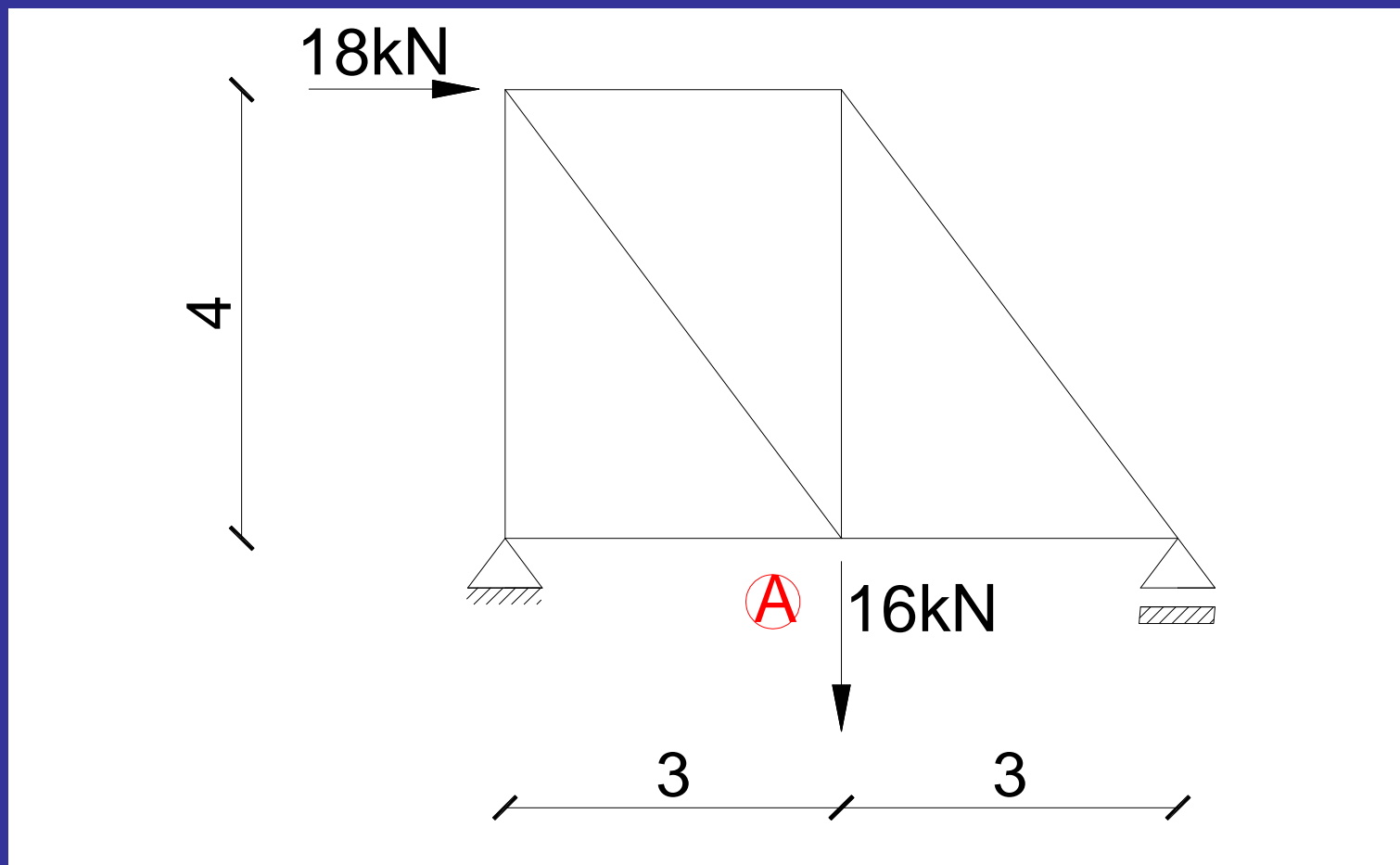


## Wyznaczanie przemieszczeń w kratownicy

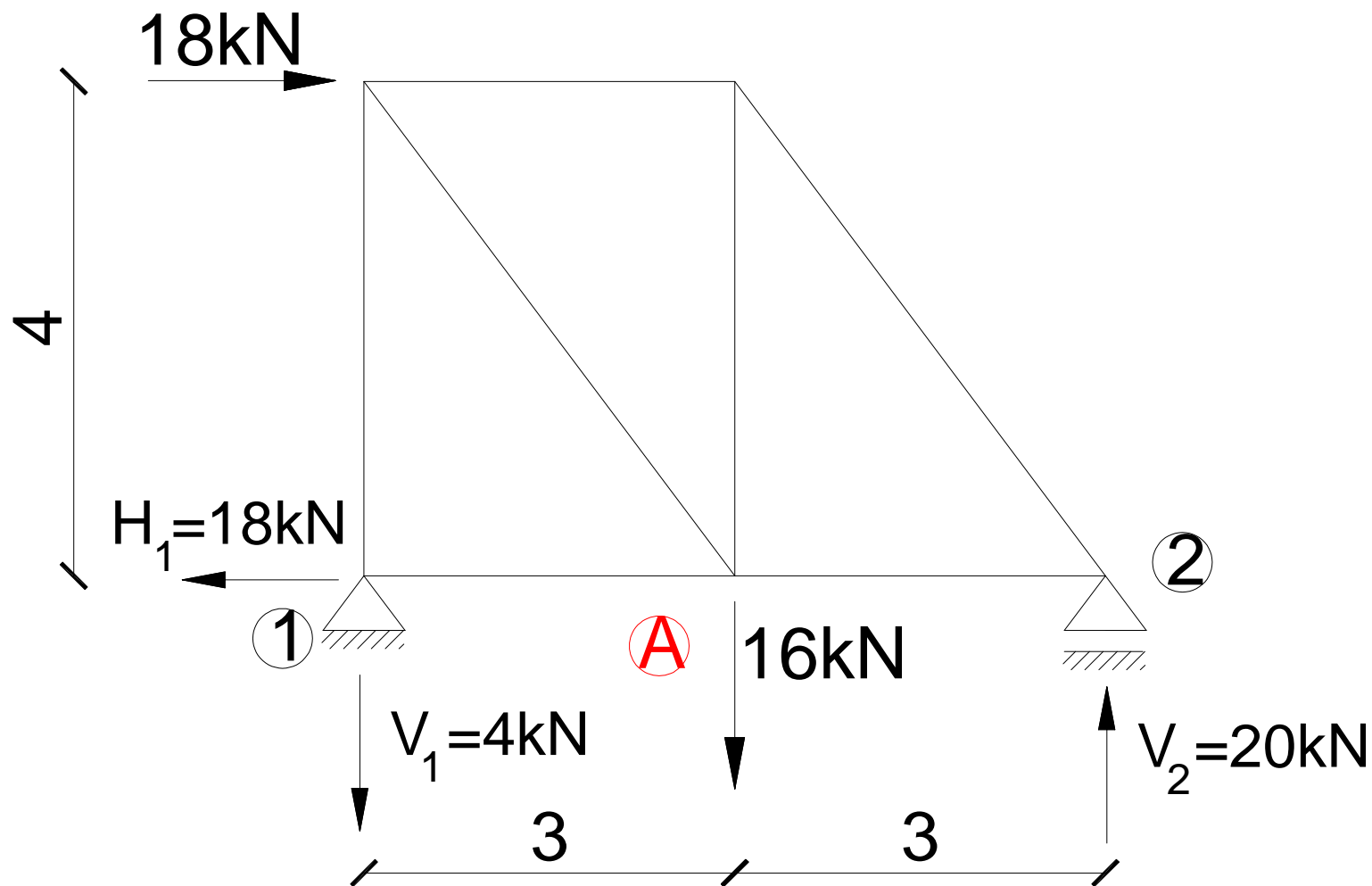
$$\delta = \int_L \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dL = \sum_{P=1}^n \frac{N_P \cdot L_P \cdot \bar{N}_P}{E_P A_P}$$

Całkujemy siły normalne na poszczególnych prętach  
i sumujemy dla całej konstrukcji

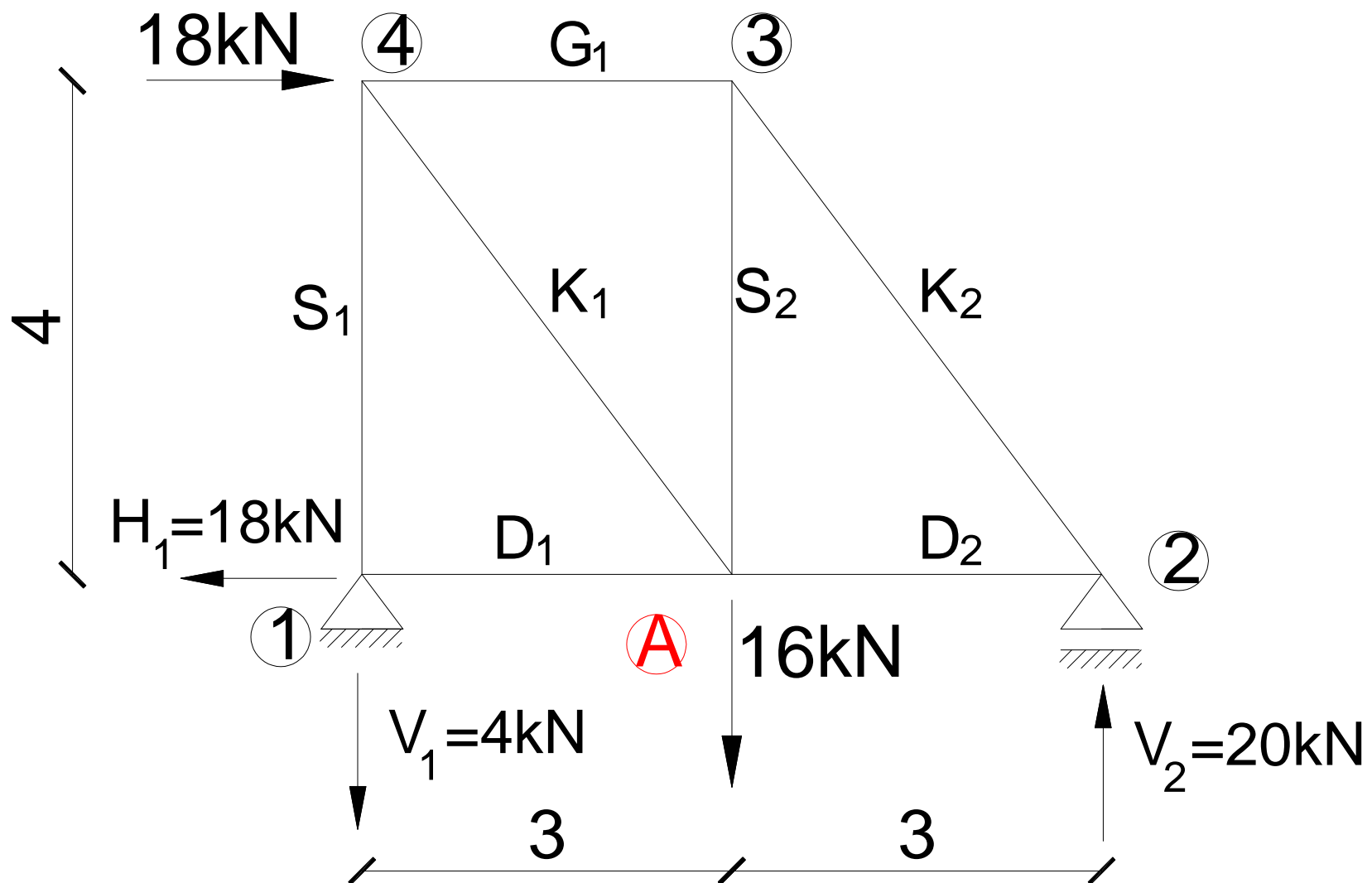
Zadanie: Wyznacz przemieszczenie pionowe węzła A z zasady prac wirtualnych,  $EA = \text{const}$



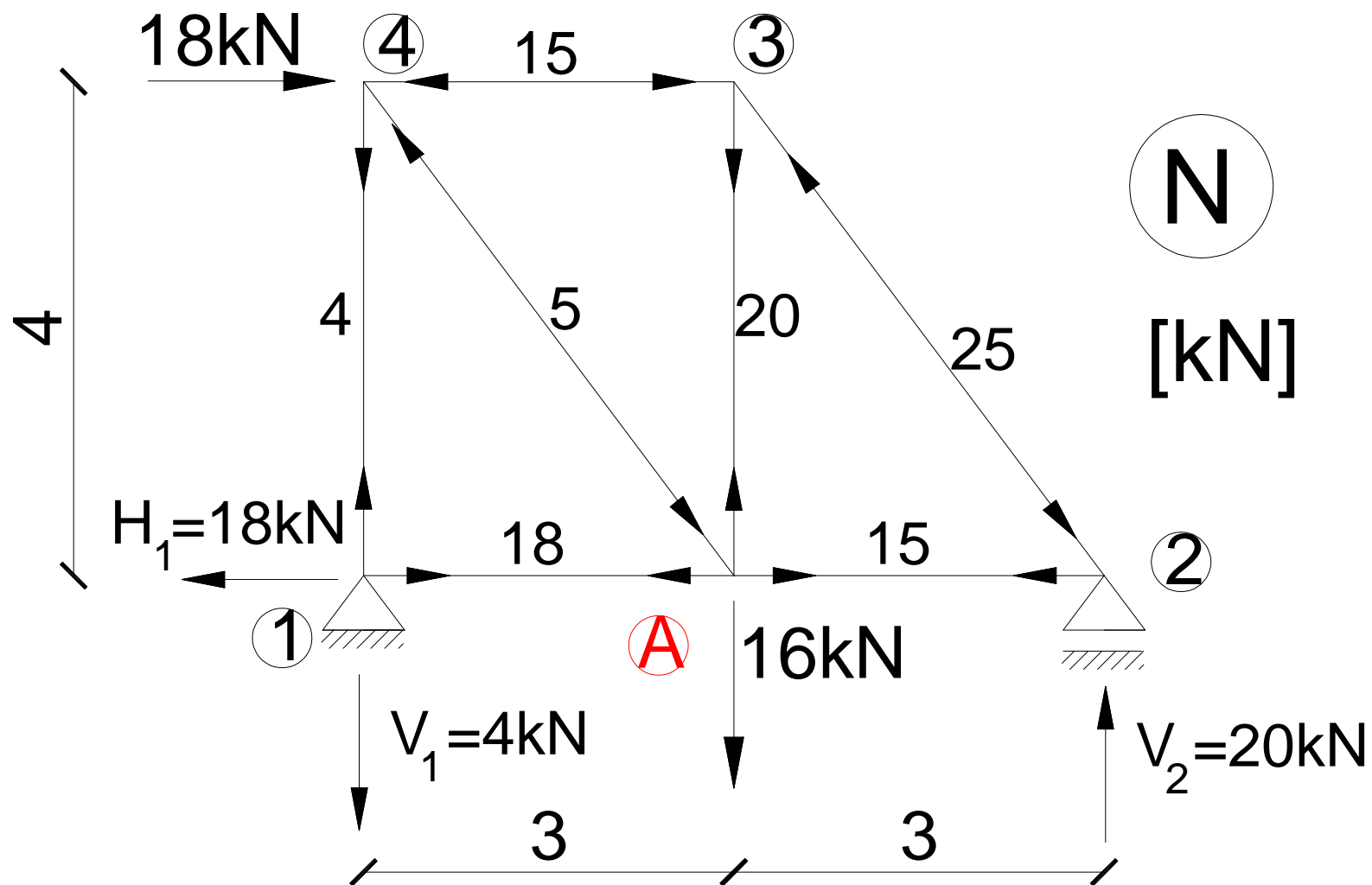
# Wyznaczenie reakcji



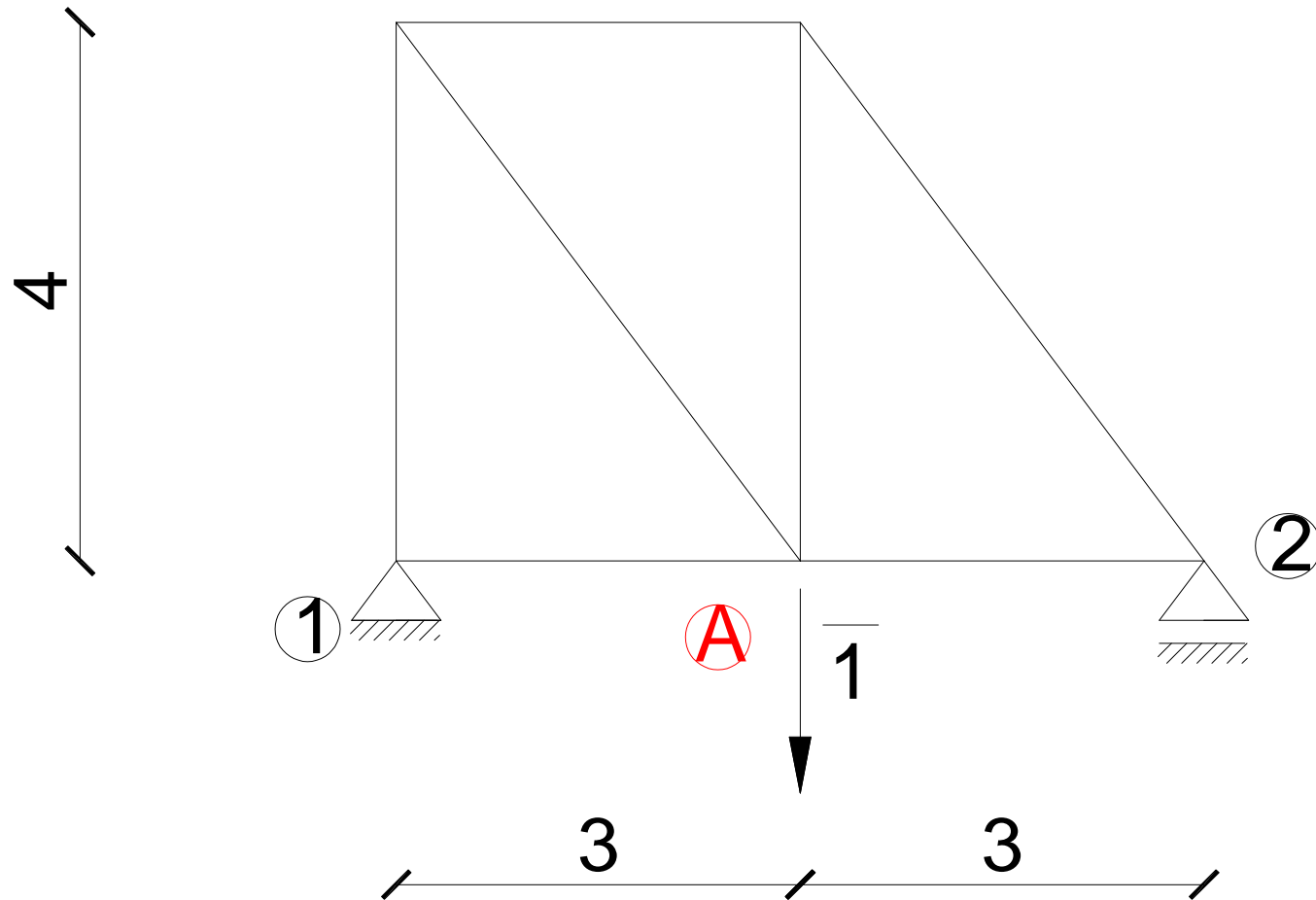
# Wyznaczenie sił w prętach od obciążenia zewnętrznego



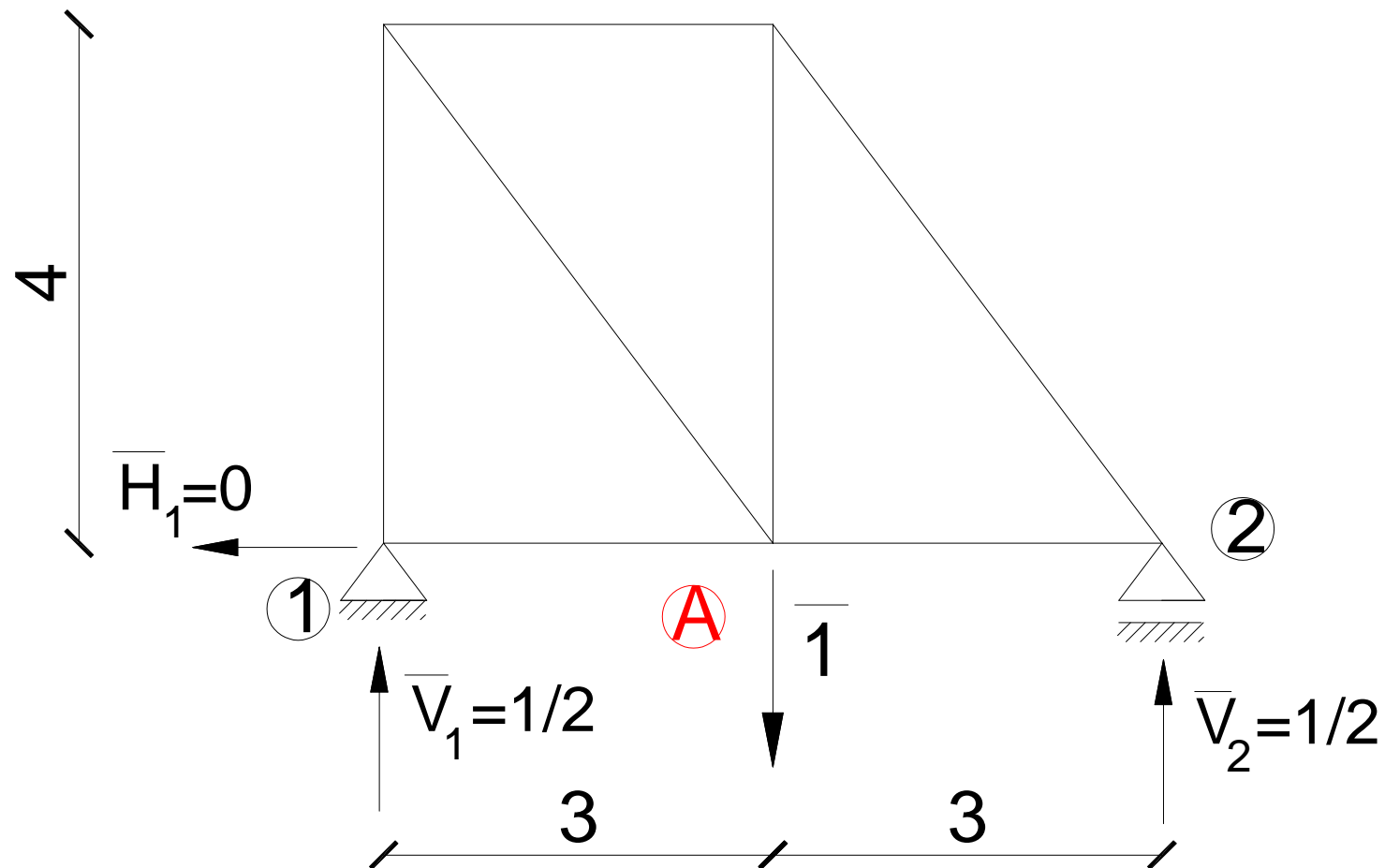
# Wykres sił normalnych w kratownicy



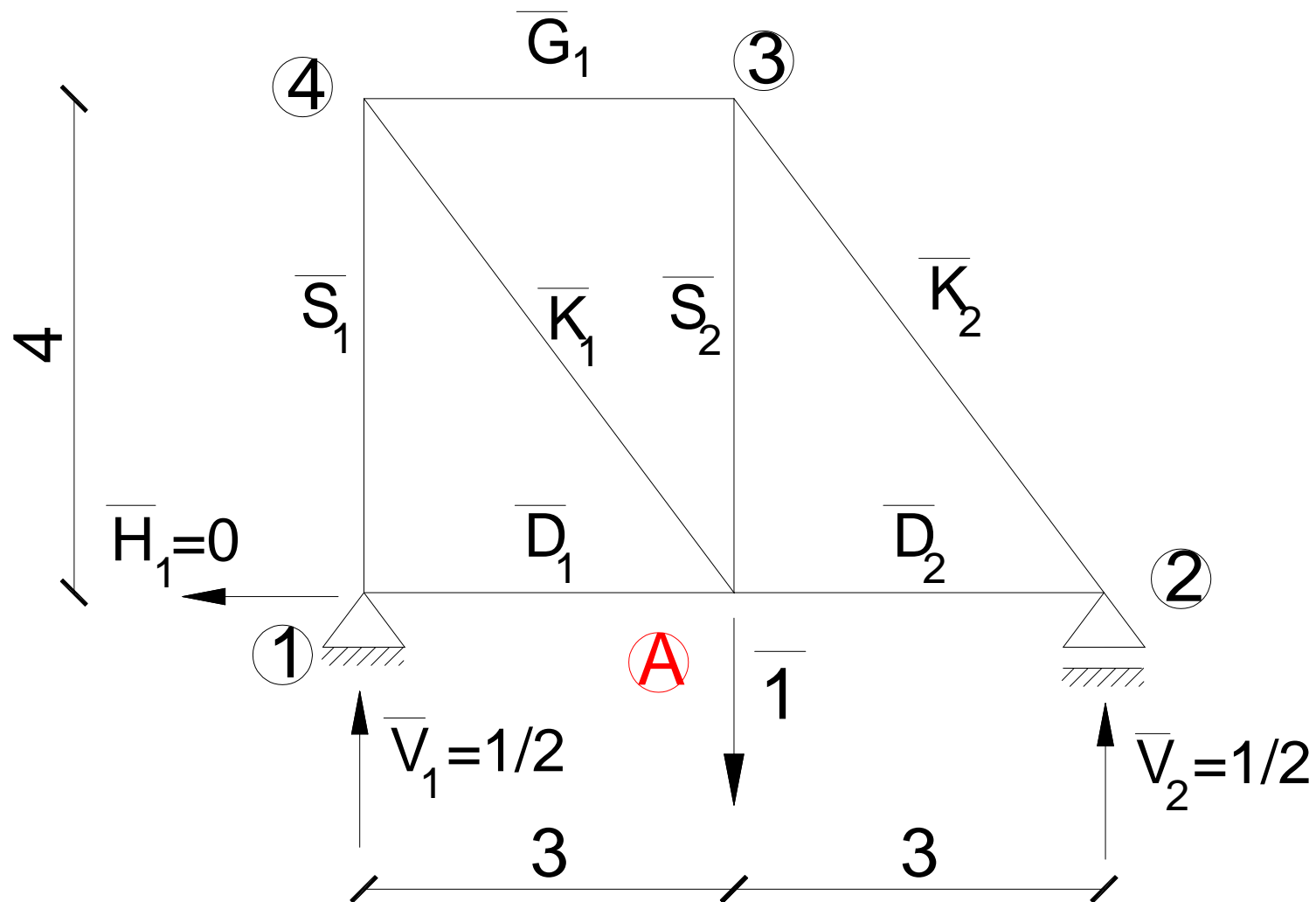
# Obciążenie wirtualne



# Obciążenie wirtualne

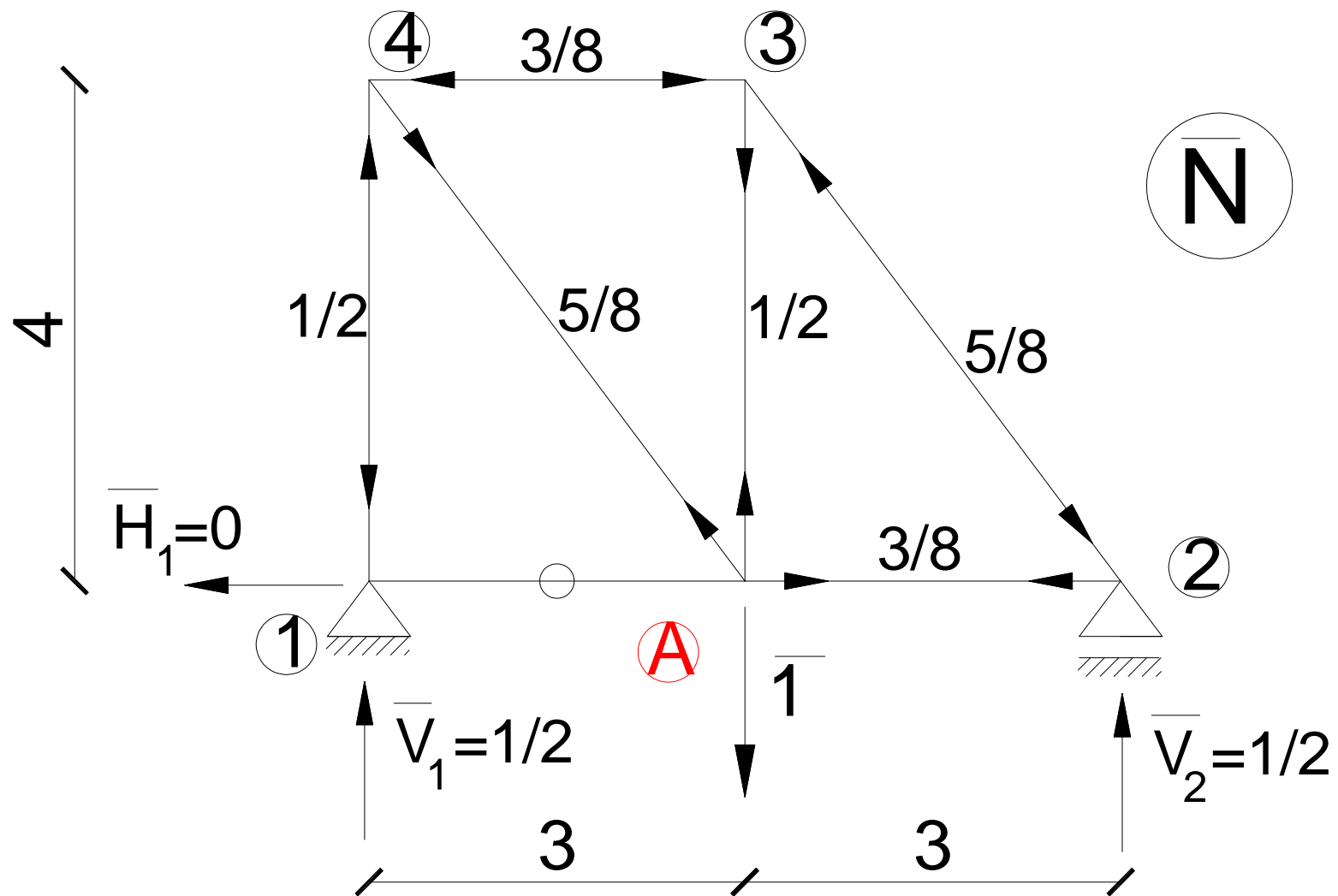


# Wyznaczenie sił od obciążenia wirtualnego

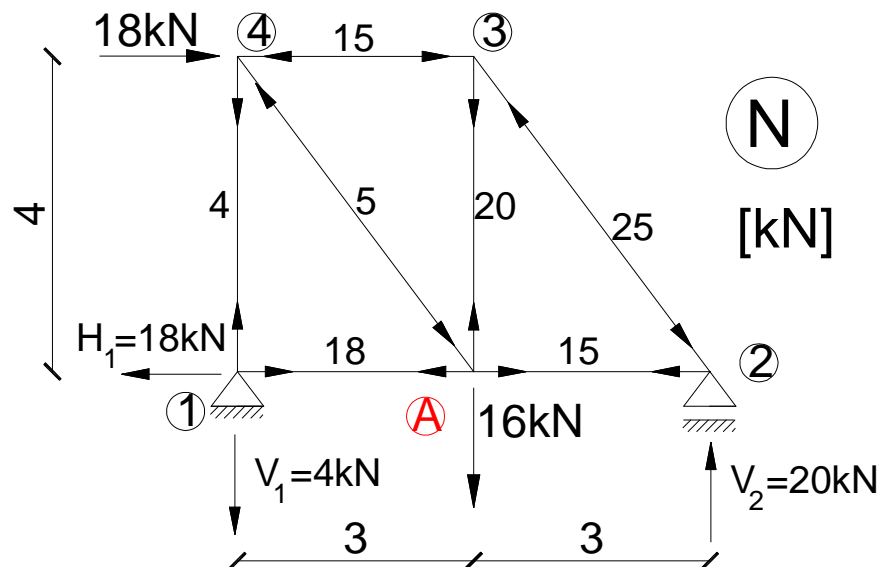




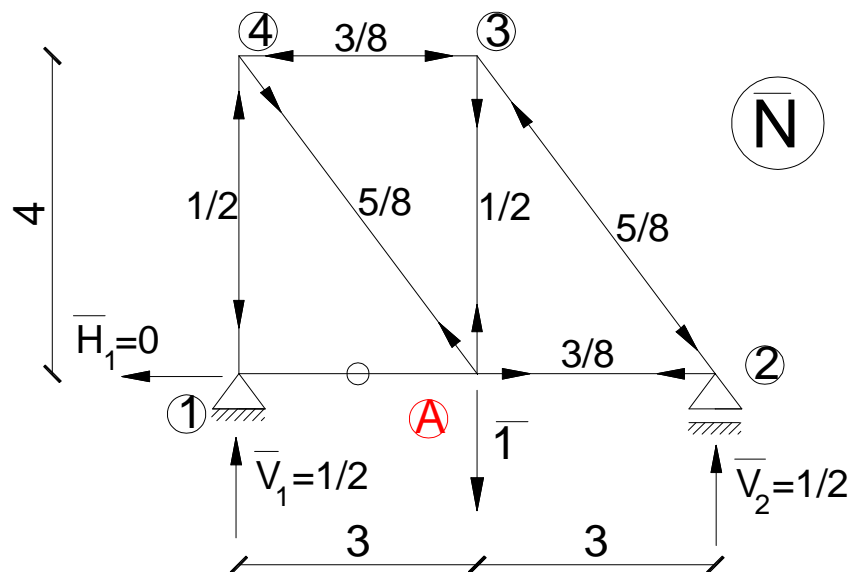
# Wykres sił od obciążenia wirtualnego



# Wyznaczenie przemieszczenia



$$v_A = \frac{1}{EA} (4 \cdot (-0,5) \cdot 4 + 20 \cdot 0,5 \cdot 4) + \frac{1}{EA} \left( 0 \cdot 18 \cdot 3 + 15 \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 - 15 \cdot \left( -\frac{3}{8} \right) \cdot 3 \right) + \frac{1}{EA} \left( -5 \cdot \frac{5}{8} \cdot 5 - 25 \cdot \frac{5}{8} \cdot 5 \right) = \frac{513}{4EA}$$



# Metoda Sił

# Metoda Sił

- Metoda rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych
- Układy statycznie niewyznaczalne – układy mające więcej reakcji niż liczba równań równowagi
- Liczba niewiadomych reakcji określa stopień statycznej niewyznaczalności

Stopień statycznej niewyznaczalności dla belek i ram bez obwodu zamkniętego:

$$n_s = l_r - l_p - 3$$

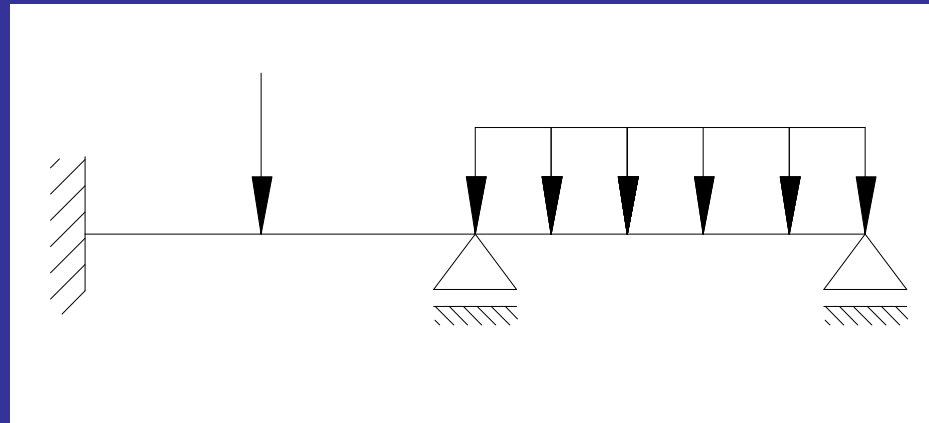
$l_r$  – liczba reakcji w układzie

$l_p$  – liczba przegubów z uwzględnieniem ich krotności

3 – liczba równań równowagi na płaszczyźnie

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wyznaczamy stopień statycznej niewyznaczalności układu

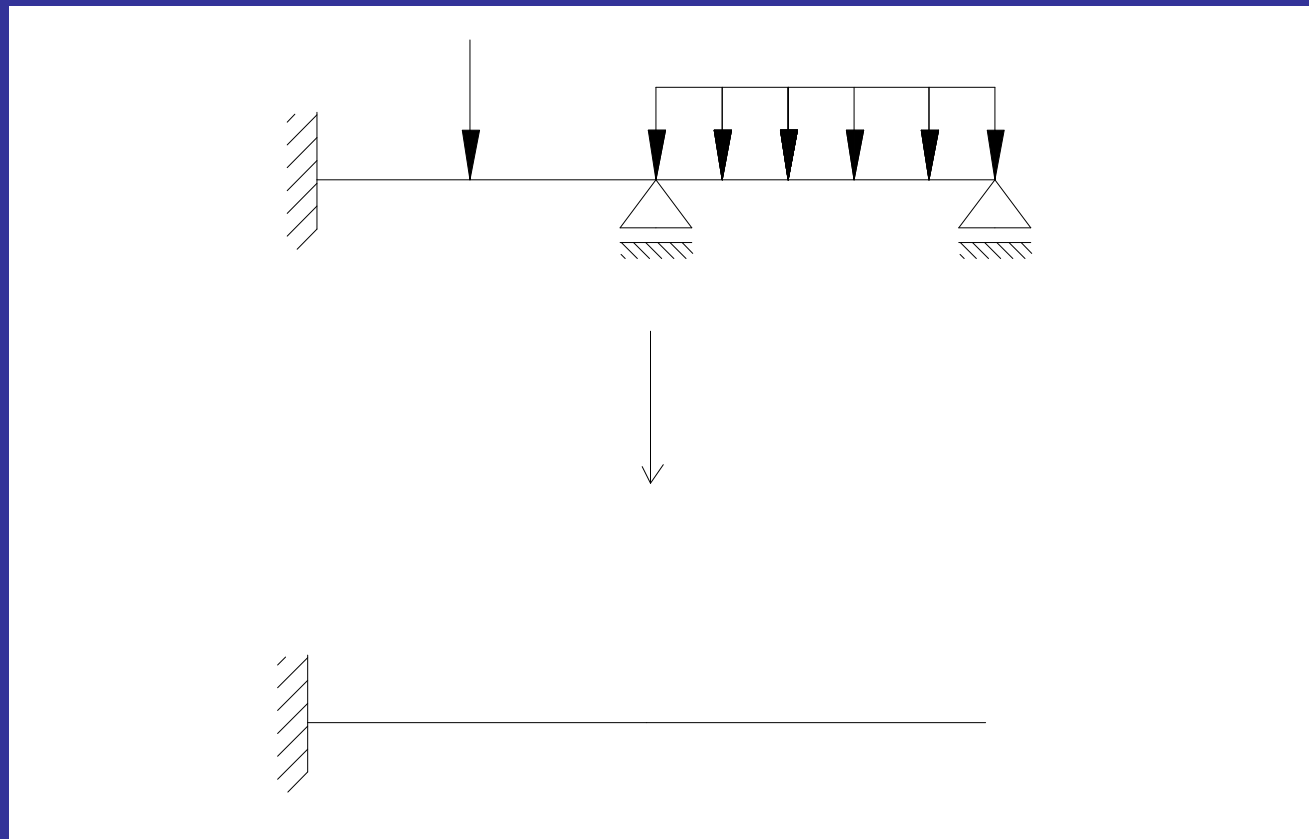


$$n_s = 5 - 0 - 3 = 2$$

Układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny

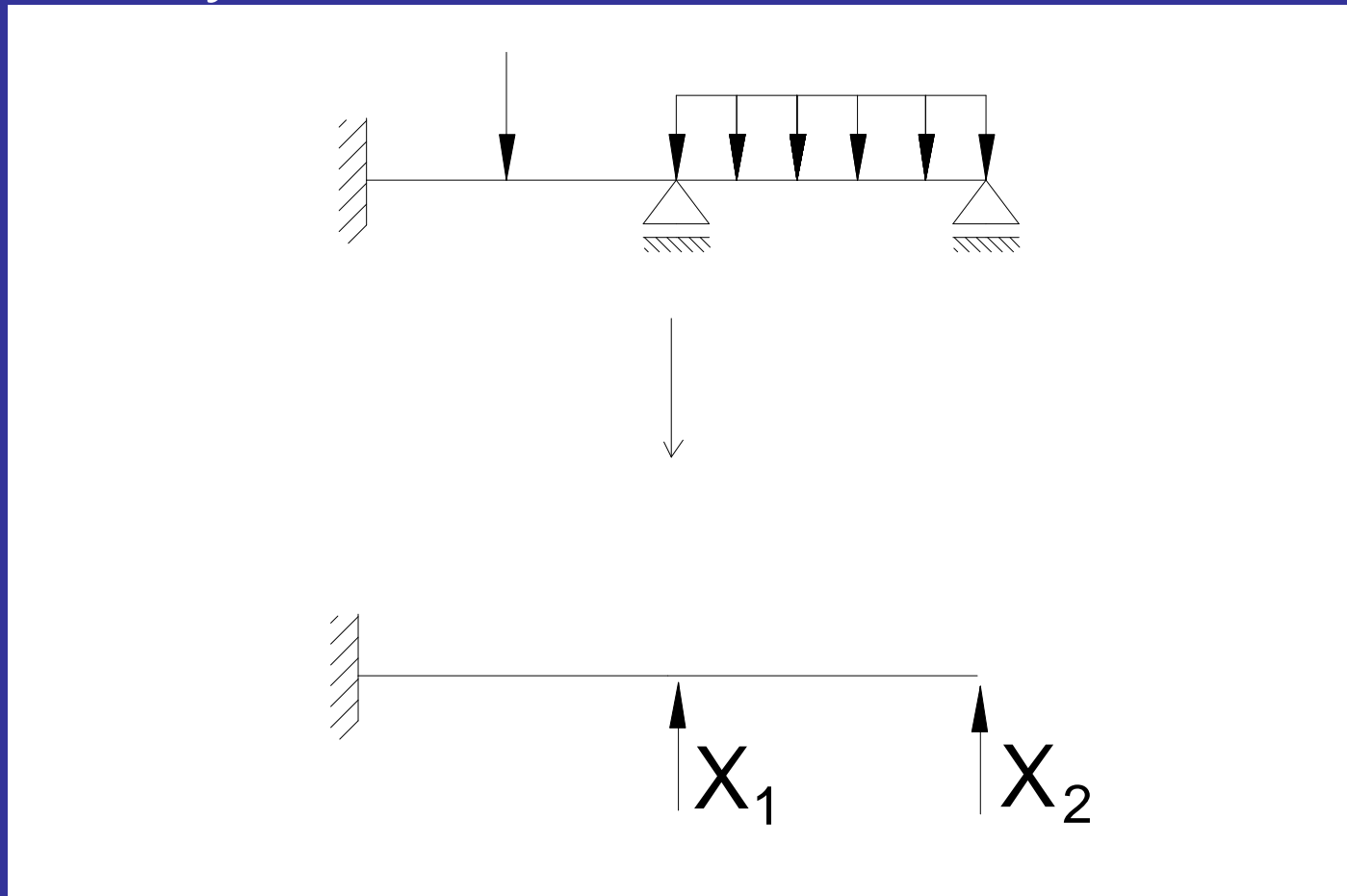
# Metoda Sił – tok postępowania

- Konstrukcję pozbawiamy więzów, tak aby powstał układ statycznie wyznaczalny i geometrycznie niezmienny



# Metoda Sił – tok postępowania

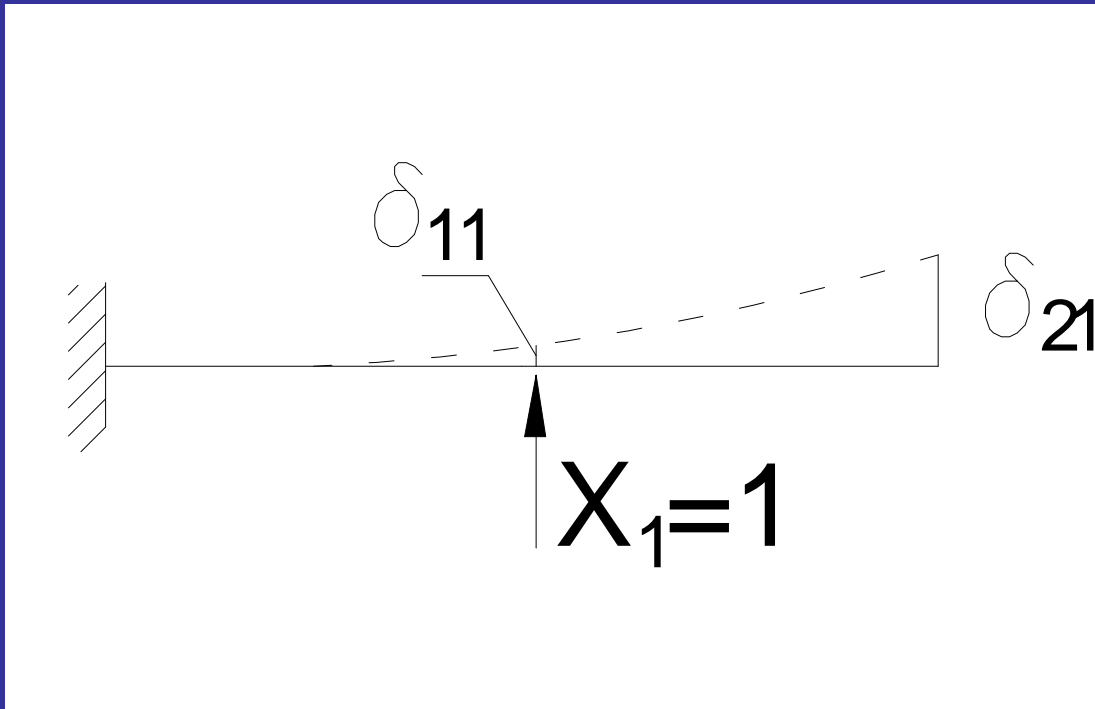
- W miejscu usuniętych więzów wprowadzamy nadliczbowe niewiadome – uogólnione siły,  
zamiast blokady przesuwu – siły skupione  
zamiast blokady obrotu - moment





# Metoda Sił – tok postępowania

- Obciążamy schemat podstawowy pierwszą nadliczbową  $X_1=1$

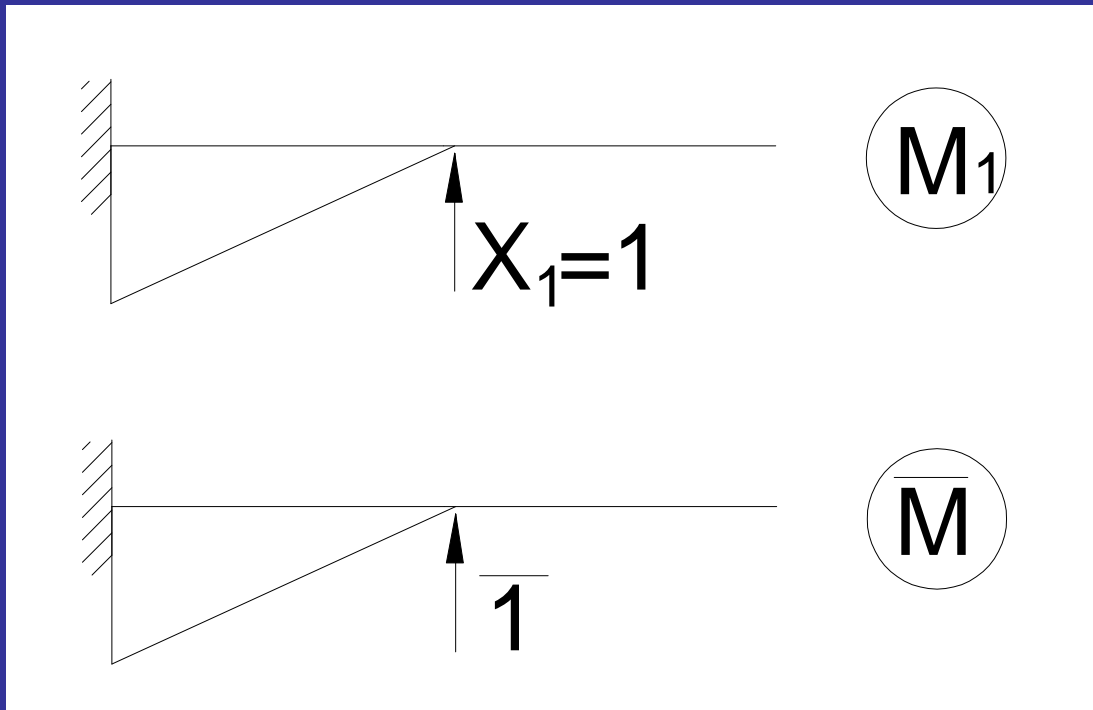


$\delta_{11}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_1$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_1 = 1$

$\delta_{21}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_2$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_1 = 1$

# Metoda Sił – tok postępowania

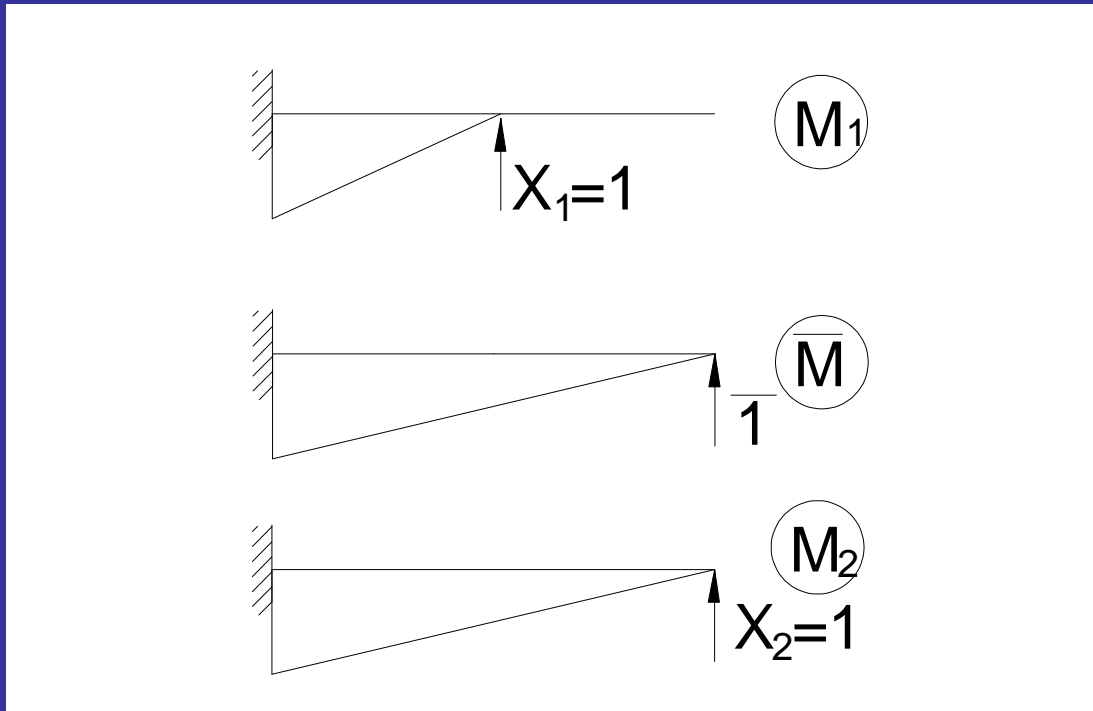
- Wyznaczenie  $\delta_{11}$



$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1 \bar{M}}{EI} ds = \int_s \frac{M_1 M_1}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

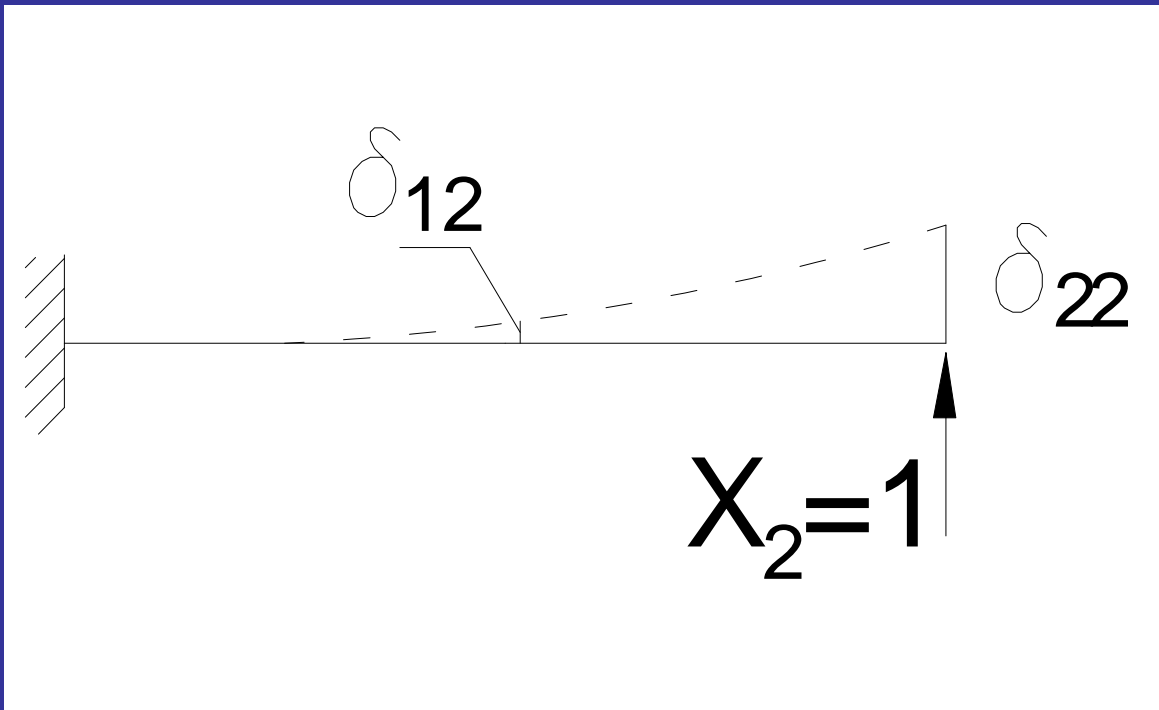
- Wyznaczenie  $\delta_{21}$



$$\delta_{21} = \int_s \frac{M_1 \bar{M}}{EI} ds = \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

- Obciążamy schemat podstawowy drugą nadliczbową  $X_2=1$

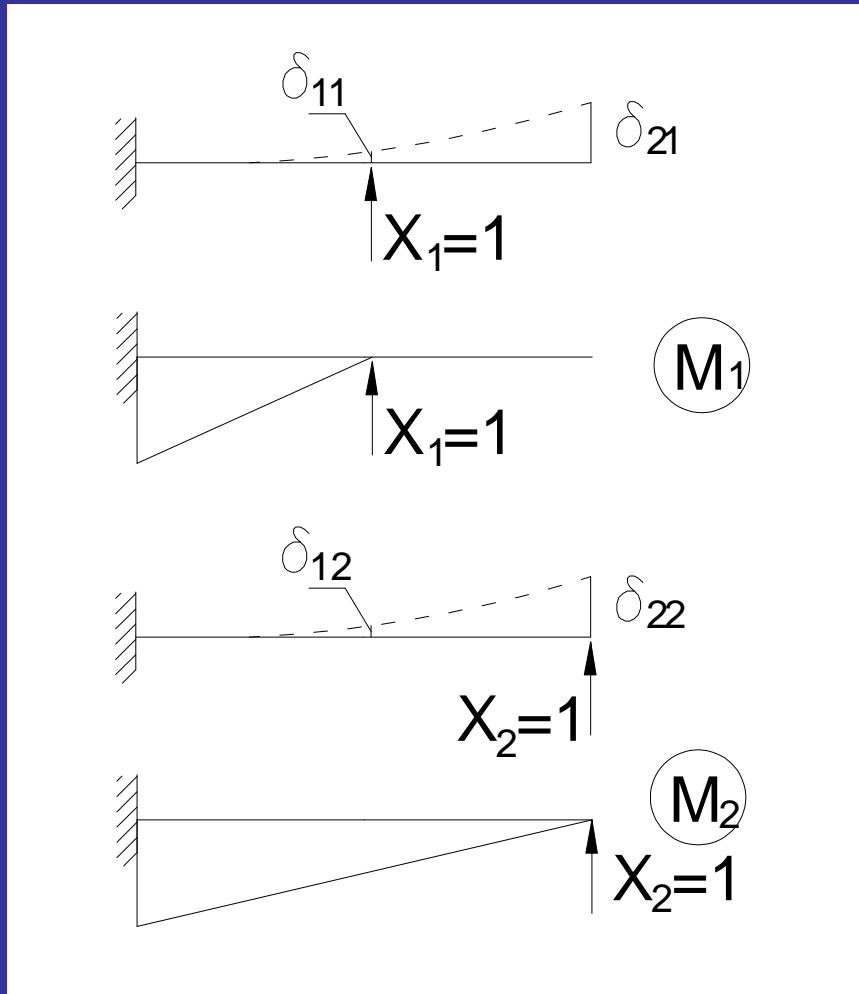


$\delta_{22}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_2$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_2 = 1$

$\delta_{12}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_1$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego siłą  $X_2 = 1$

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wyznaczenie  $\delta_{22}$  i  $\delta_{12}$

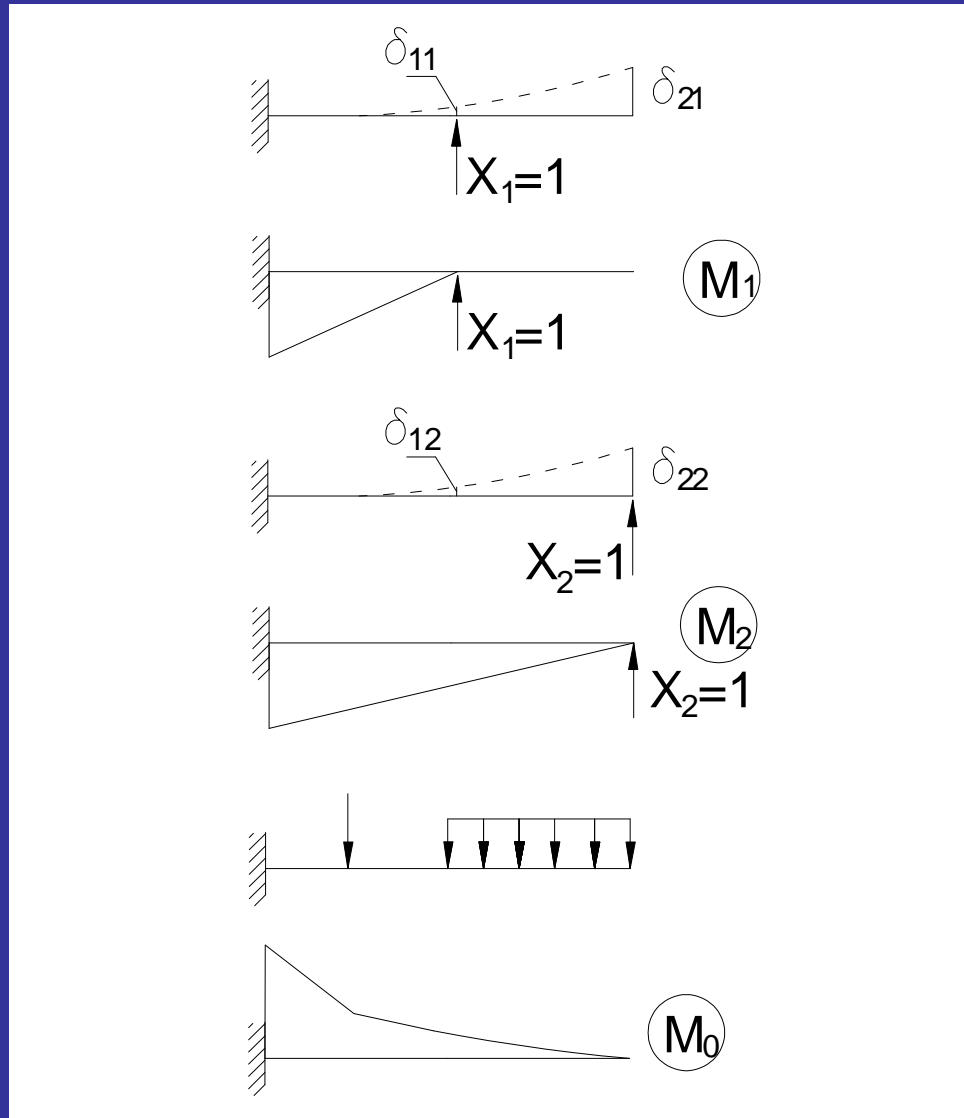


$$\delta_{22} = \int_s \frac{M_2 M_2}{EI} ds$$

$$\delta_{12} = \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wpływ obciążenia zewnętrznego -  $\delta_{10}$  i  $\delta_{20}$

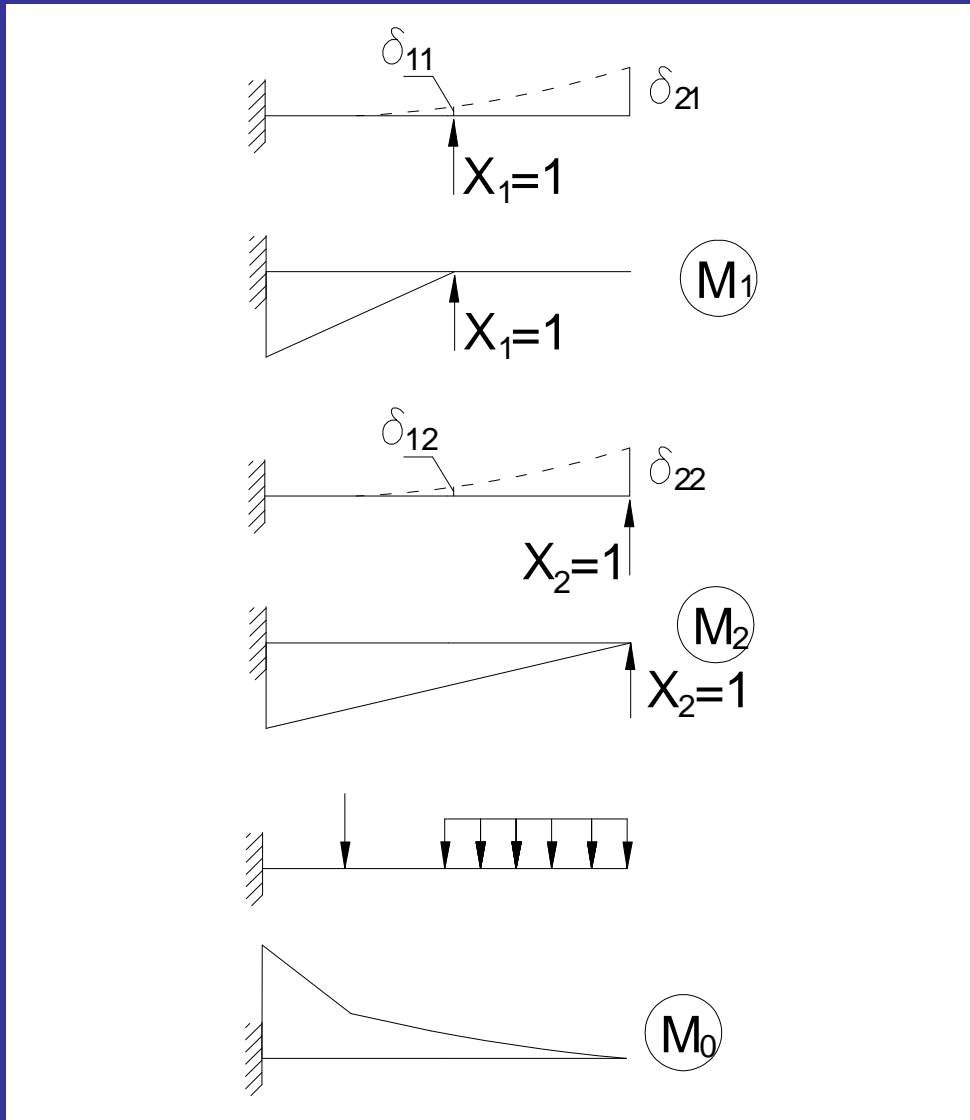


$\delta_{10}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_1$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego obciążeniem zewnętrznym

$\delta_{20}$  – wartość przemieszczenia na kierunku działania  $X_2$ , pod wpływem obciążenia układu podstawowego obciążeniem zewnętrznym

# Metoda Sił – tok postępowania

- Wpływ obciążenia zewnętrznego -  $\delta_{10}$  i  $\delta_{20}$

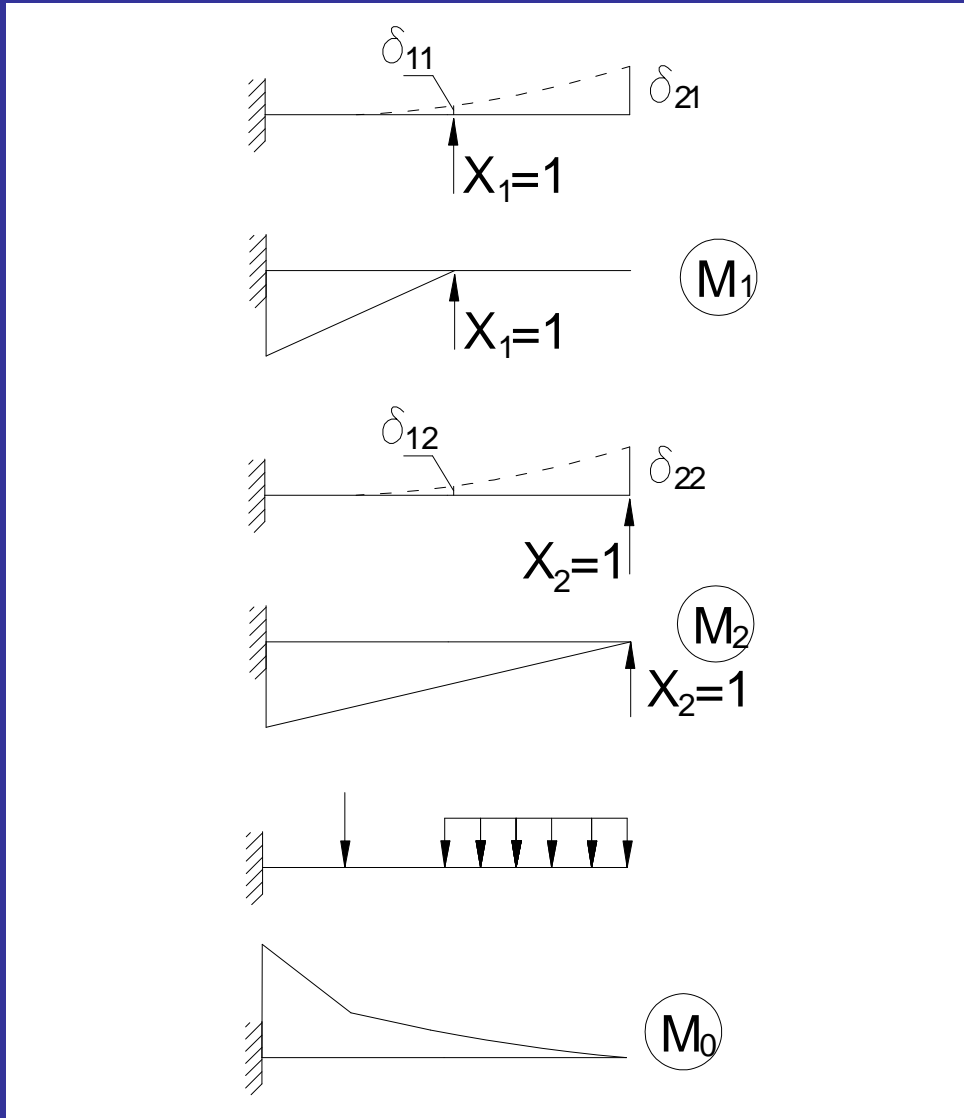


$$\delta_{10} = \int_s \frac{M_1 M_0}{EI} ds$$

$$\delta_{20} = \int_s \frac{M_2 M_0}{EI} ds$$

# Metoda Sił – tok postępowania

- Ogólnie – w przypadku belek i ram pod obciążeniem statycznym



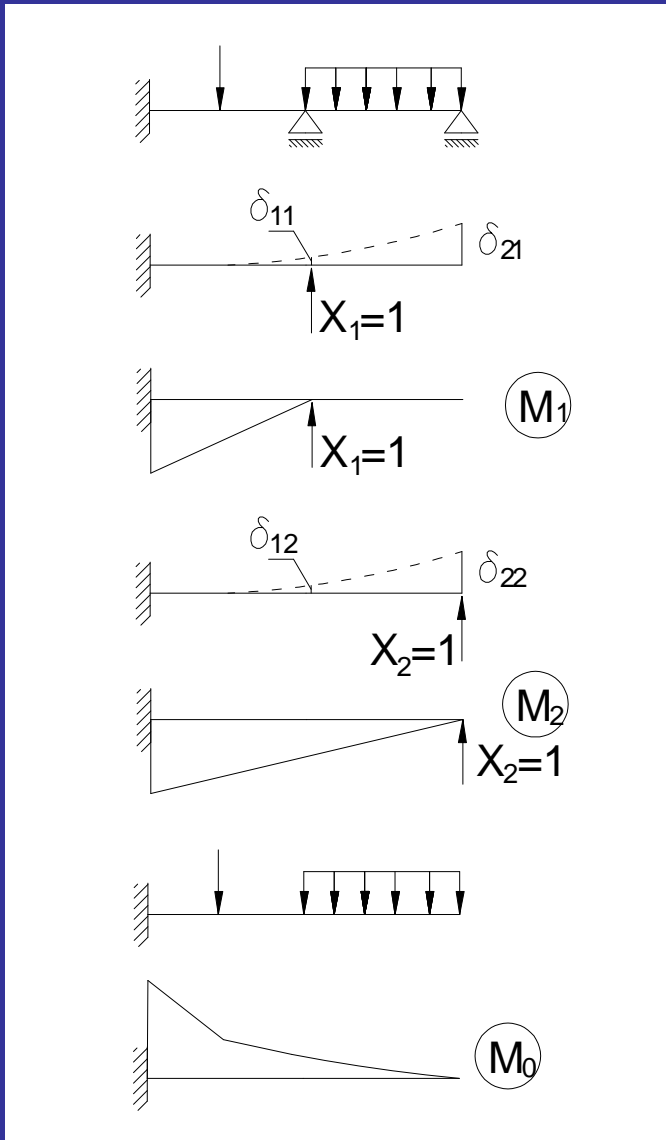
$$\delta_{jk} = \int_s \frac{M_j M_k}{EI} ds$$

$$\delta_{j0} = \int_s \frac{M_j M_0}{EI} ds$$



# Metoda Sił – tok postępowania

W rzeczywistym schemacie statycznie niewyznaczalnym przemieszczenia w miejsce podpór są równe 0, stąd



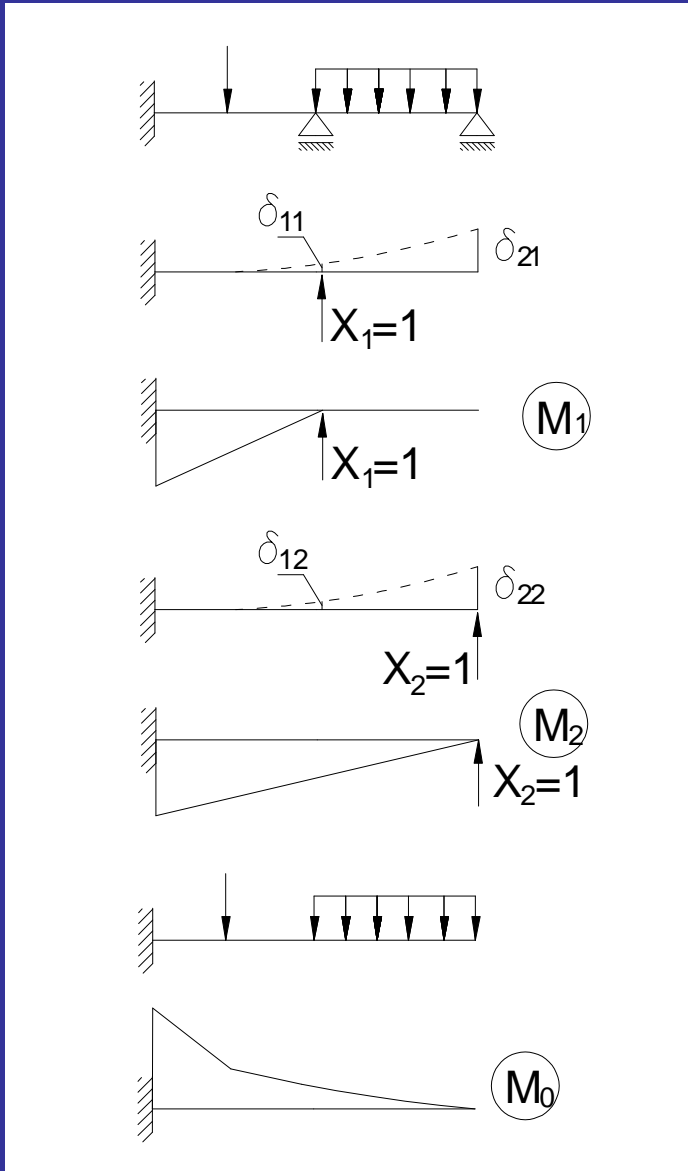
## Przemieszczenie na podporze 1

$$\delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0$$

## Przemieszczenie na podporze 2

$$\delta_2 = \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0$$

# Układ równań kanonicznych metody sił dla schematu dwukrotnie statycznie niewyznaczalnego:



$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1, X_2$$

Wyznaczenie wartości momentu w punkcie „i”  
od obciążenia zewnętrznego dla układu  
statycznie niewyznaczalnego:

$$M_i = M_{i1} \cdot X_1 + M_{i2} \cdot X_2 + M_{i0}$$

