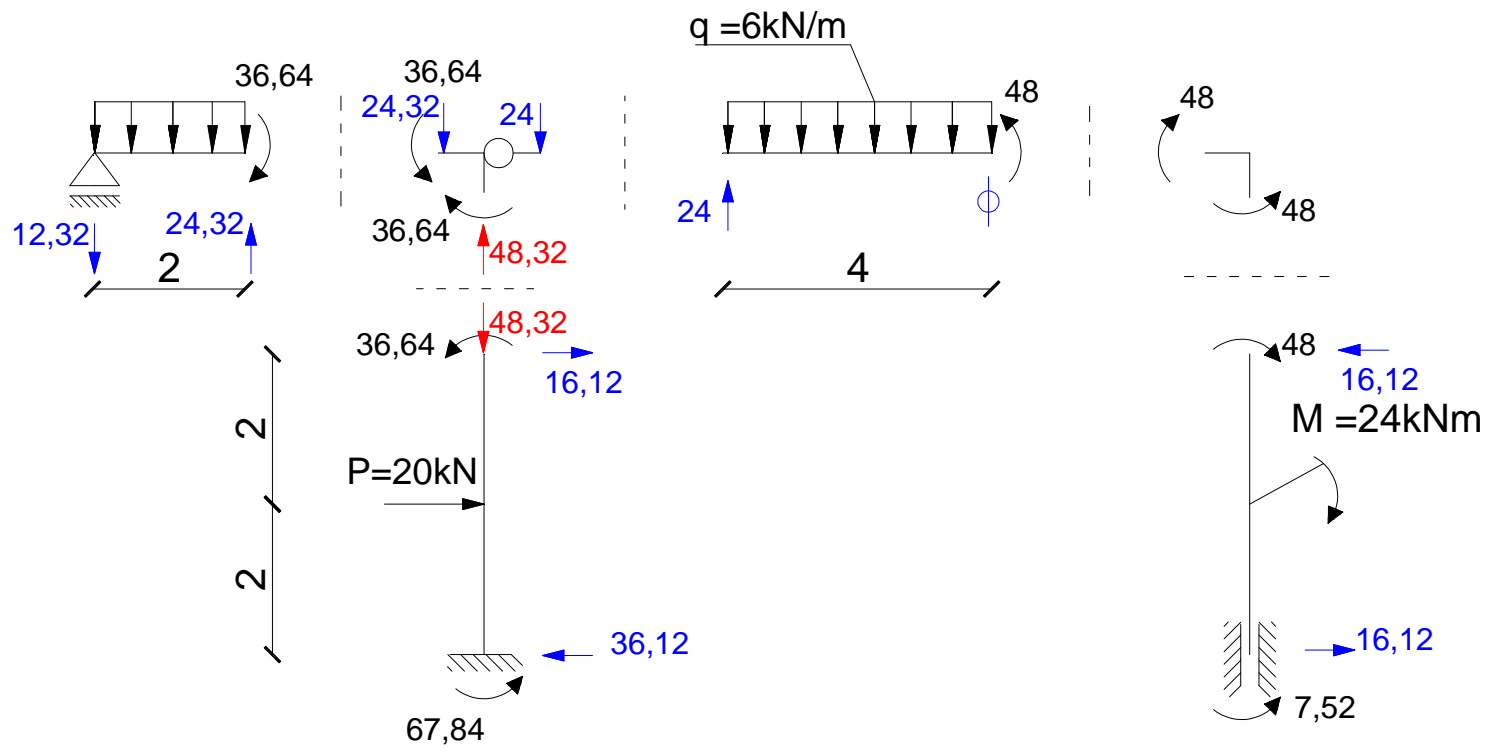
dr inż. Hanna Weber



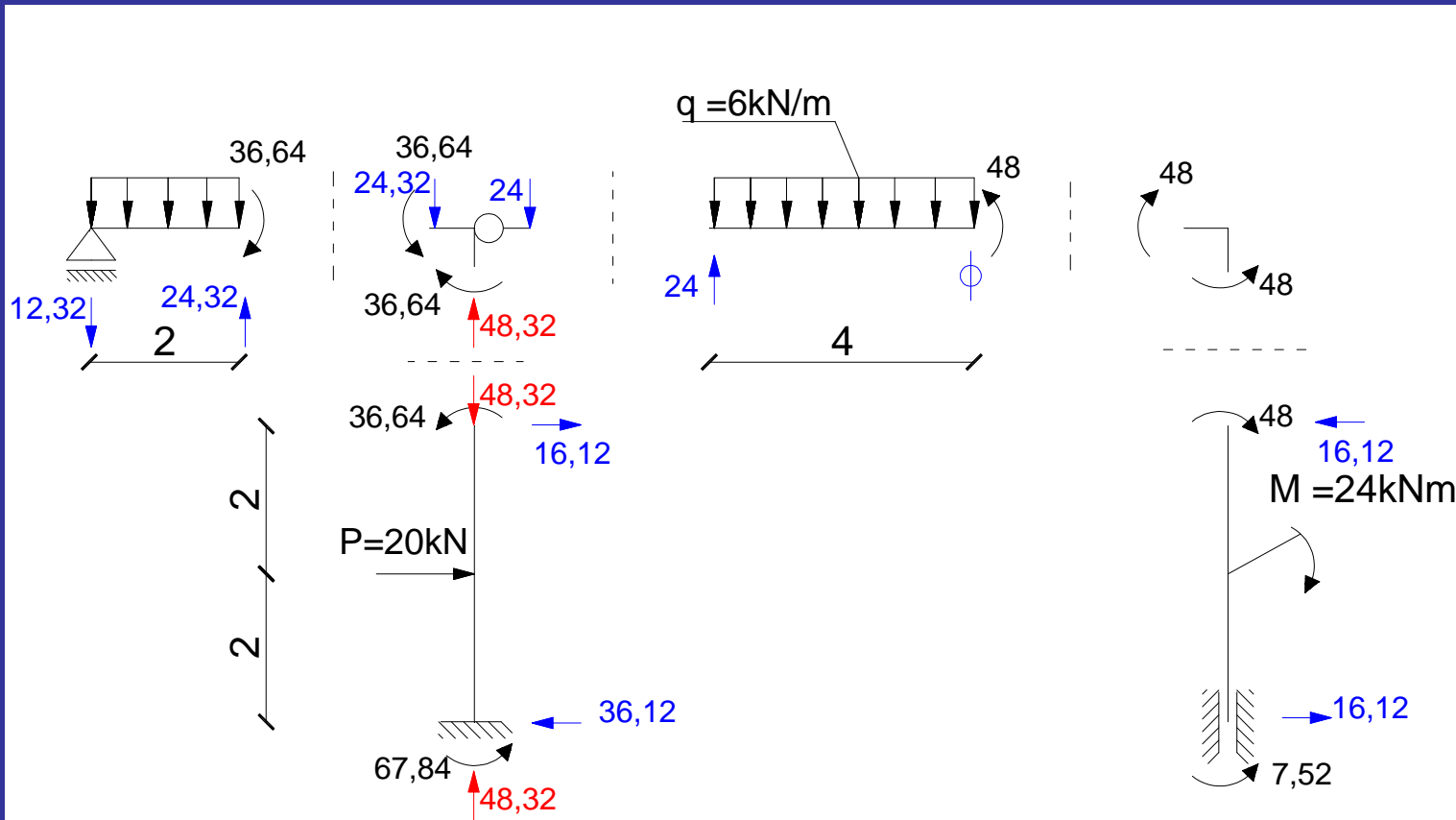
dr inż. Hanna Weber



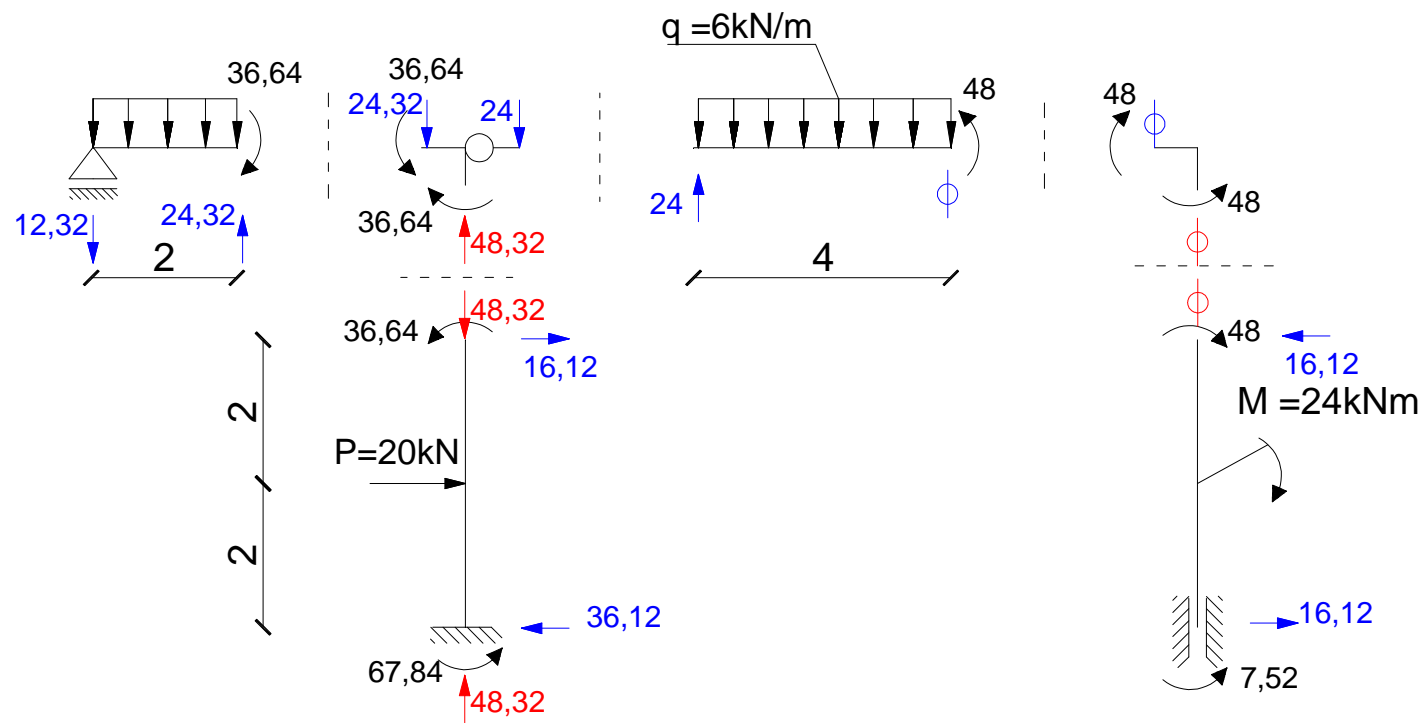
dr inż. Hanna Weber



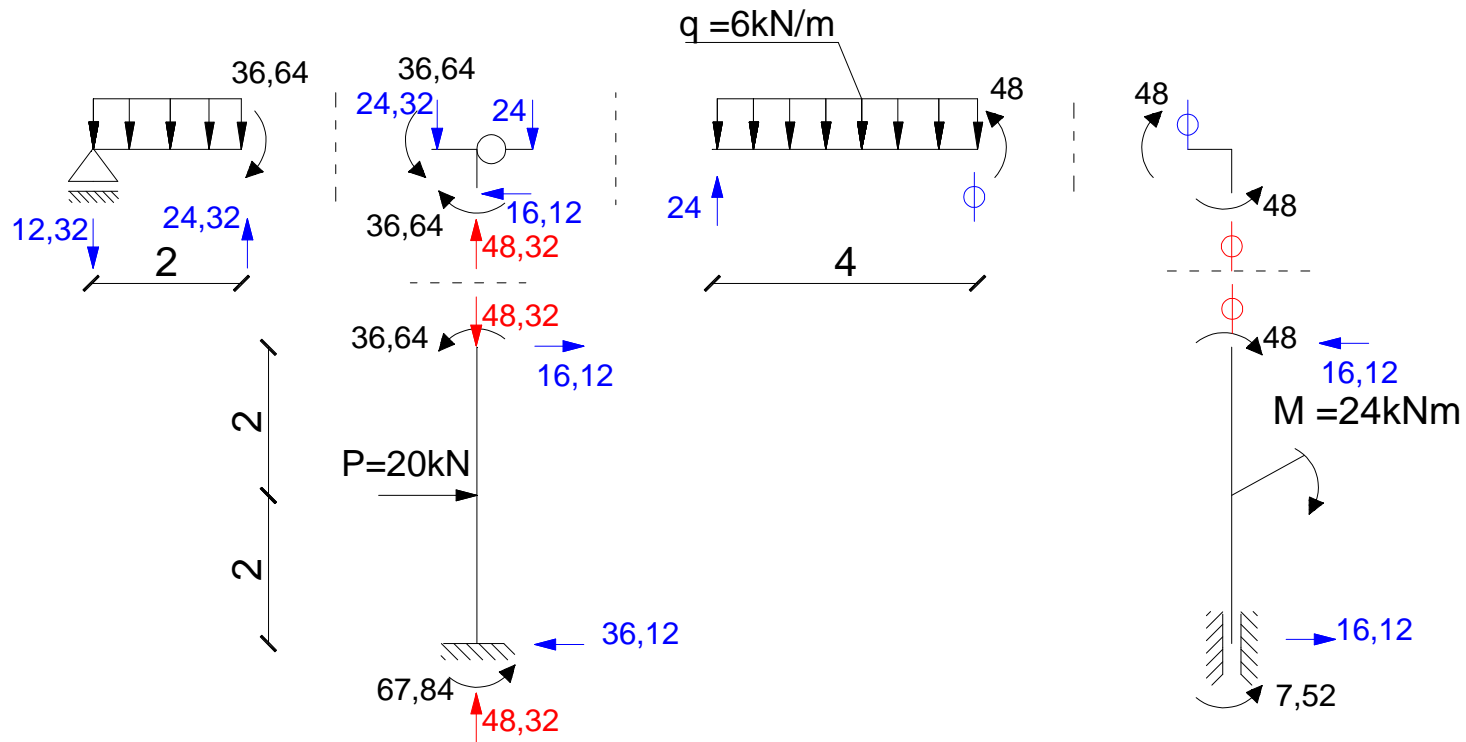
dr inż. Hanna Weber



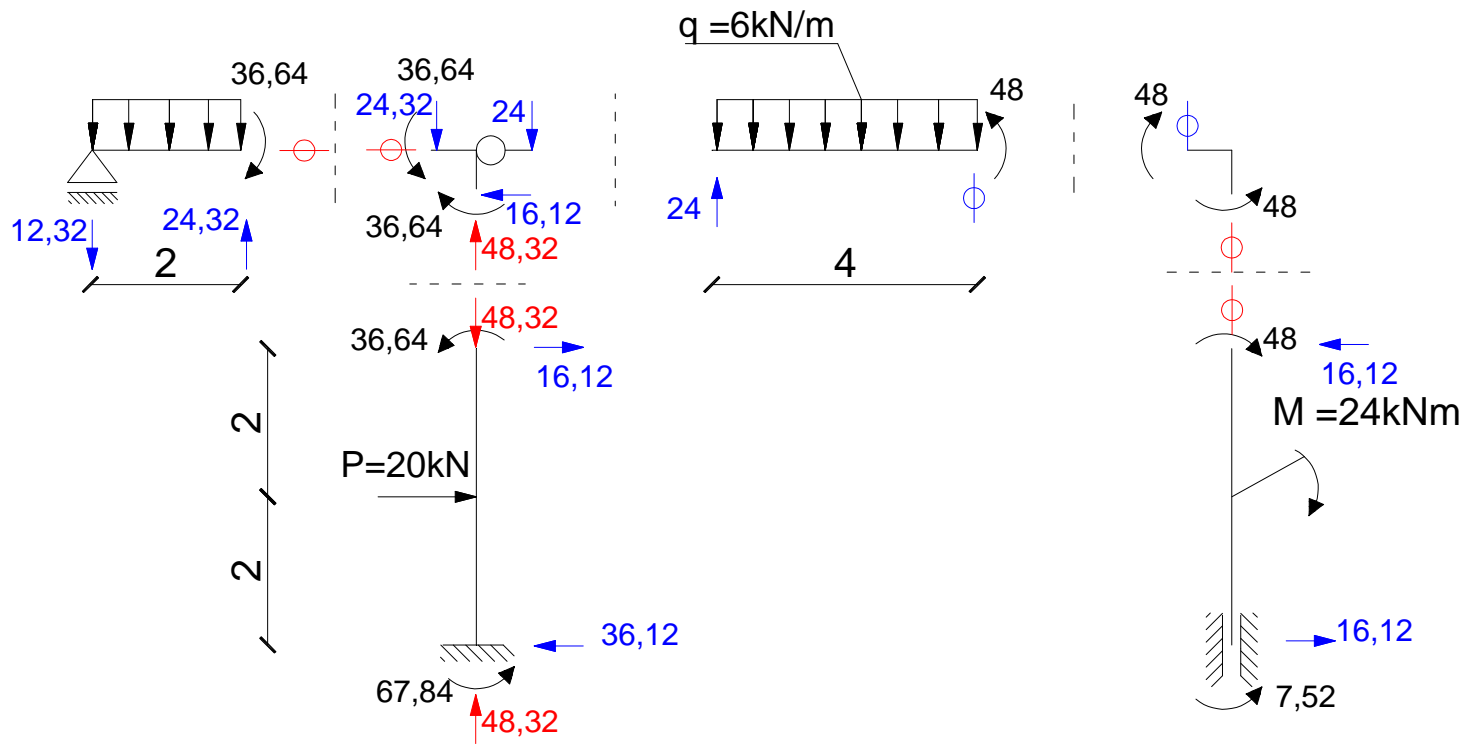
dr inż. Hanna Weber



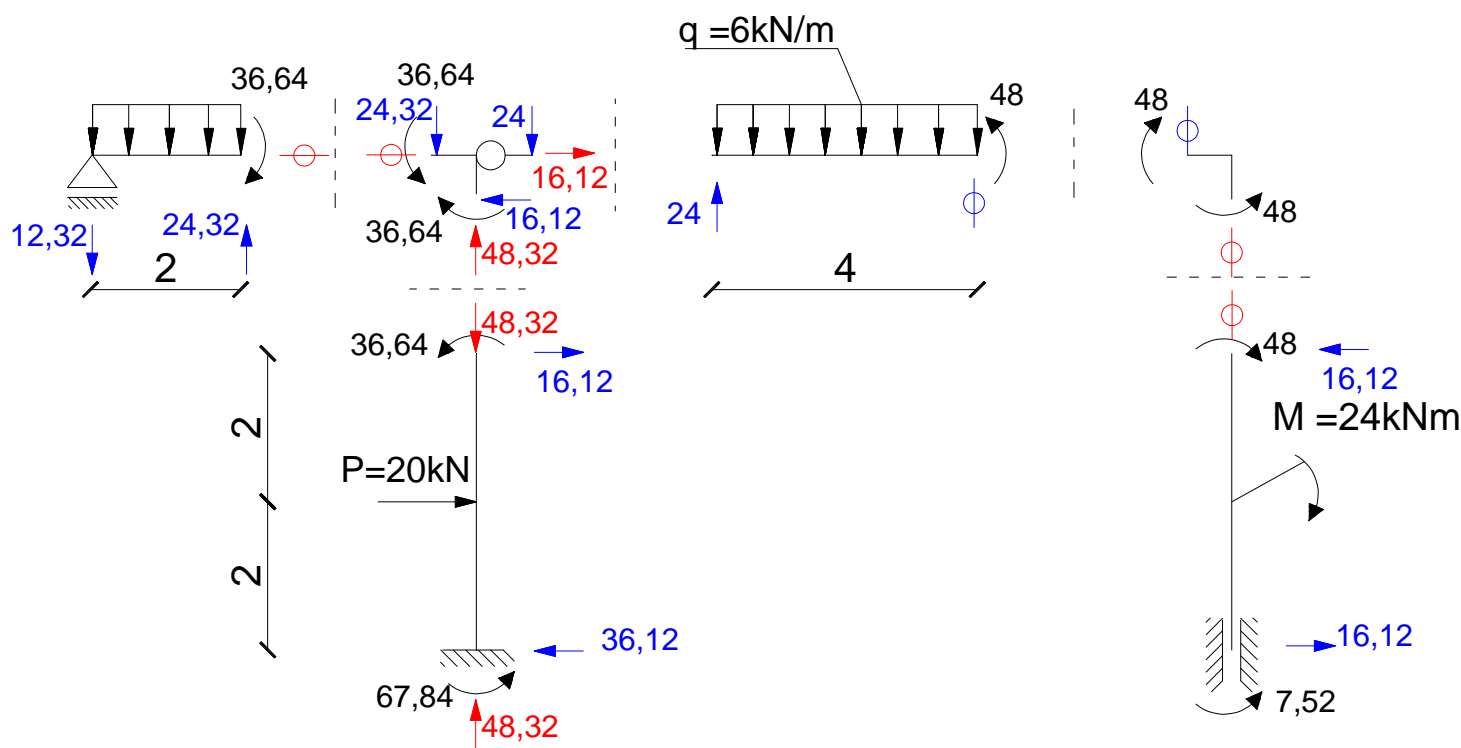
dr inż. Hanna Weber



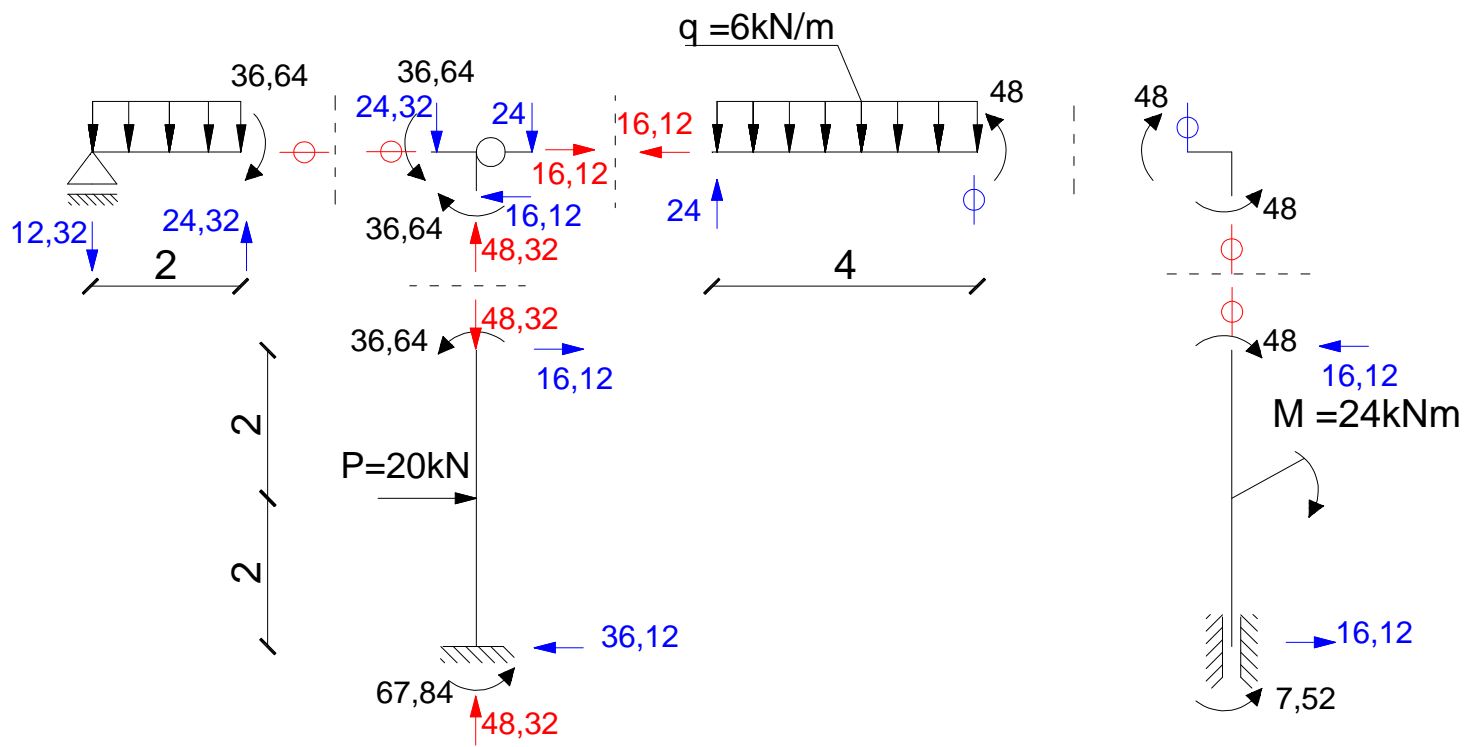
dr inż. Hanna Weber



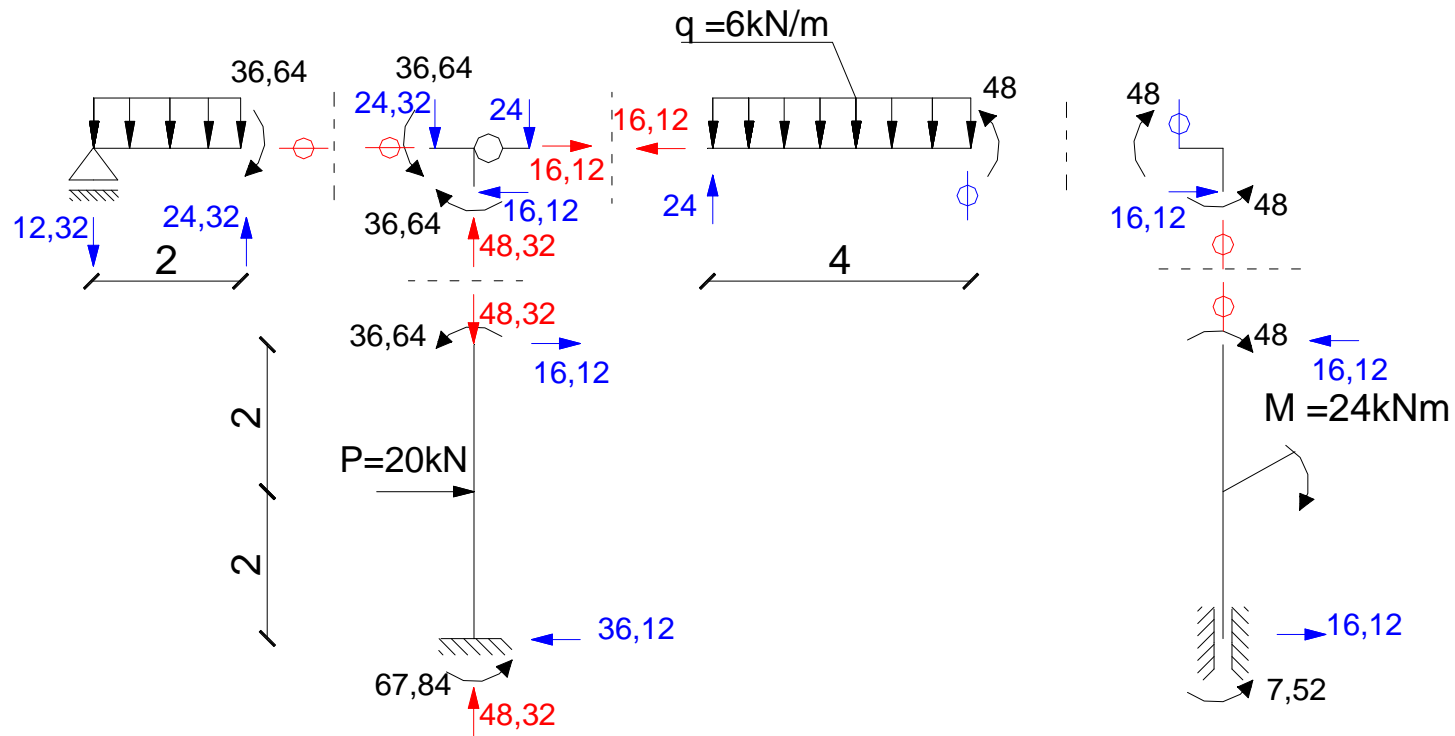
dr inż. Hanna Weber



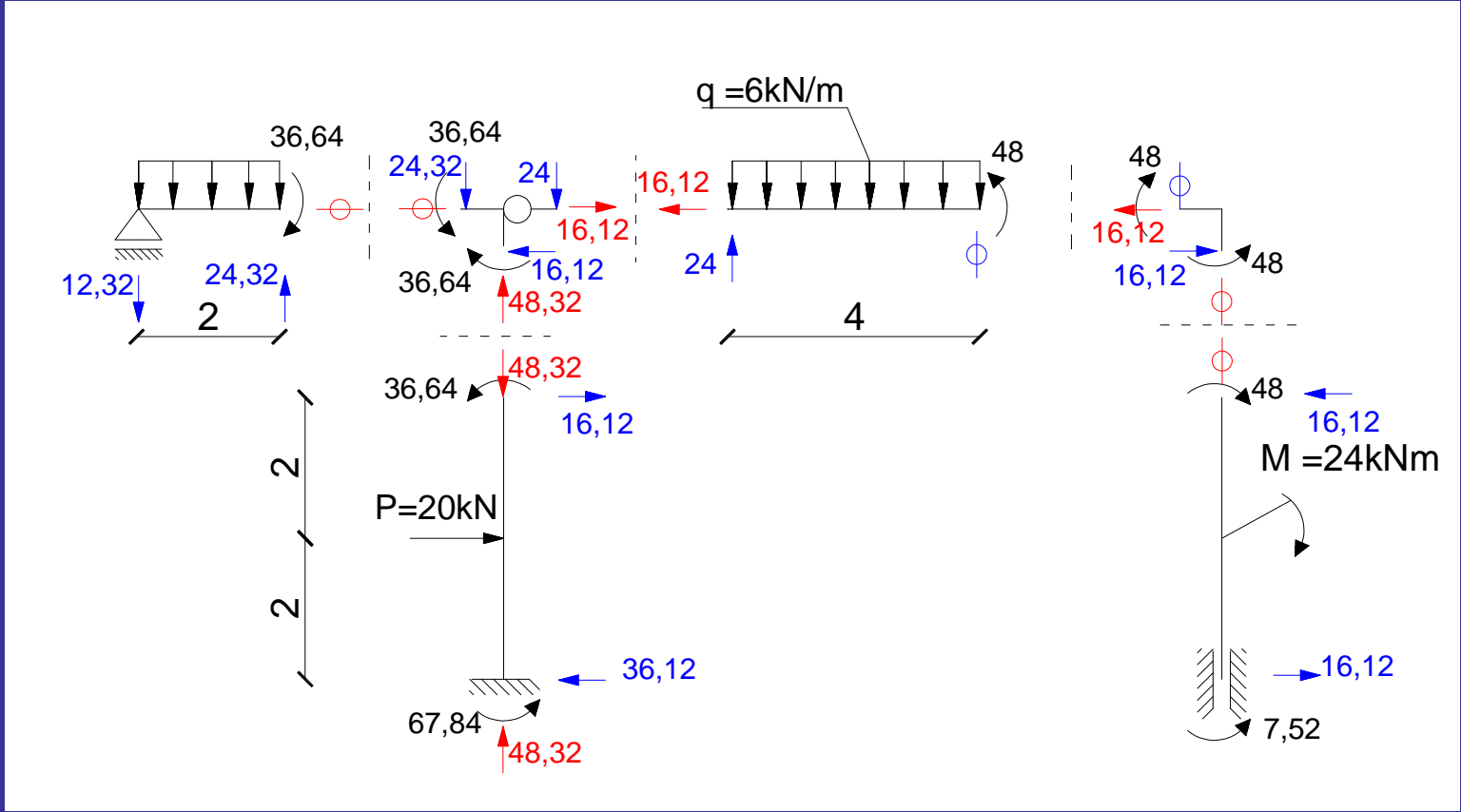
dr inż. Hanna Weber



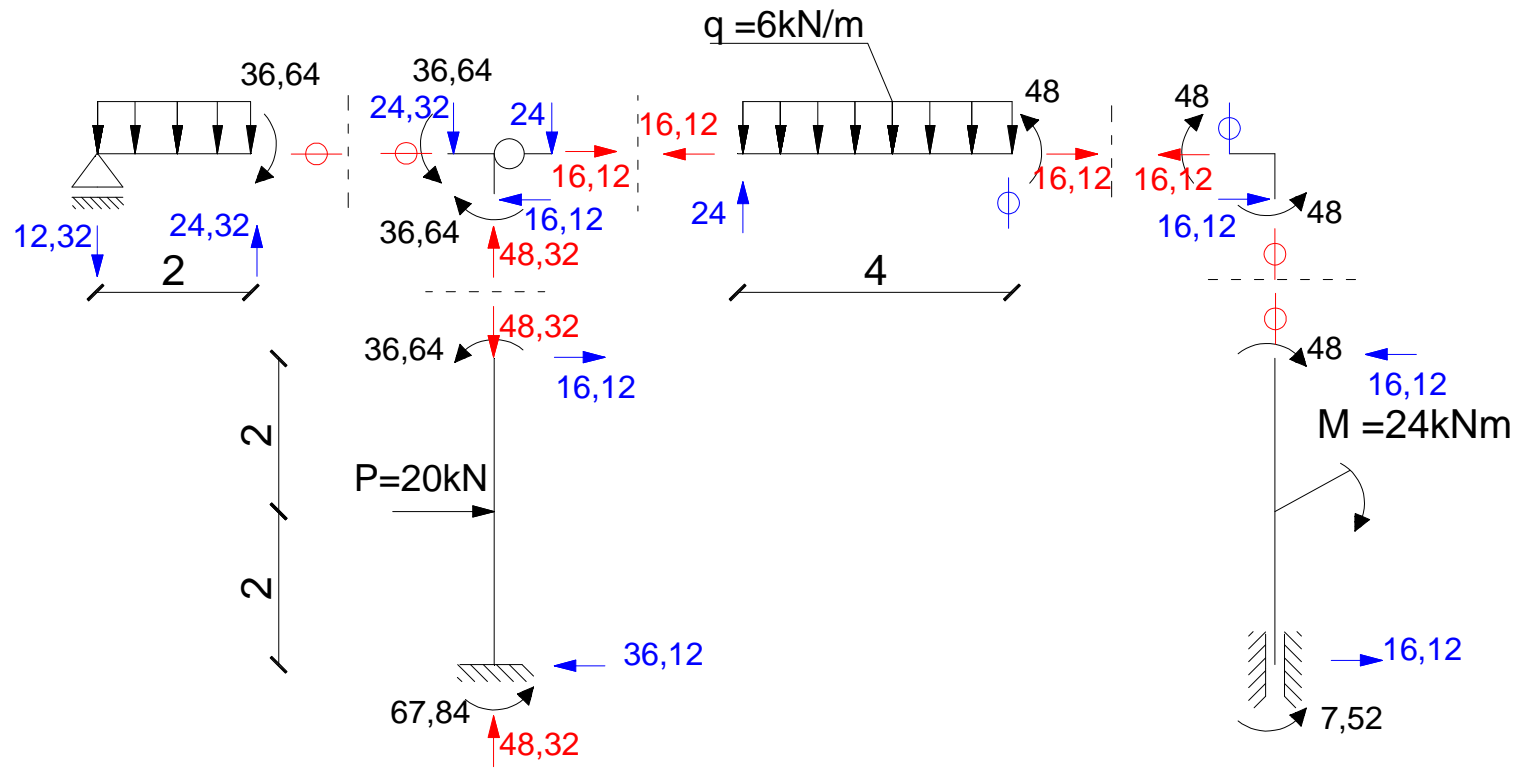
dr inż. Hanna Weber



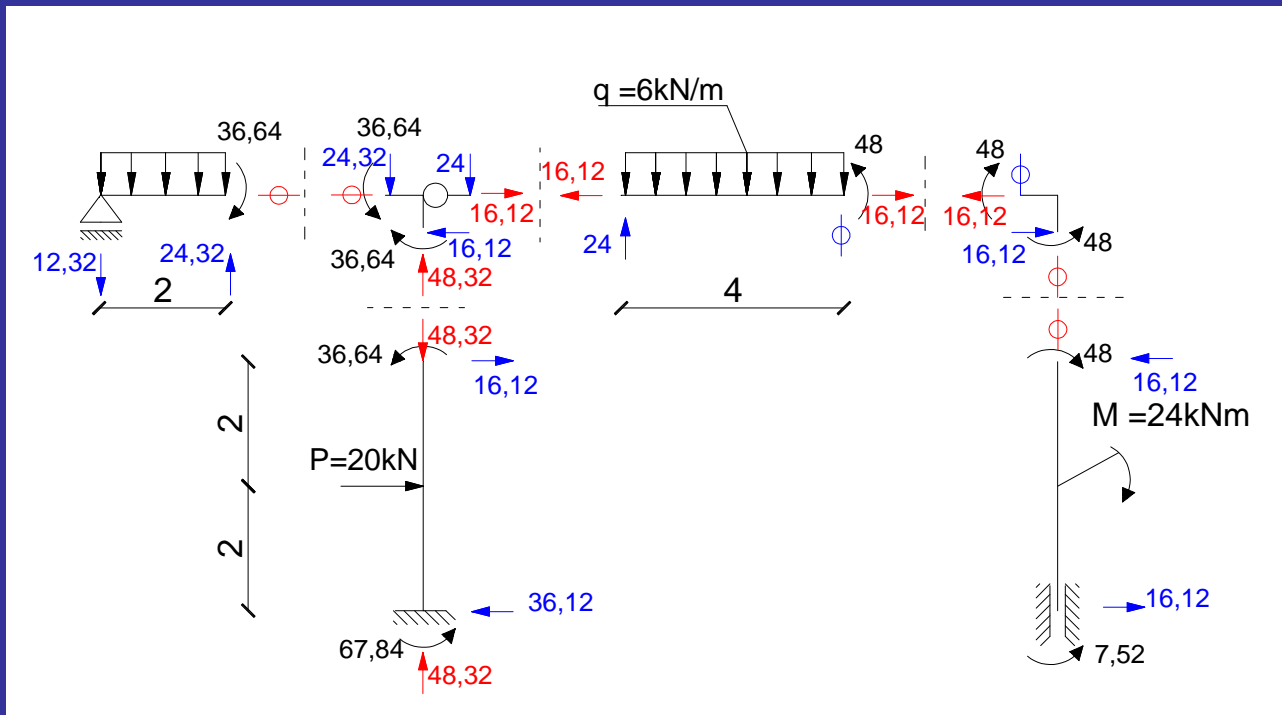
dr inż. Hanna Weber



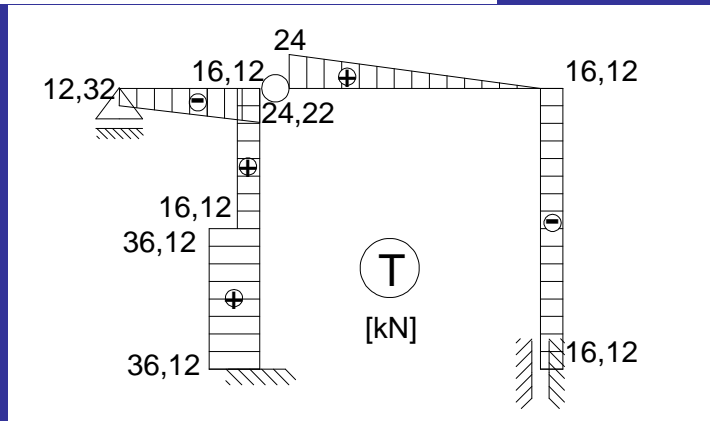
dr inż. Hanna Weber

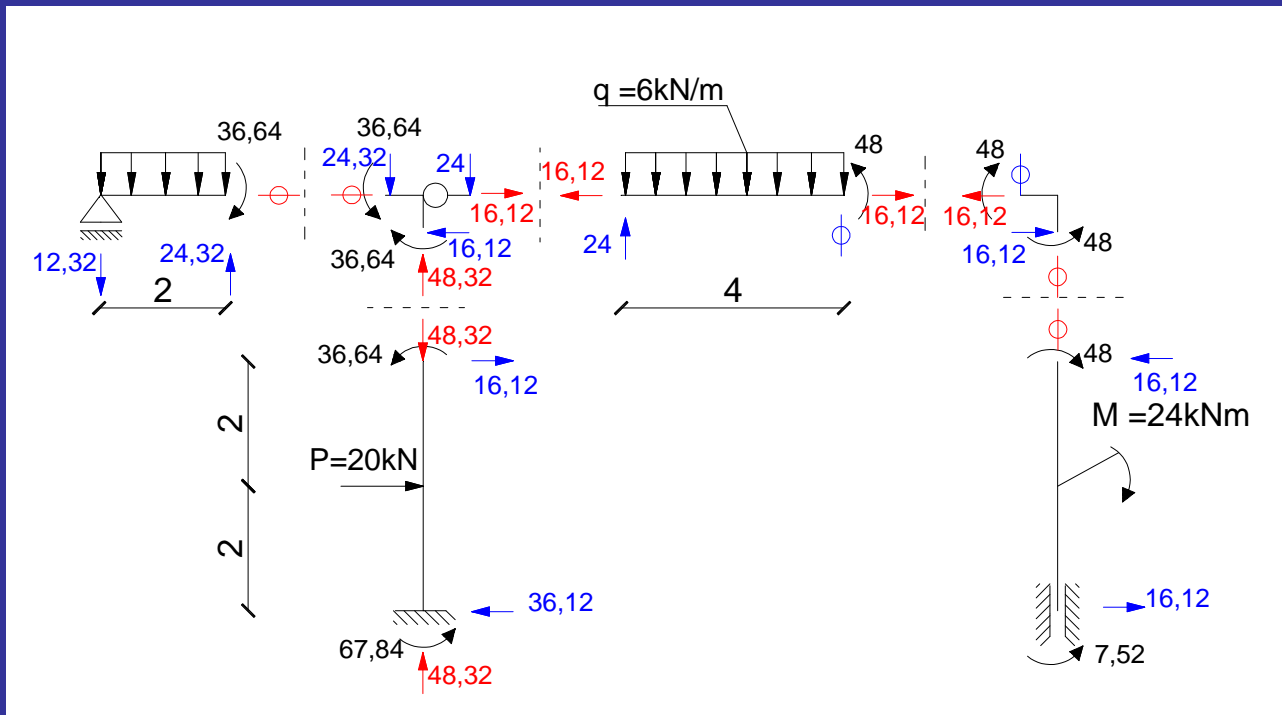


dr inż. Hanna Weber

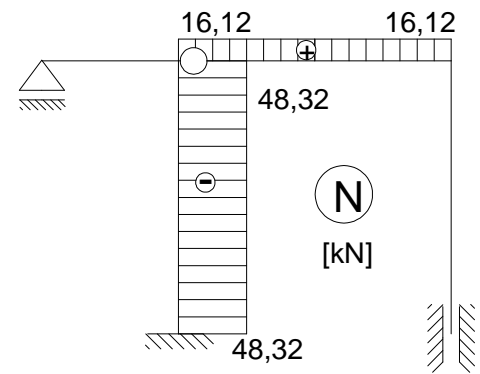


Wykres sił tnących:





Wykres sił normalnych:



Sprawdzenie poprawności otrzymanego wykresu momentów — z twierdzenia redukcyjnego

Twierdzenie redukcyjne —
pozwała na obliczanie przemieszczeń
w układach statycznie niewyznaczalnych

Wzór na obliczanie przemieszczeń z zasady prac wirtualnych :

$$\delta = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds$$

Można stosować do układów statycznie wyznaczalnych jak i statycznie niewyznaczalnych

1. Twierdzenie redukcyjne

Aby obliczyć przemieszczenie w układzie statycznie niewyznaczalnym, mnożymy końcowy wykres momentów od obciążeń rzeczywistych, otrzymany dla układu statycznie niewyznaczalnego - M , przez wykres momentów od obciążenia wirtualnego postawionego na schemacie podstawowym \bar{M}_0 .

$$\delta = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}_0}{EI} ds$$

Wzór na obliczanie przemieszczeń z zasady prac wirtualnych :

$$\delta = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds$$

Można stosować do układów statycznie wyznaczalnych jak i statycznie niewyznaczalnych

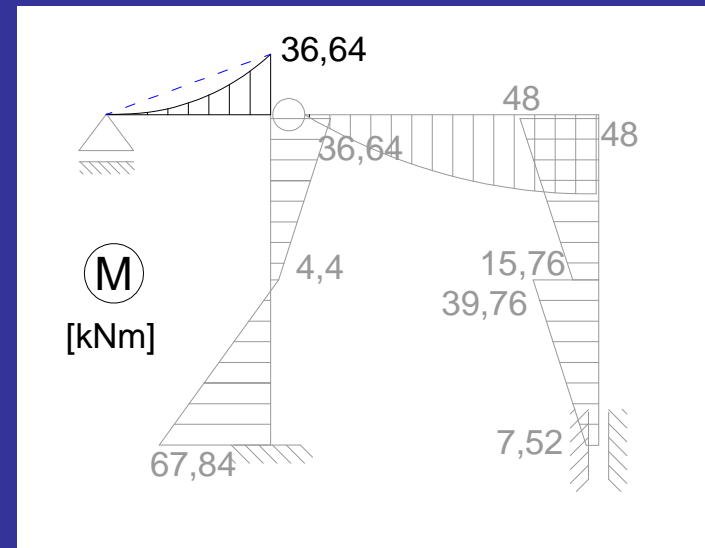
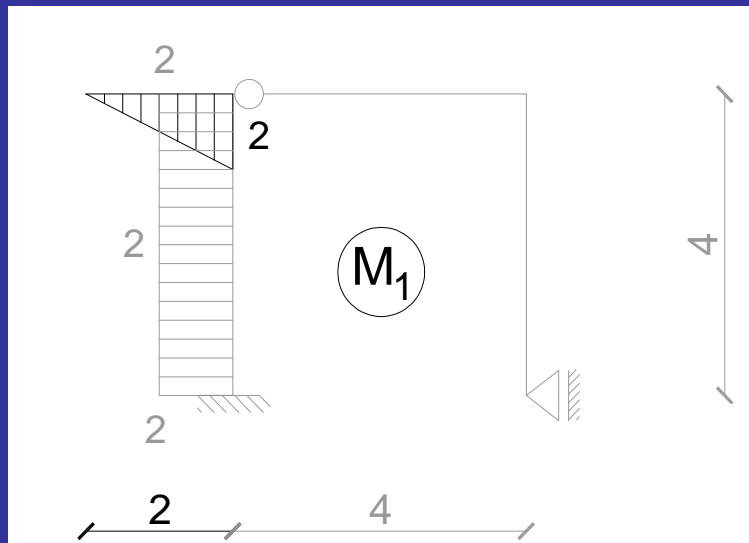
2. Twierdzenie redukcyjne

Aby obliczyć przemieszczenie w układzie statycznie niewyznaczalnym, mnożymy wykres momentów od obciążeń rzeczywistych postawionych na schemacie podstawowym statycznie wyznaczalnym – M_0 , przez końcowy wykres momentów od obciążenia wirtualnego, otrzymany dla schematu statycznie niewyznaczalnego \bar{M} .

$$\delta = \int_s \frac{M_0 \cdot \bar{M}}{EI} ds$$

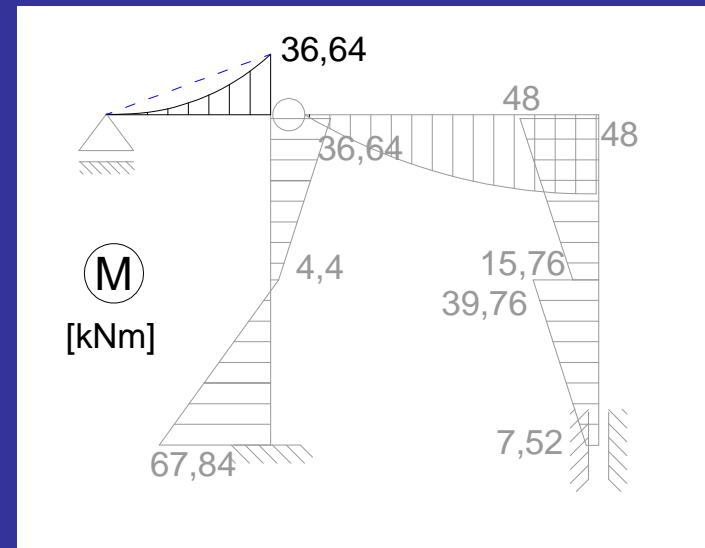
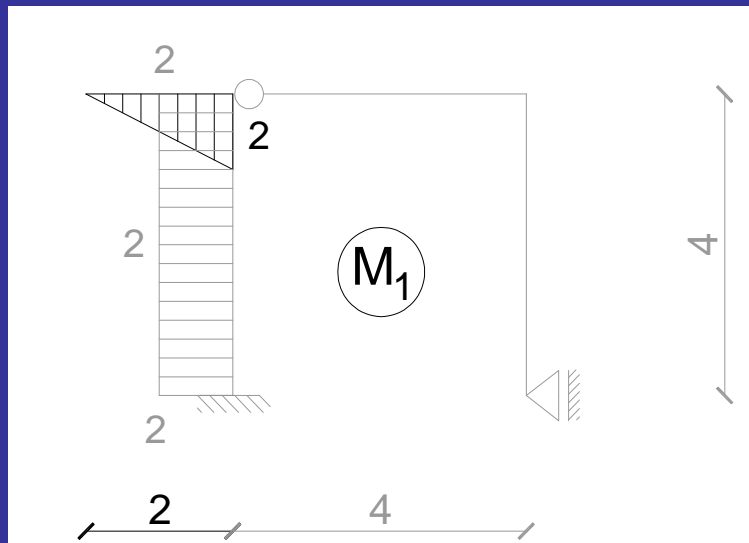
Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \int_s \frac{M \cdot M_1}{EI} ds = 0$$



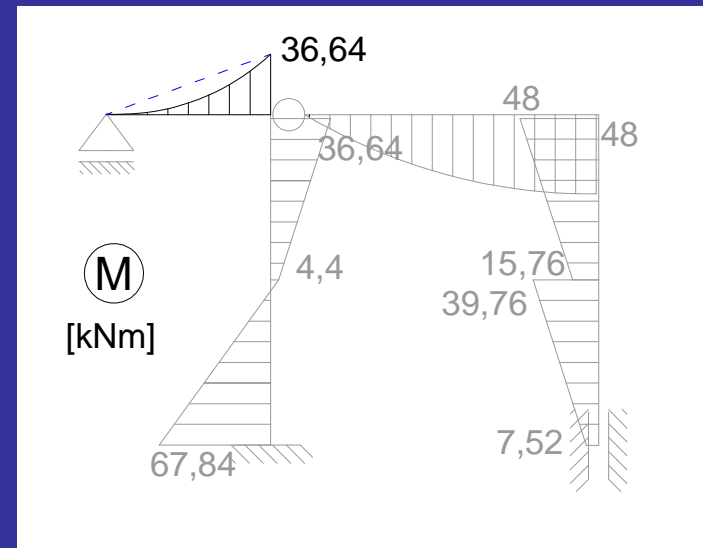
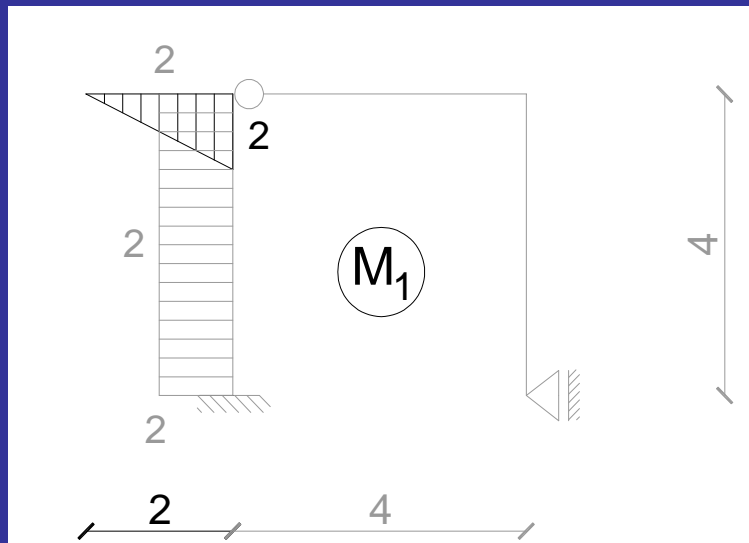
Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right)$$



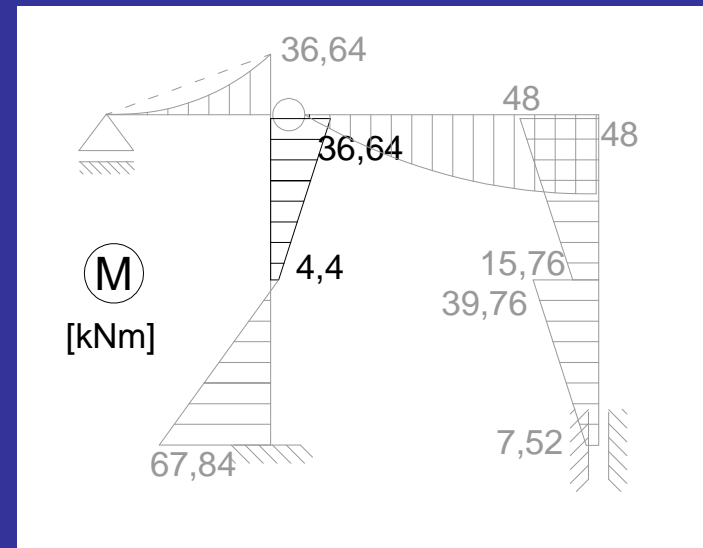
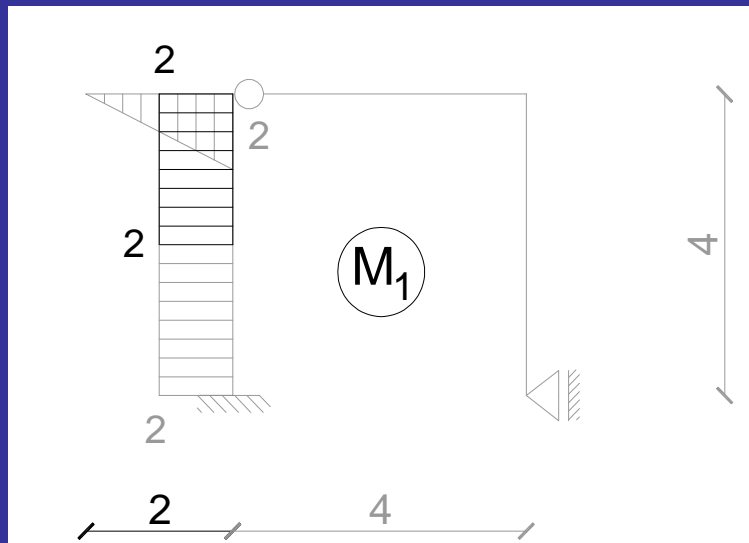
Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right)$$



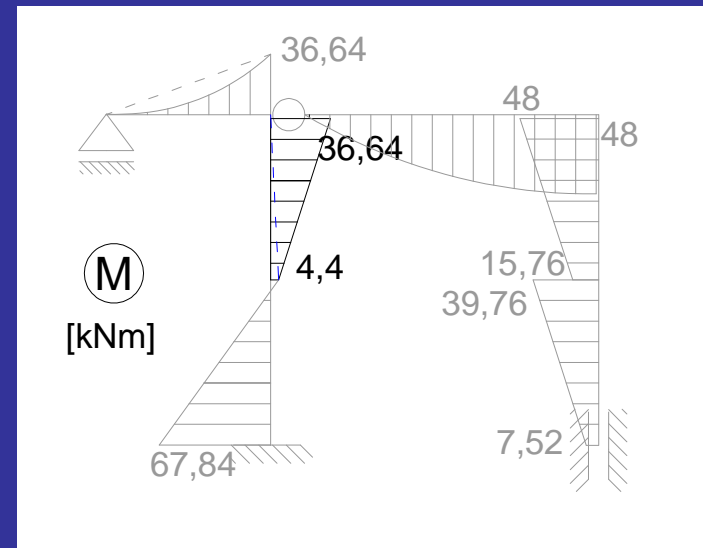
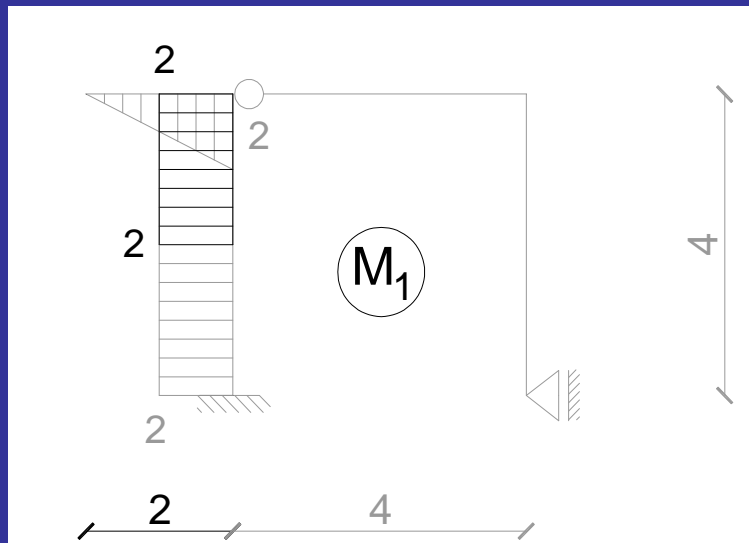
Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right)$$



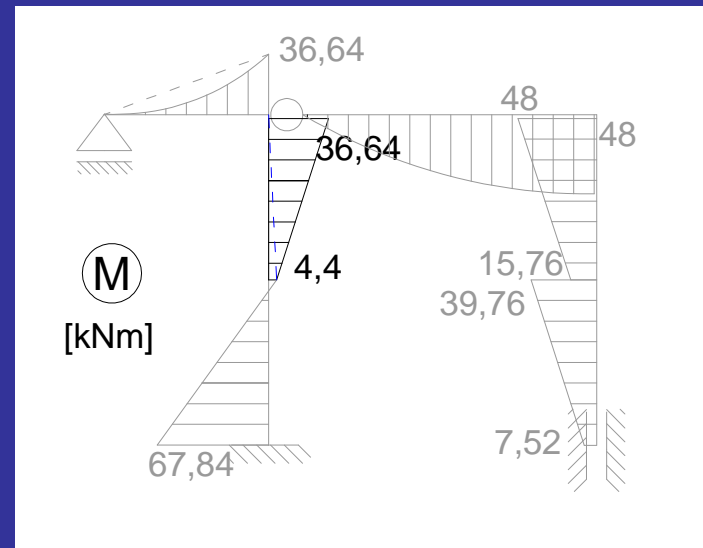
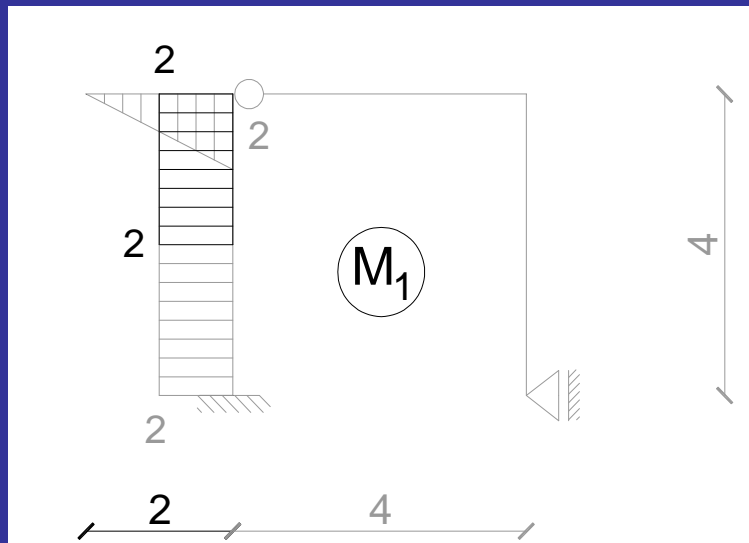
Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right)$$



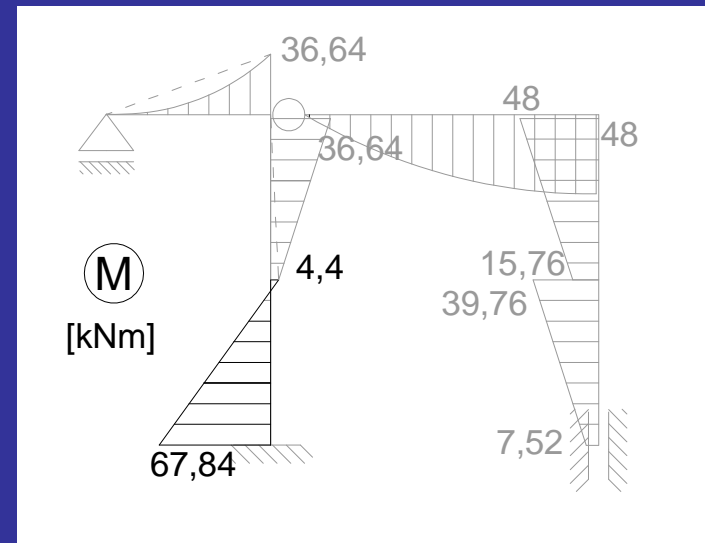
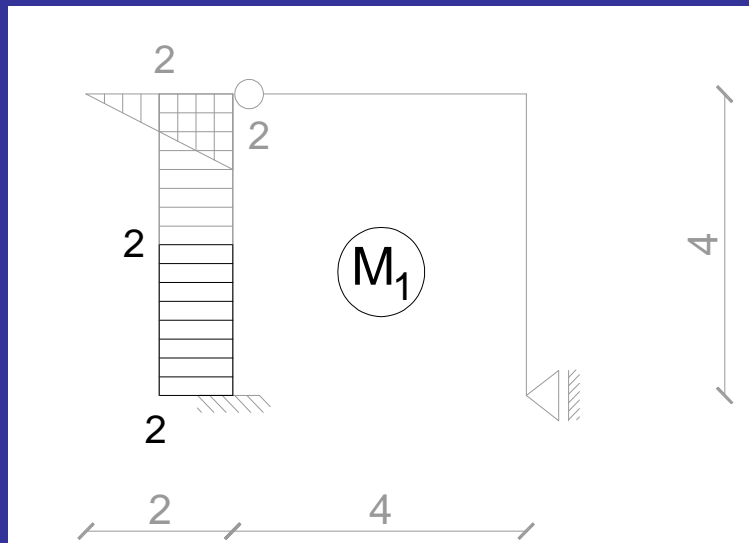
Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4,4}{2} + \frac{36,64}{2} \right) \right)$$



Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

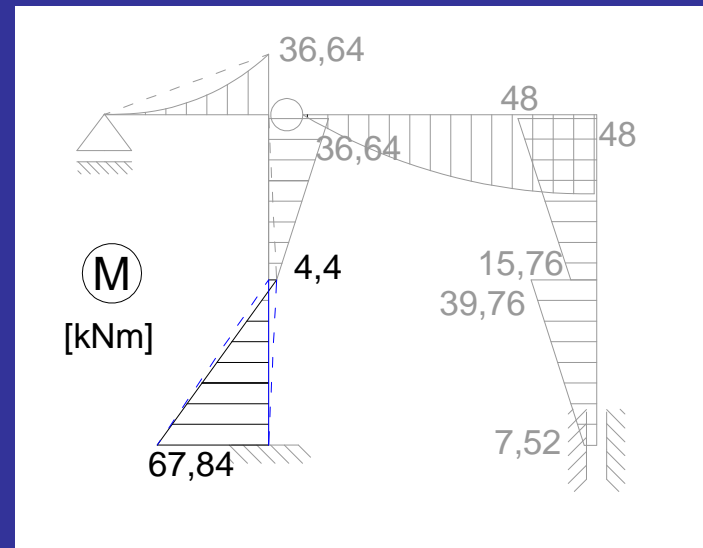
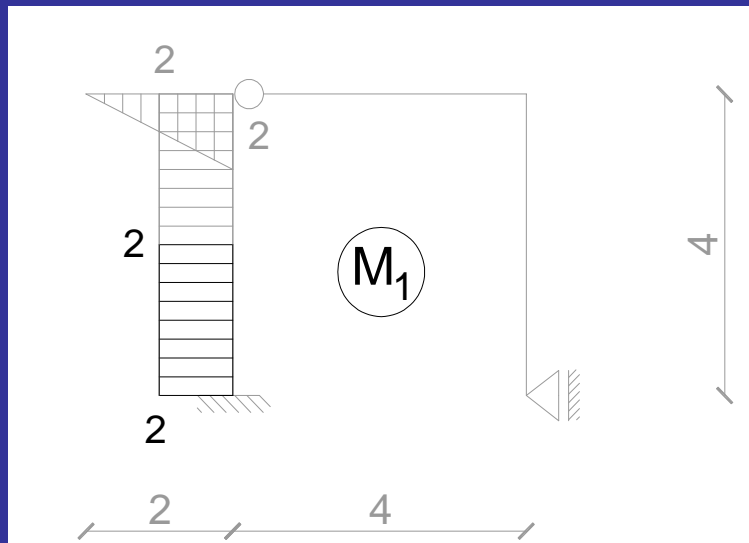
$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4,4}{2} + \frac{36,64}{2} \right) \right)$$



Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

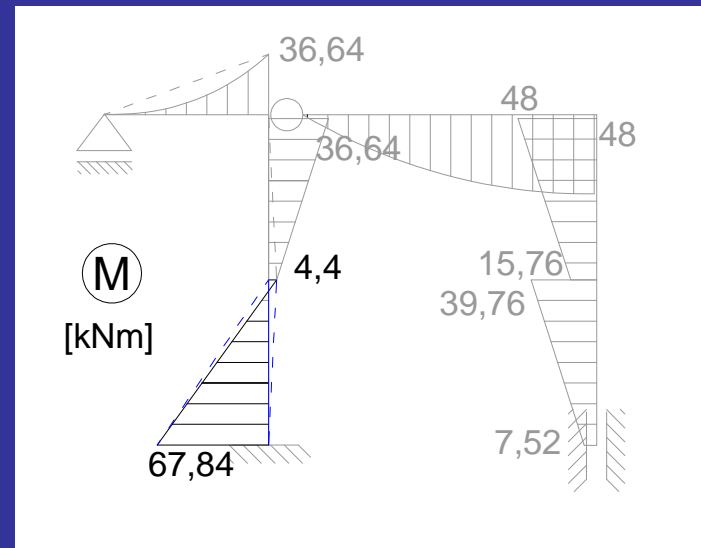
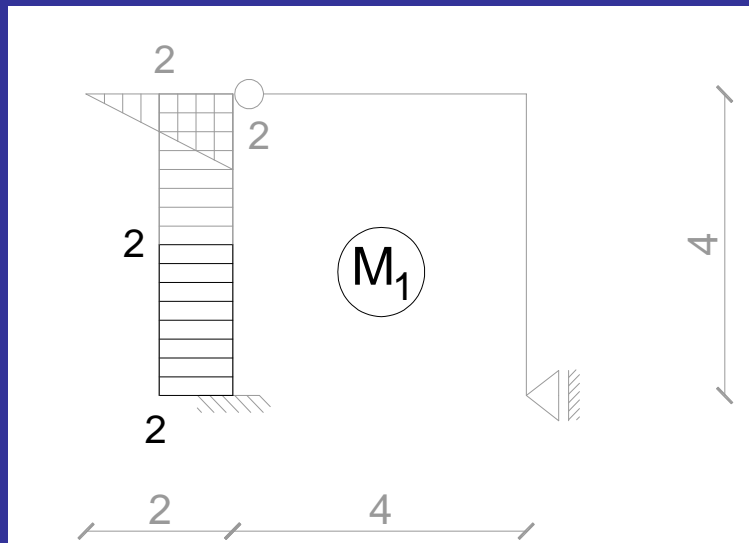
$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4,4}{2} + \frac{36,64}{2} \right) \right)$$

+



Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4,4}{2} + \frac{36,64}{2} \right) \right) + \frac{1}{EI} 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{67,84}{2} - \frac{4,4}{2} \right) = -0,053$$



Sprawdzenie zadania z 1. Twierdzenia redukcyjnego

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 36,64 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4,4}{2} + \frac{36,64}{2} \right) \right) + \frac{1}{EI} 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{67,84}{2} - \frac{4,4}{2} \right) = -0,053 \approx 0$$

