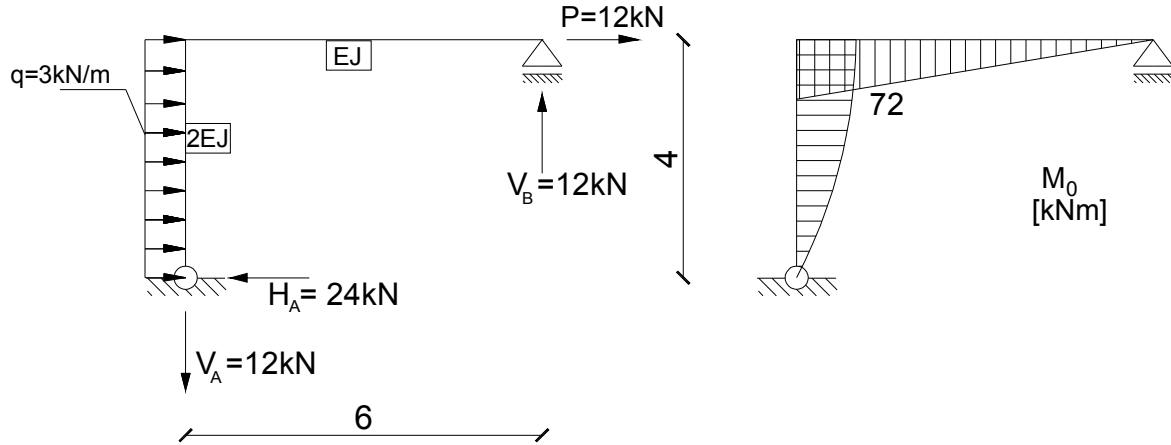
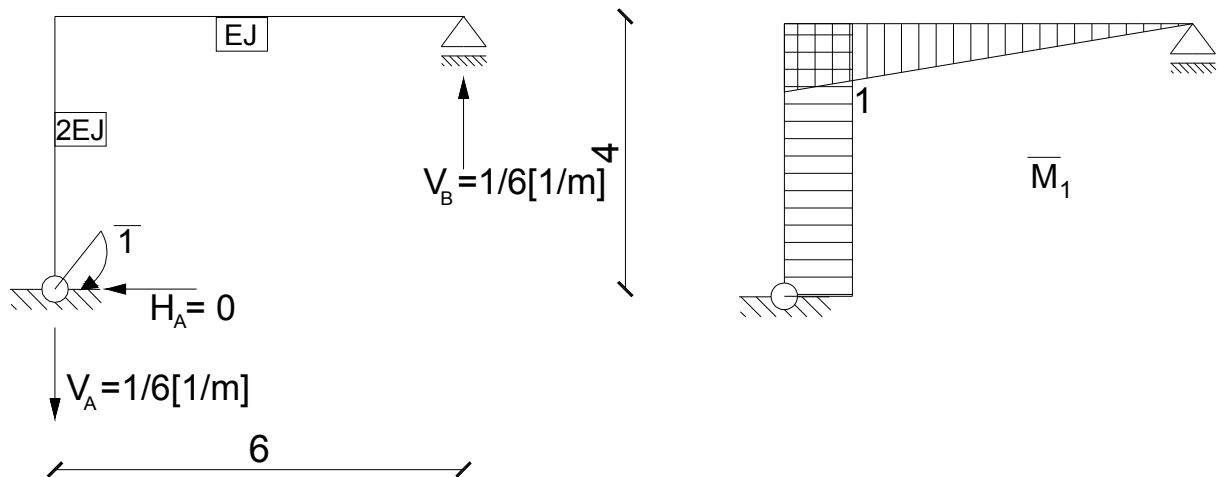


Zadanie 1. Narysuj odkształconą postać ramy jak na rysunku. Zadanie rozwiąż zasadą prac wirtualnych.



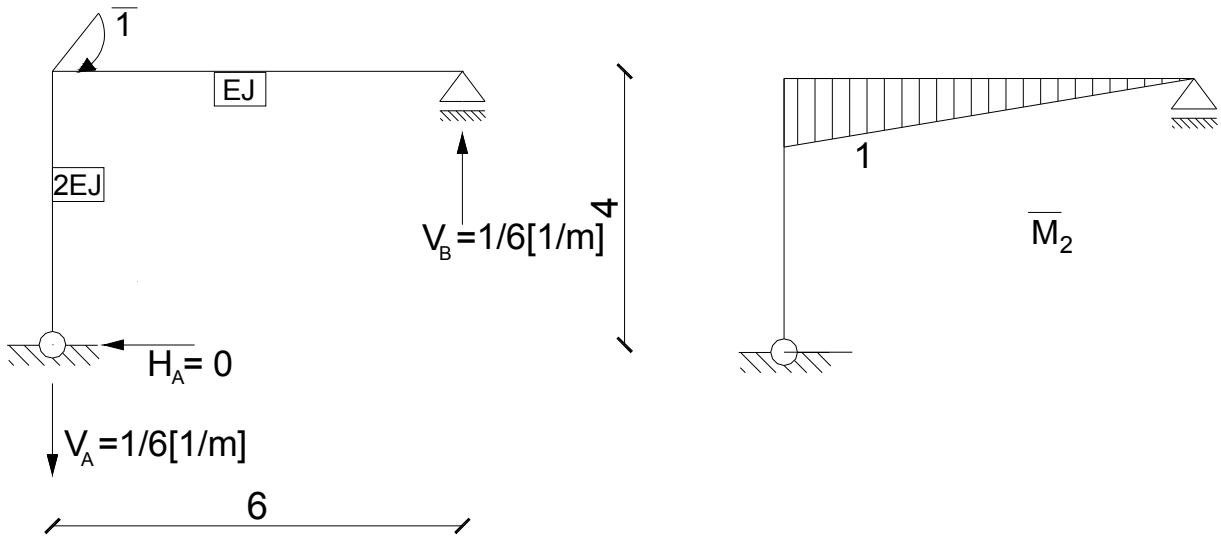
Wyznaczamy poszczególne przemieszczenia z zasady prac wirtualnych

a) kąt obrotu na podporze A



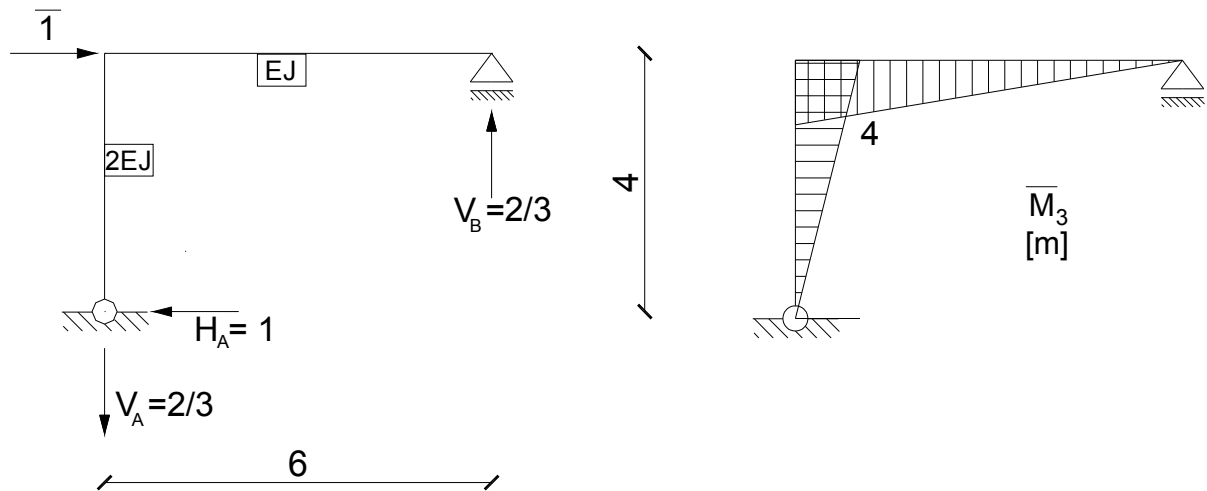
$$\varphi_A = \frac{1}{2EJ} \left(0,5 \cdot 72 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ} \left(0,5 \cdot 72 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{224}{EJ} = 224a$$

b) kąt obrotu w węźle:



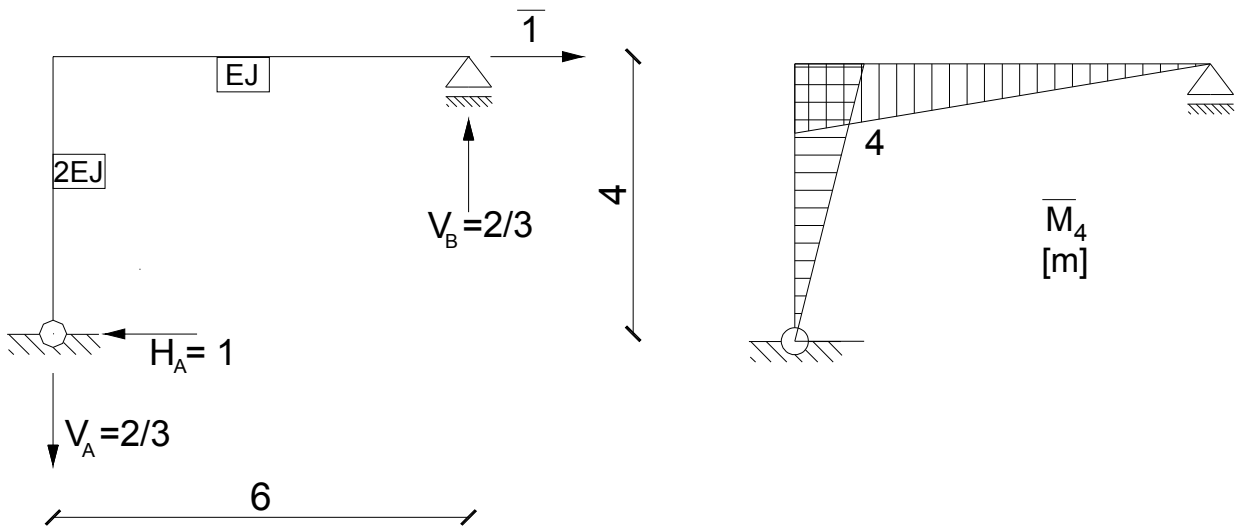
$$\varphi_c = \frac{1}{EJ} (0,5 \cdot 72 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1) = \frac{144}{EJ} = 144a$$

c) przemieszczenie poziome węzła środkowego:



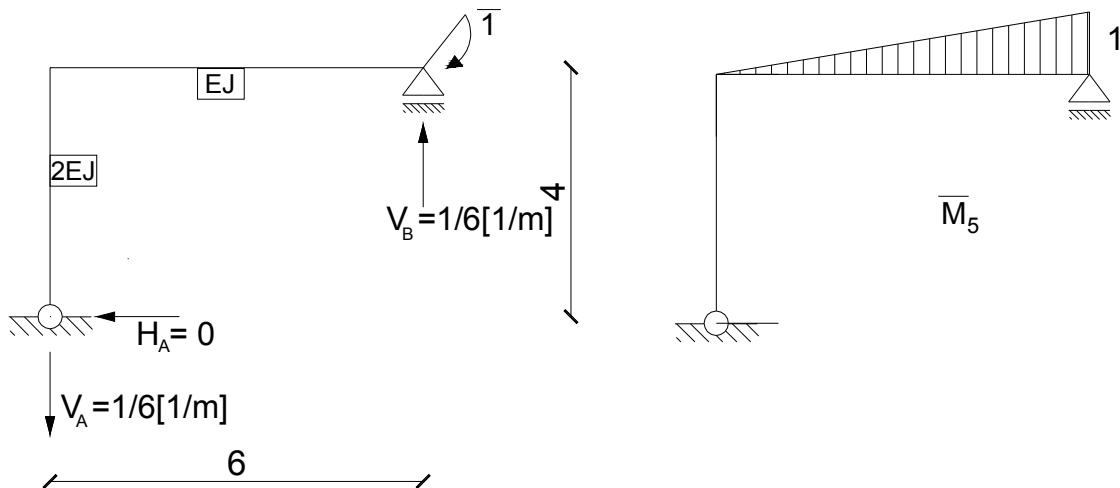
$$u_c = \frac{1}{2EJ} (0,5 \cdot 72 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4) + \frac{1}{EJ} (0,5 \cdot 72 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4) = \frac{784}{EJ} = 784a$$

e) przemieszczenie poziome podpory B:



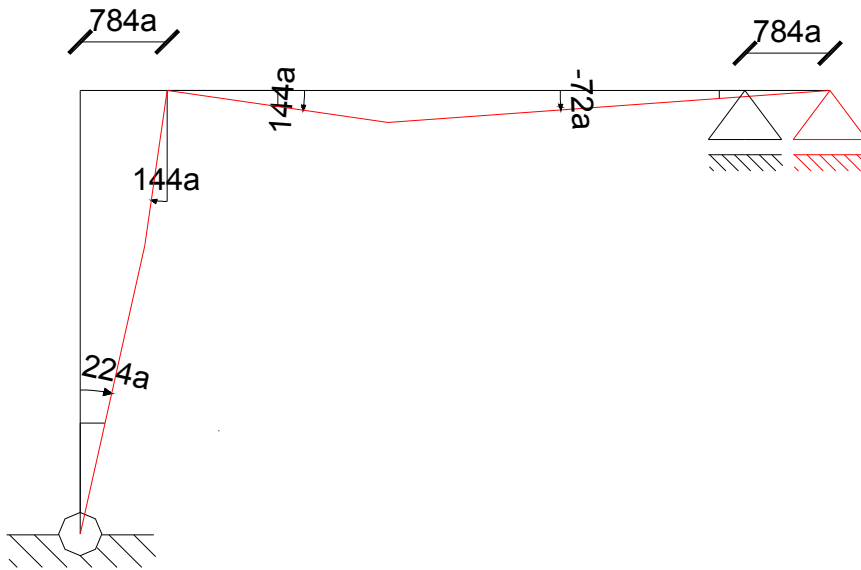
$$u_B = \frac{1}{2EJ} \left(0,5 \cdot 72 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) + \frac{1}{EJ} \left(0,5 \cdot 72 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{784}{EJ} = 784a$$

f) kąt obrotu na podporze B

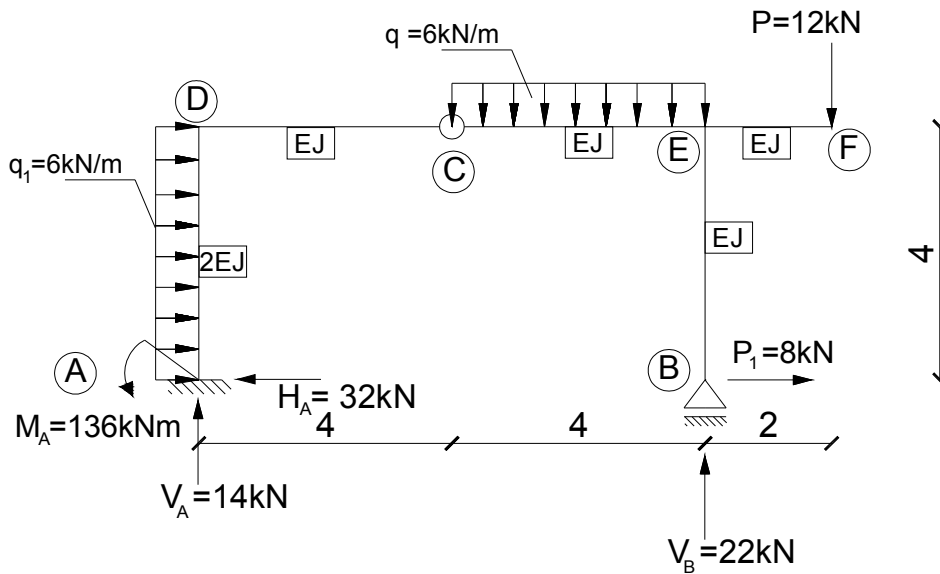


$$\varphi_C = \frac{-1}{EJ} \left(0,5 \cdot 72 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{-72}{EJ} = -72a$$

Wyznaczone przemieszczenia nanosimy na schemat ramy i rysujemy odkształconą jej postać:



Zadanie 2. Narysuj odkształconą postać ramy jak na rysunku. Zadanie rozwiąż zasadą prac wirtualnych.



Wyznaczenie reakcji:

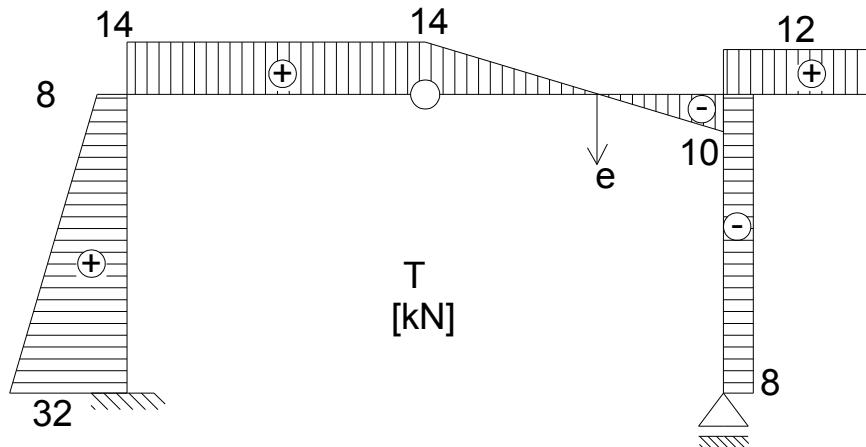
$$\sum M_C^P = q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 6 - P_1 \cdot 4 - V_B \cdot 4 = 0 \rightarrow V_B = \frac{8q + 6P - 4P_1}{4} = \frac{8 \cdot 6 + 6 \cdot 12 - 4 \cdot 8}{4} = 22 \text{ kN}$$

$$\sum R_y = V_A - q \cdot 4 + V_B - P = 0 \rightarrow V_A = 4q - V_B + P = 4 \cdot 6 - 22 + 12 = 14 \text{ kN}$$

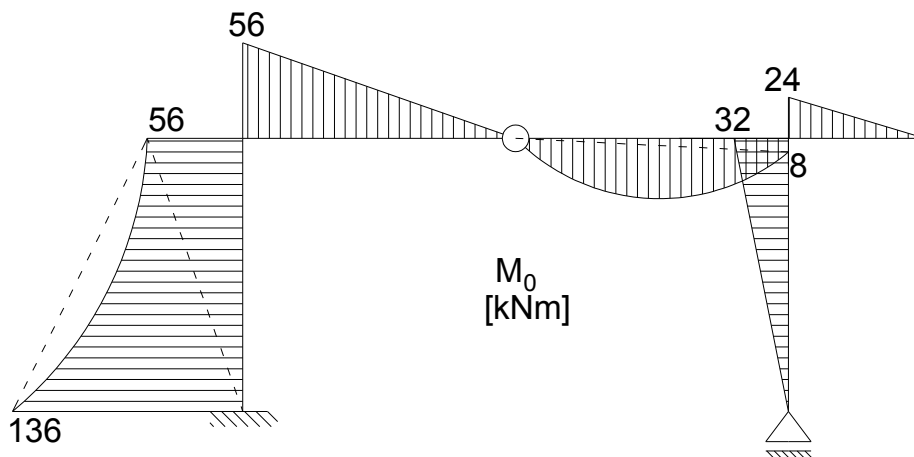
$$\sum R_x = 4 \cdot q_1 - H_A + P_1 \Rightarrow H_A = 4 \cdot q_1 + P_1 = 4 \cdot 6 + 8 = 32 \text{ kN}$$

$$\sum M_C^L = H_A \cdot 4 + V_A \cdot 4 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 - M_A = 0 \rightarrow M_A = 4H_A + 4V_A - 8q = 4 \cdot 32 + 4 \cdot 14 - 8 \cdot 6 = 136 \text{ kNm}$$

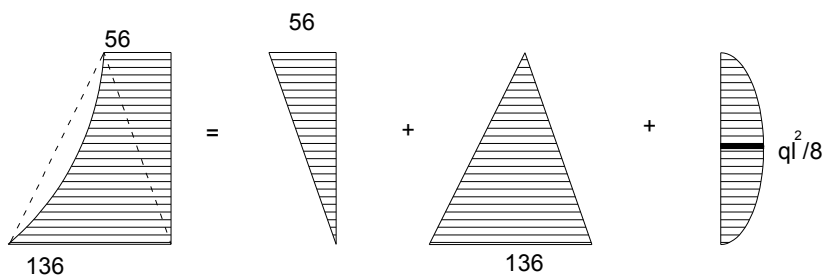
Wykres sił tnących:

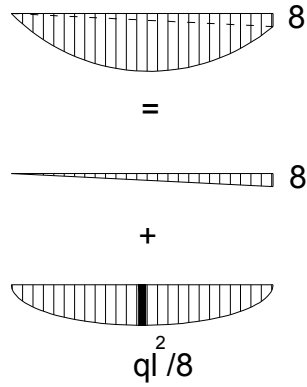


Wykres momentów zginających:



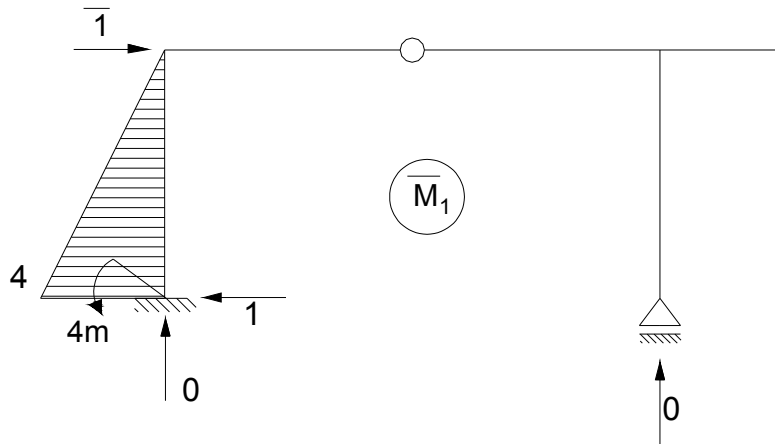
Całkowanie wykresów:





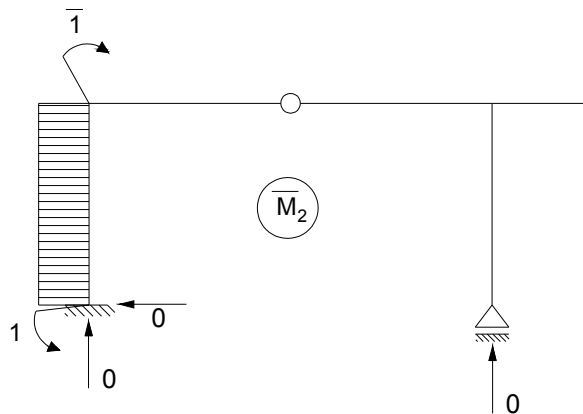
Wyznaczenie poszczególnych przemieszczeń z Zasady Prac Wirtualnych:

1) Przemieszczenie poziome punktu D:



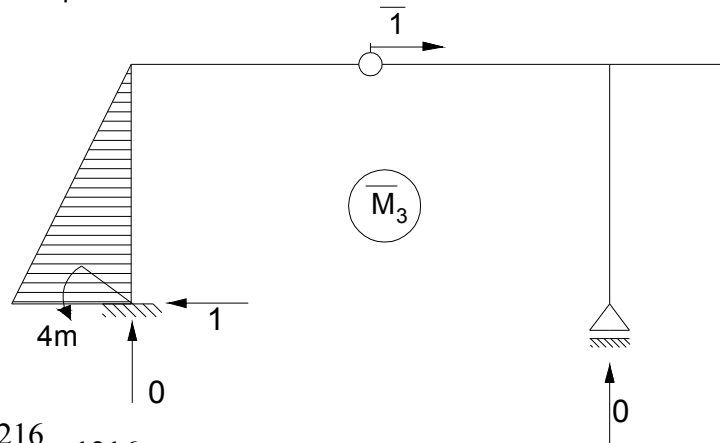
$$u_D = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = \frac{1216}{3EJ} = 1216a$$

2) Kąt obrotu w węźle D:



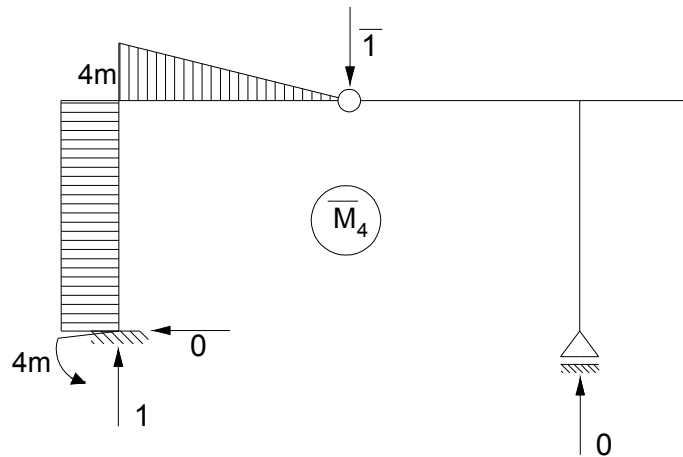
$$\varphi_D = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{176}{EJ} = \frac{528}{3EJ} = 528a$$

3) przemieszczenie poziome punktu C:



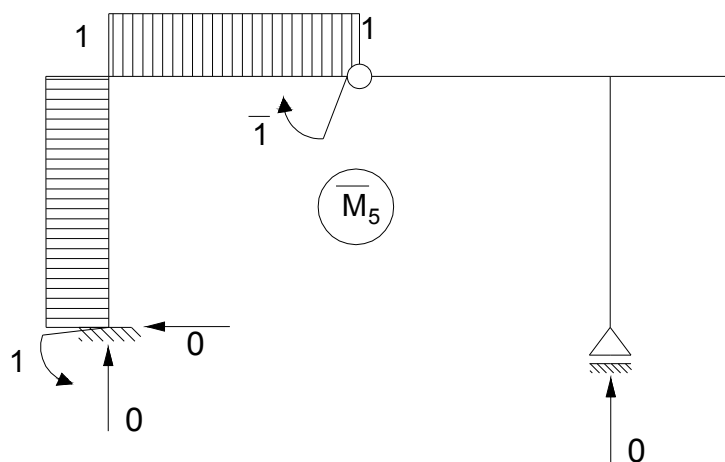
$$u_C = u_D = u_E = u_F = \frac{1216}{3EJ} = 1216a$$

4)Przemieszczenie pionowe punktu C:



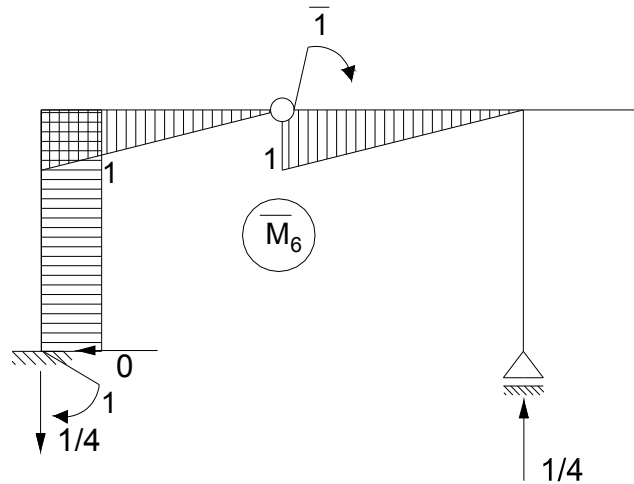
$$v_C = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 4 \right) + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{3008}{3EJ} = 3008a$$

5) Kąt obrotu z lewej strony przegubu C:



$$\varphi_C^L = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 1 = \frac{288}{EJ} = \frac{864}{3EJ} = 864a$$

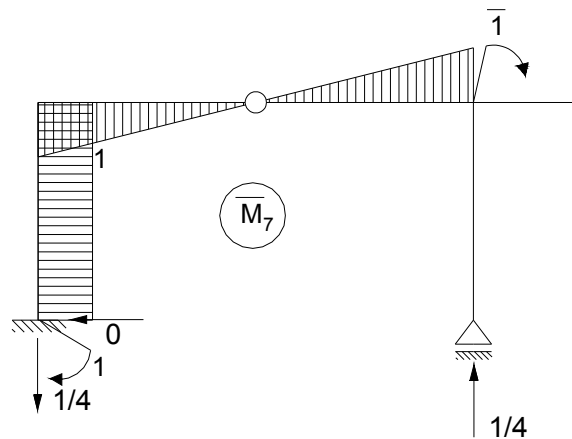
6) Kąt obrotu z prawej strony przegubu C:



$$\varphi_C^P = \frac{1}{2EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right)$$

$$\varphi_C^P = \frac{-688}{3EJ} = -688a$$

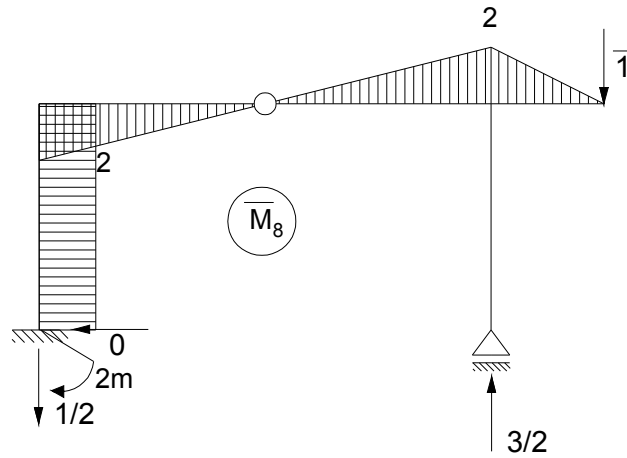
7) Kąt obrotu węzła E:



$$\varphi_E = \frac{1}{2EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right)$$

$$\varphi_E = \frac{-832}{3EJ} = -832a$$

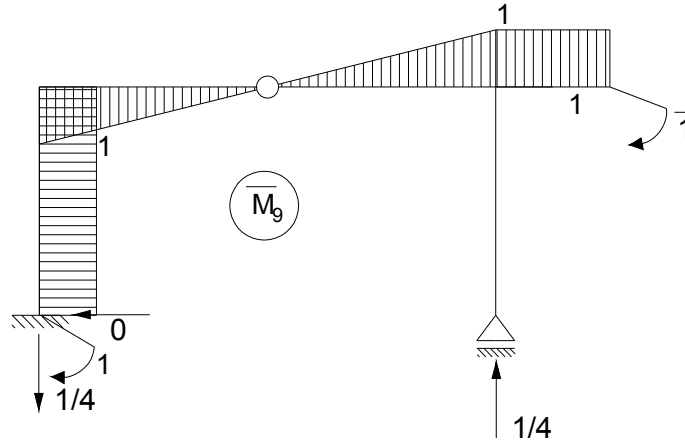
8) Przesunięcie pionowe punktu F:



$$v_F = \frac{1}{2EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right)$$

$$v_F = \frac{-1568}{3EJ} = -1568a$$

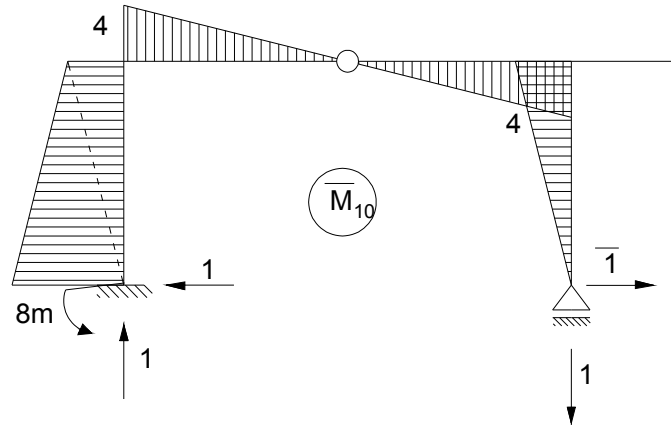
9) Kąt obrotu w punkcie F



$$\varphi_F = \frac{1}{2EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot 1 \right)$$

$$\varphi_F = \frac{-760}{3EJ} = -760a$$

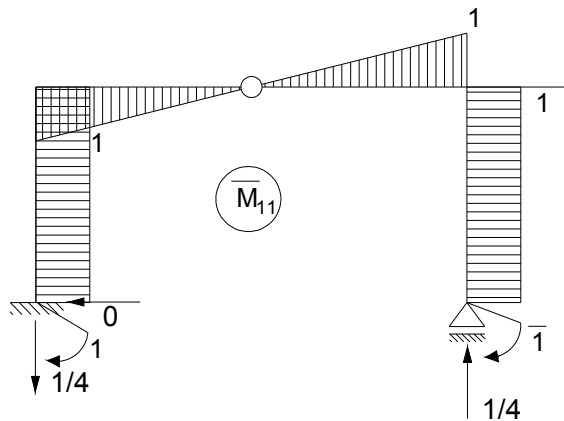
10) Przemieszczenie poziome punktu B:



$$u_B = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) + \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + \frac{8}{2} \right) \right) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 32 \right)$$

$$u_B = \frac{5056}{3EJ} = 5056a$$

11) Kąt obrotu w punkcie B:



$$\varphi_B = \frac{1}{2EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 136 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 \cdot 1 \right)$$

$$\varphi_B = \frac{-1024}{3EJ} = -1024a$$

Wyznaczone przemieszczenia nanosimy na schemat ramy i rysujemy odkształconą jej postać:

