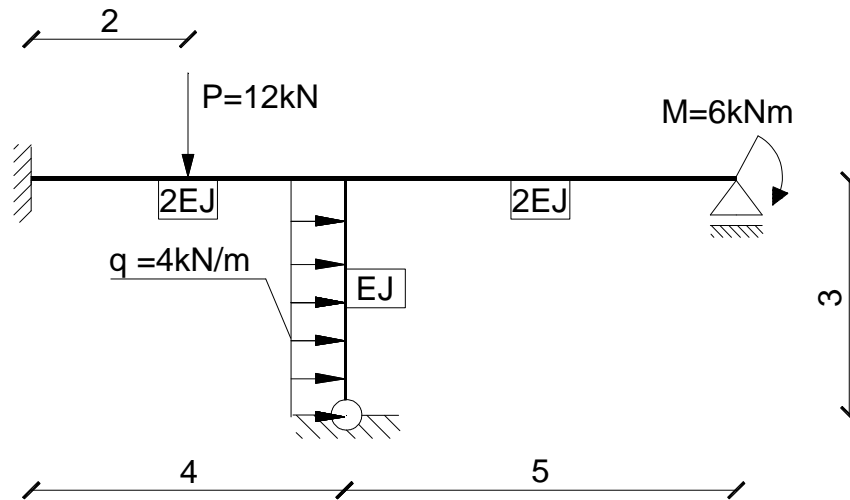


Rozwiązywanie ramy statyczne niewyznaczalnej Metodą Sił

Polecenie: Narysuj wykres sił wewnętrznych w ramie. Zadanie rozwiąż metodą sił.

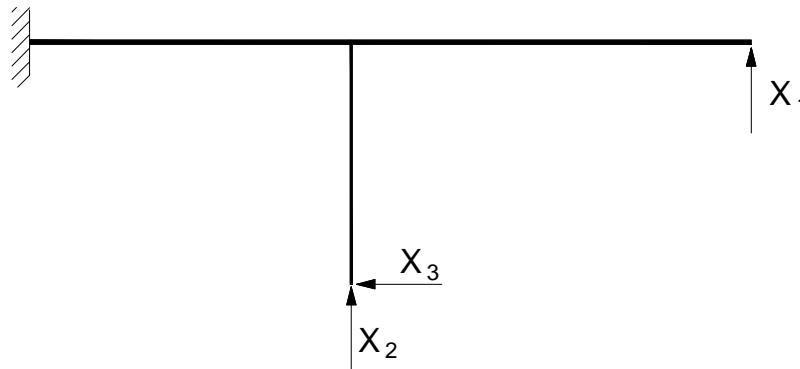


Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu:

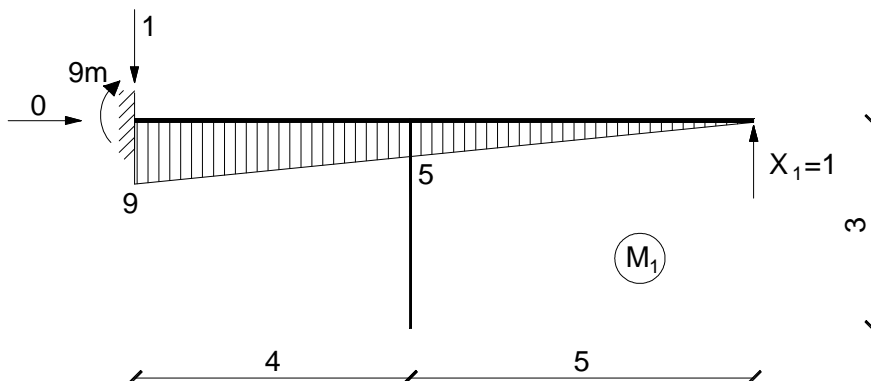
$$n_s = l_r - l_p - 3 = 6 - 0 - 3 = 3 \quad \text{— układ trzykrotnie statycznie niewyznaczalny.}$$

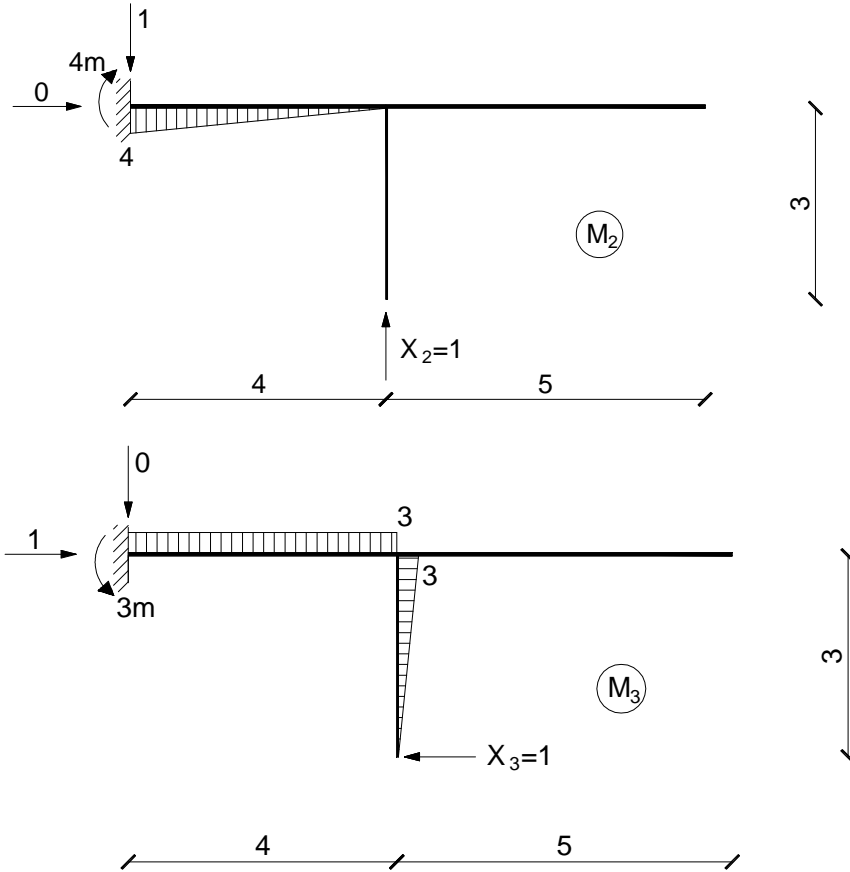
Rozwiązanie nr 1.

1. Schemat podstawowy (zwalniamy podpory):

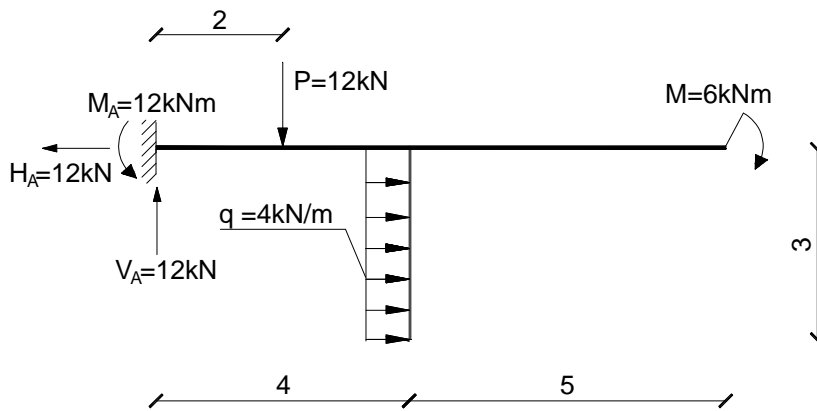


Wykresy jednostkowe:





Wykres M_0 (moment zginający od obciążenia zewnętrznego):

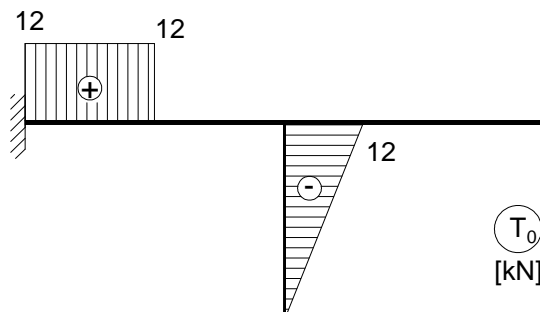


Wyznaczenie reakcji:

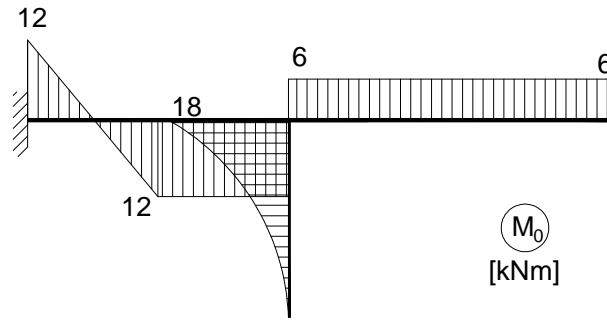
$$\sum R_x = -H_A + 4 \cdot 3 = 0 \rightarrow H_A = 12 \text{ kN} \quad \sum R_y = V_A - 12 = 0 \rightarrow V_A = 12 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = -M_A + 12 \cdot 2 + 6 - 4 \cdot 3 \cdot 1.5 = 0 \rightarrow M_A = 12 \text{ kNm}$$

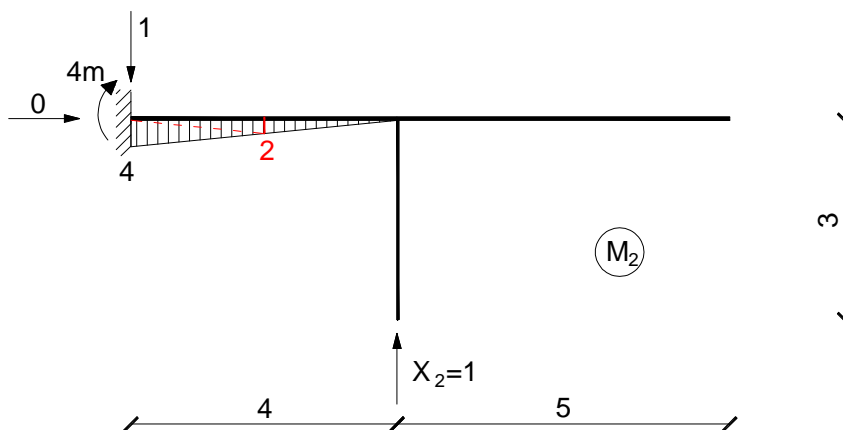
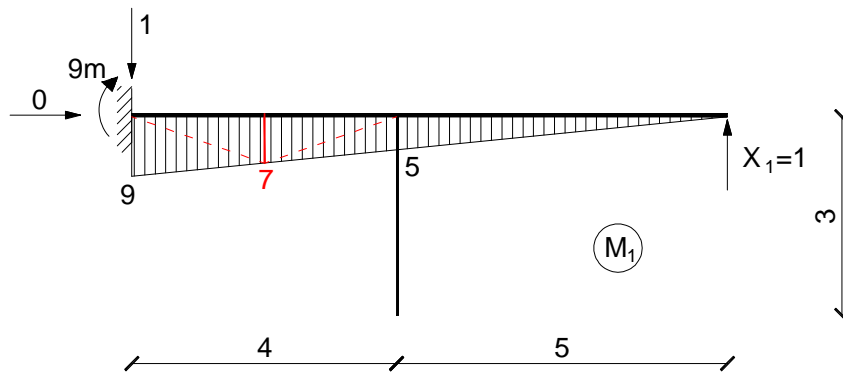
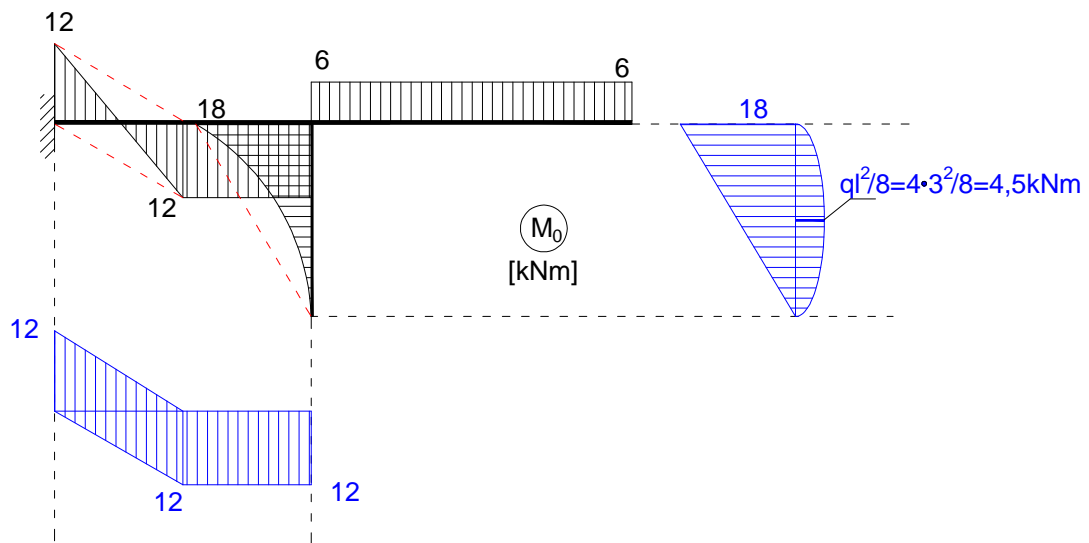
Wykres sił tnących:



Wykres momentów zginających:



Podział wykresów momentów do całkowania:



Współczynniki układu równań kanonicznych: δ_{11} - całkujemy wykres M_1 sam przez siebie

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right) = \frac{243}{2EI}$$

 δ_{12} - całkujemy wykres M_1 z M_2

$$\delta_{12} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) \right] = \frac{92}{3EI}$$

 δ_{13} - całkujemy wykres M_1 z M_3

$$\delta_{13} = \frac{1}{2EI} \left[3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \right] = -\frac{42}{EI}$$

 δ_{10} - całkujemy wykres M_1 z M_0

$$\delta_{10} = \frac{1}{2EI} \left[6 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 5 \right) + 12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 7 \right) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot 7 \right) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) \right] = \frac{61}{2EI}$$

 δ_{21} - całkujemy wykres M_2 z M_1

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{92}{3EI}$$

 δ_{22} - całkujemy wykres M_2 sam przez siebie

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{32}{3EI}$$

 δ_{23} - całkujemy wykres M_2 z M_3

$$\delta_{23} = \frac{1}{2EI} \left[3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \right) \right] = -\frac{12}{EI}$$

 δ_{20} - całkujemy wykres M_2 z M_0

$$\delta_{20} = \frac{1}{2EI} \left[12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{8}{EI}$$

 δ_{31} - całkujemy wykres M_3 z M_1

$$\delta_{31} = \delta_{13} = -\frac{42}{EI}$$

 δ_{32} - całkujemy wykres M_3 z M_2

$$\delta_{32} = \delta_{23} = -\frac{12}{EI}$$

 δ_{33} - całkujemy wykres M_3 sam przez siebie

$$\delta_{33} = \frac{1}{2EI} (3 \cdot 4 \cdot 3) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{27}{EI}$$

 δ_{30} - całkujemy wykres M_3 z M_0

$$\delta_{30} = \frac{1}{2EI} \left[12 \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3 \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{2}{3} \cdot 4,5 \cdot 3 \cdot 1,5 \right] = \frac{-76,5}{EI}$$

Układ równań kanonicznych metody sił:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{243}{2EI} \cdot X_1 + \frac{92}{3EI} \cdot X_2 - \frac{42}{EI} \cdot X_3 + \frac{61}{2EI} = 0 / \cdot 6EI \\ \frac{92}{3EI} \cdot X_1 + \frac{32}{3EI} \cdot X_2 - \frac{12}{EI} \cdot X_3 + \frac{8}{EI} = 0 / \cdot 3EI \\ -\frac{42}{EI} \cdot X_1 - \frac{12}{EI} \cdot X_2 + \frac{27}{EI} \cdot X_3 - \frac{76,5}{EI} = 0 / \cdot EI \end{cases}$$

$$\begin{cases} 729 \cdot X_1 + 184 \cdot X_2 - 252 \cdot X_3 + 183 = 0 \\ 92 \cdot X_1 + 32 \cdot X_2 - 36 \cdot X_3 + 24 = 0 \\ -42 \cdot X_1 - 12 \cdot X_2 + 27 \cdot X_3 - 76,5 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

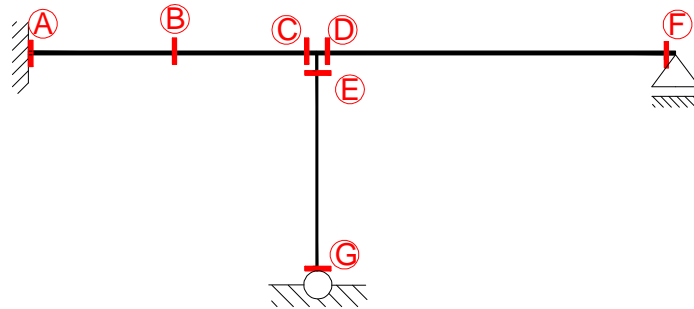
$$\begin{cases} X_1 = 1,03kN \\ X_2 = 2,56kN \\ X_3 = 5,57kN \end{cases}$$

Ostateczny wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:

Wykres momentów w poszczególnych punktach wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$M_i = M_{1i} \cdot X_1 + M_{2i} \cdot X_2 + M_{3i} \cdot X_3 + M_{0i}$$

Zaznaczenie charakterystycznych punktów na konstrukcji:



$$M_A = 9 \cdot 1,03 + 4 \cdot 2,56 - 3 \cdot 5,57 - 12 = -9,2kNm$$

$$M_B = 7 \cdot 1,03 + 2 \cdot 2,56 - 3 \cdot 5,57 + 12 = 7,62kNm$$

$$M_C = 5 \cdot 1,03 + 0 \cdot 2,56 - 3 \cdot 5,57 + 12 = 0,44kNm$$

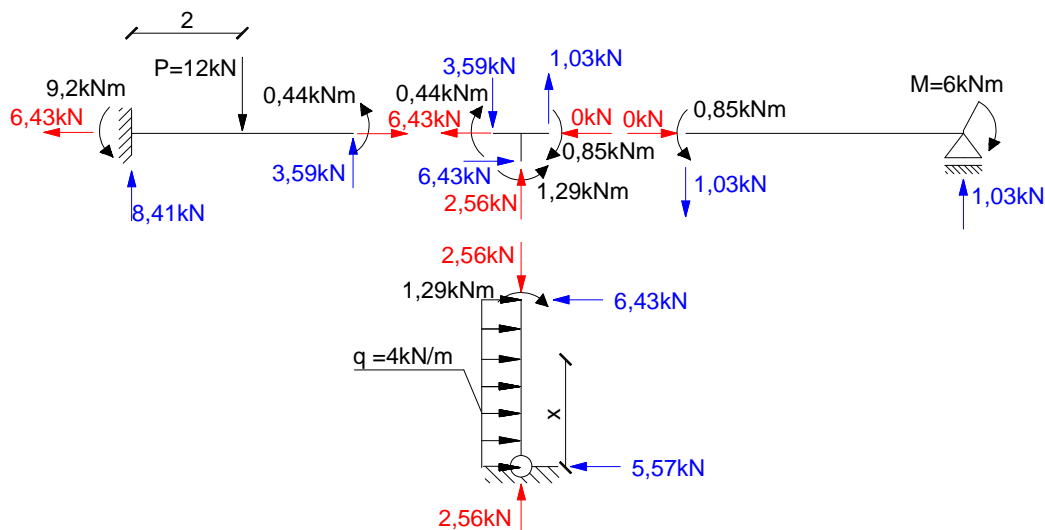
$$M_D = 5 \cdot 1,03 + 0 \cdot 2,56 + 0 \cdot 5,57 - 6 = -0,85kNm$$

$$M_E = 0 \cdot 1,03 + 0 \cdot 2,56 - 3 \cdot 5,57 + 18 = 1,29kNm$$

$$M_F = 0 \cdot 1,03 + 0 \cdot 2,56 + 0 \cdot 5,57 - 6 = -6kNm \rightarrow \text{podpora przegubowa obciążona momentem skupionym}$$

$$M_G = 0 \cdot 1,03 + 0 \cdot 2,56 + 0 \cdot 5,57 + 0 = 0kNm \rightarrow \text{podpora przegubowa nie obciążona momentem skupionym}$$

Wyznaczenie wartości sił tnących i normalnych w zadanej ramie:

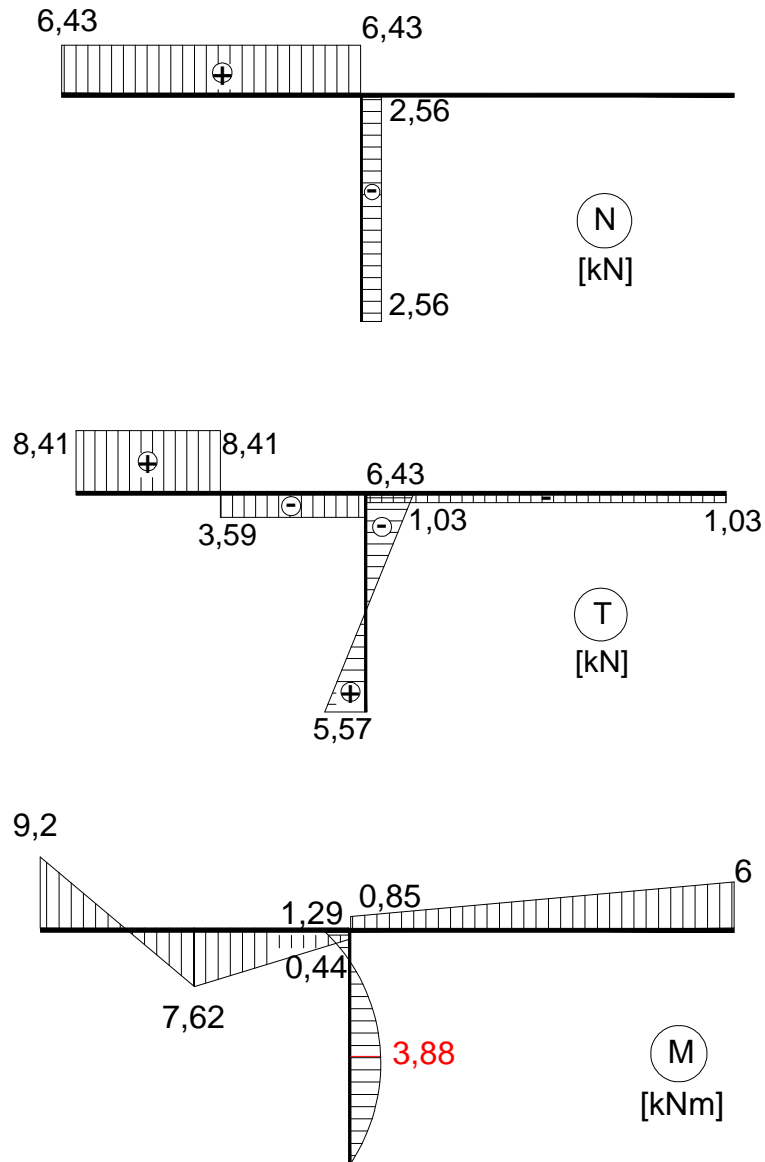


Wyznaczenie ekstremum

$$T(x) = 5,57 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{5,57}{4} = 1,39m$$

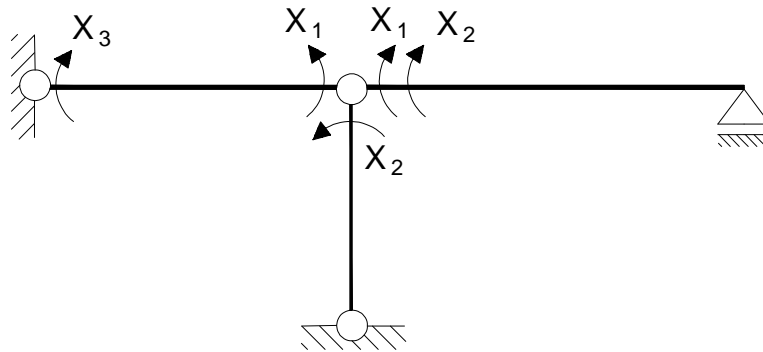
$$M(x = 1,39m) = 5,57 \cdot 1,39 - 4 \cdot \frac{1,39^2}{2} = 3,88kNm$$

Wykresy sił wewnętrznych w ramie statycznie niewyznaczalnej:

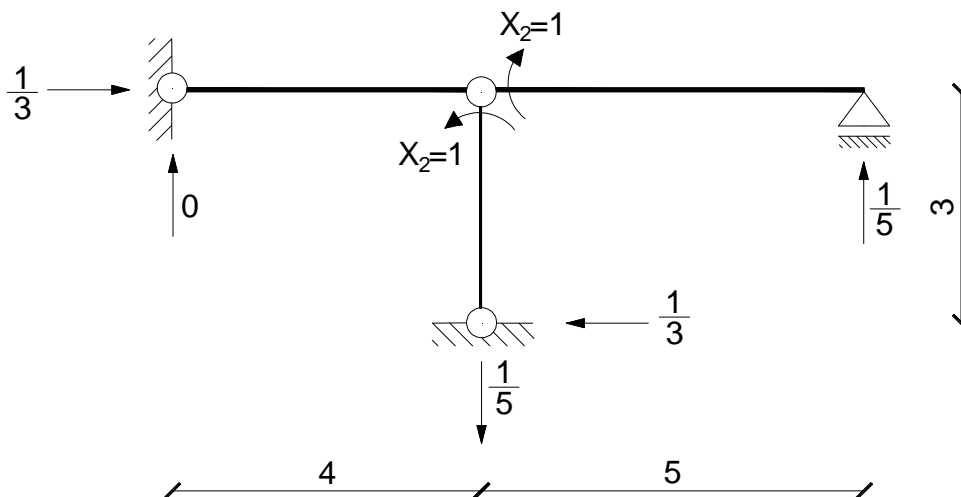
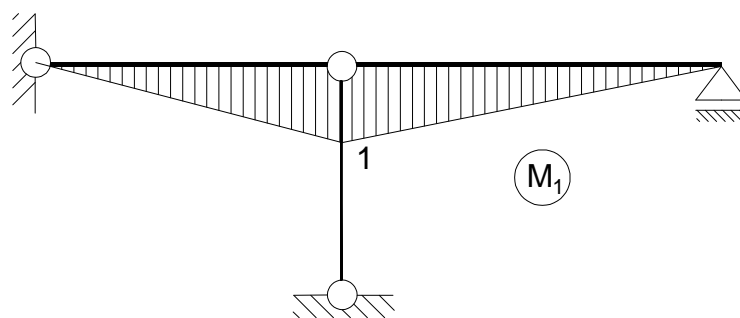
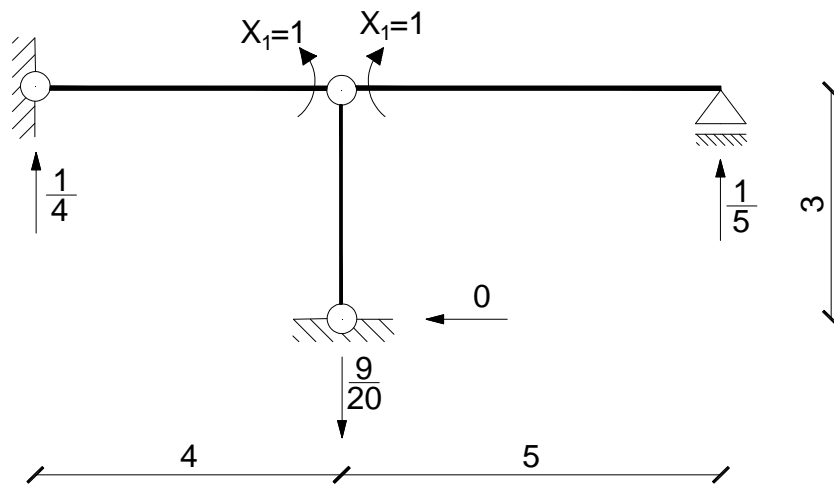


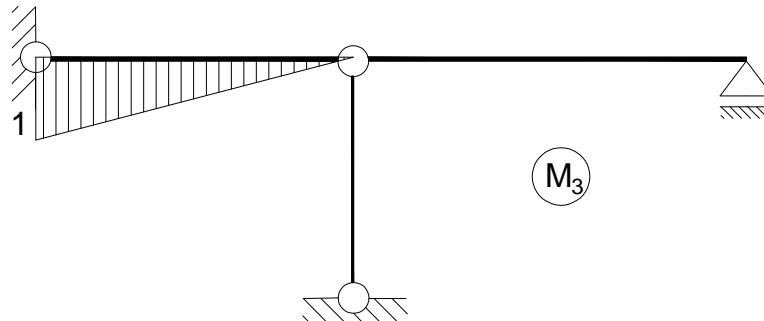
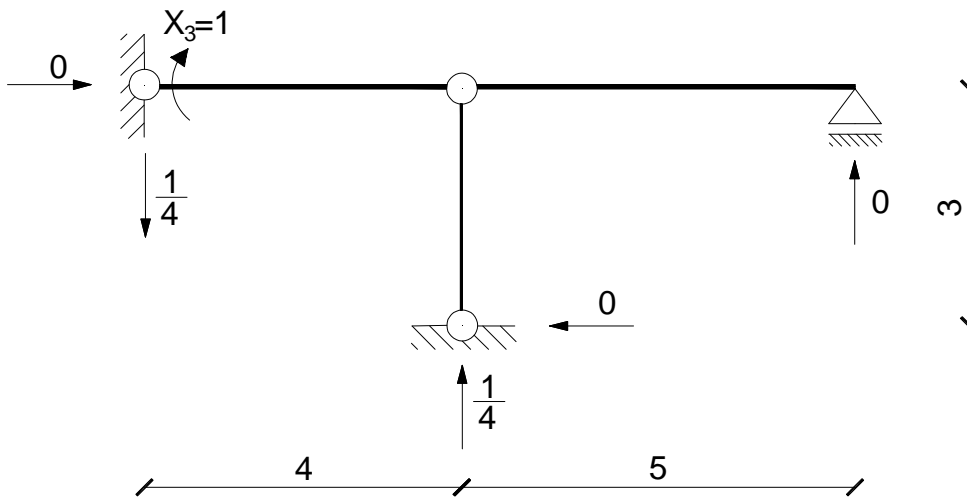
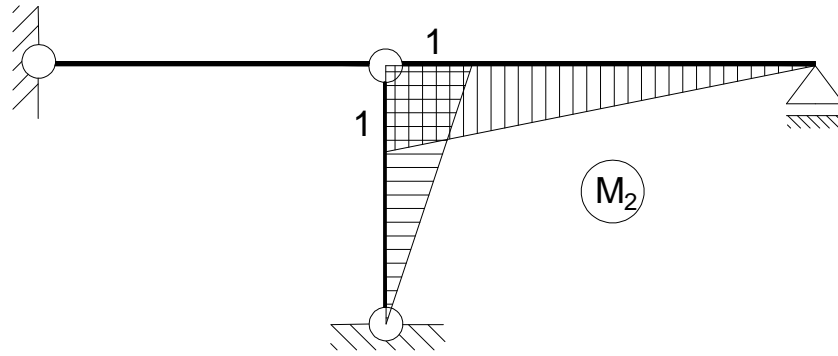
Rozwiązanie nr 2.

2. Schemat podstawowy (wprowadzenie przegubów):



Wykresy jednostkowe:





Wykres M_0 (moment zginający od obciążenia zewnętrznego):

Wyznaczenie reakcji:

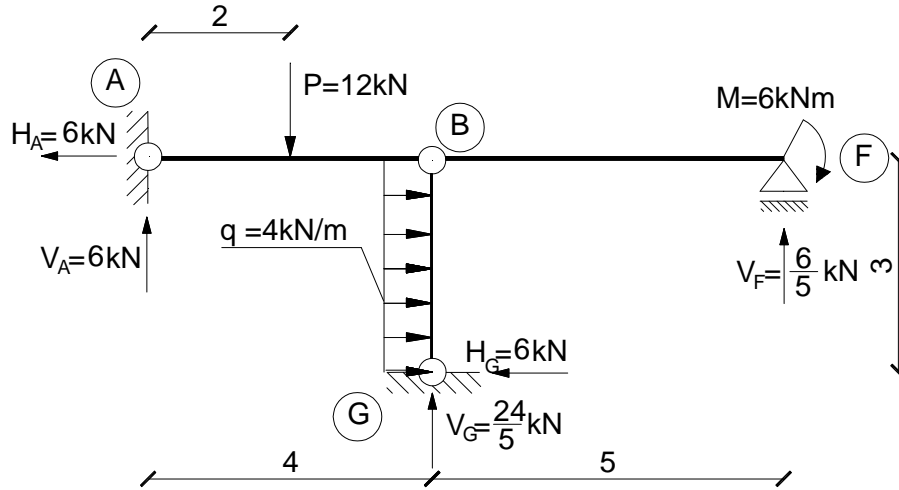
$$\sum M_{B_F} = 6 - V_F \cdot 5 = 0 \rightarrow V_F = \frac{6}{5} \text{ kN}$$

$$\sum M_{B_D} = 3 \cdot H_G - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \rightarrow H_G = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ kN}$$

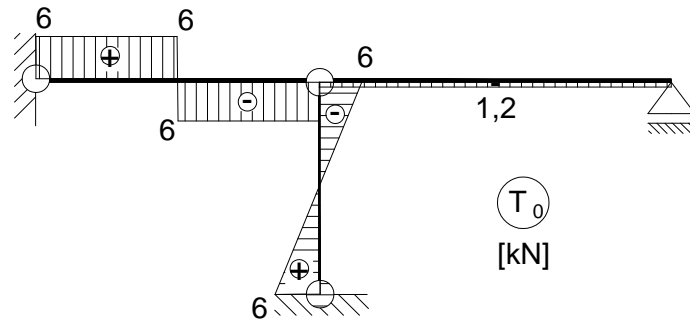
$$\sum M_{B_L} = V_A \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_A = 6 \text{ kN}$$

$$\sum R_x = -H_A - 6 + 4 \cdot 3 = 0 \rightarrow H_A = 12 - 6 = 6 \text{ kN}$$

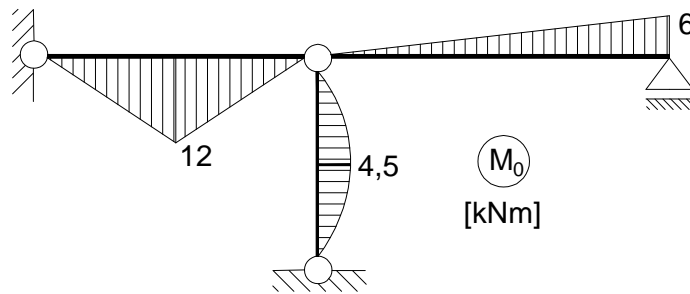
$$\sum R_y = 6 - 12 + \frac{6}{5} + V_G = 0 \rightarrow V_G = 12 - 6 - \frac{6}{5} = \frac{24}{5} \text{ kN}$$



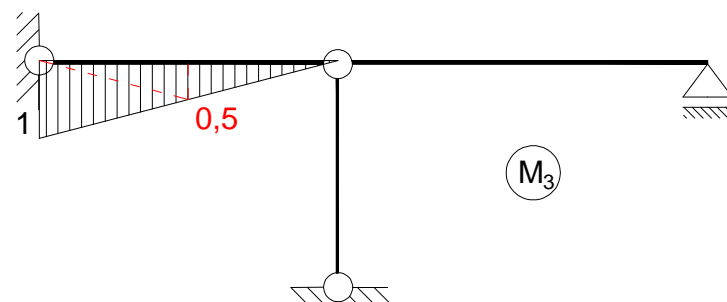
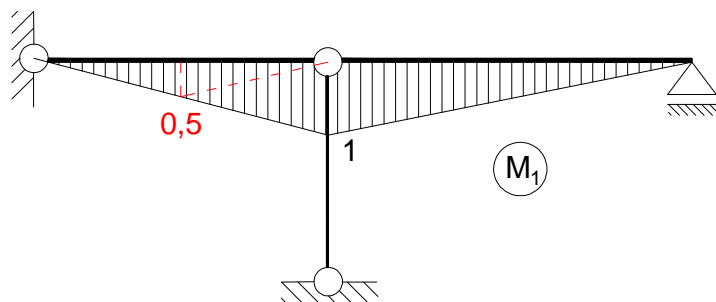
Wykres sił tnących:



Wykres momentów zginających:



Podział wykresów momentów do całkowania:



Współczynniki układu równań kanonicznych:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{3}{2EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{5}{6EI}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{3EI}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7}{2EI}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{5}{6EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{11}{6EI}$$

$$\delta_{23} = 0$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{2EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 4,5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{2}{EI}$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \frac{1}{3EI}$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = 0$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{2}{3EI}$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{6}{EI}$$

Układ równań kanonicznych metody sił:

$$\begin{cases} \frac{3}{2EI} \cdot X_1 + \frac{5}{6EI} \cdot X_2 + \frac{1}{3EI} \cdot X_3 + \frac{7}{2EI} = 0 / \cdot 6EI \\ \frac{5}{6EI} \cdot X_1 + \frac{11}{6EI} \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + \frac{2}{EI} = 0 / \cdot 6EI \\ \frac{1}{3EI} \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{2}{3EI} \cdot X_3 + \frac{6}{EI} = 0 / \cdot 3EI \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 21 = 0 \\ 5 \cdot X_1 + 11 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 12 = 0 \\ X_1 + 0 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 18 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} X_1 = 0,43kNm \\ X_2 = -1,29kNm \\ X_3 = -9,21kNm \end{cases}$$

Ostateczny wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:

$$M_A = 0 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-1,29) + 1 \cdot (-9,21) + 0 = -9,21kNm$$

$$M_B = 0,5 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-1,29) + 0,5 \cdot (-9,21) + 12 = 7,61kNm$$

$$M_C = 1 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-1,29) + 0 \cdot (-9,21) + 0 = 0,43kNm$$

$$M_D = 1 \cdot 0,43 + 1 \cdot (-1,29) + 0 \cdot (-9,21) + 0 = -0,86 \text{ kNm}$$

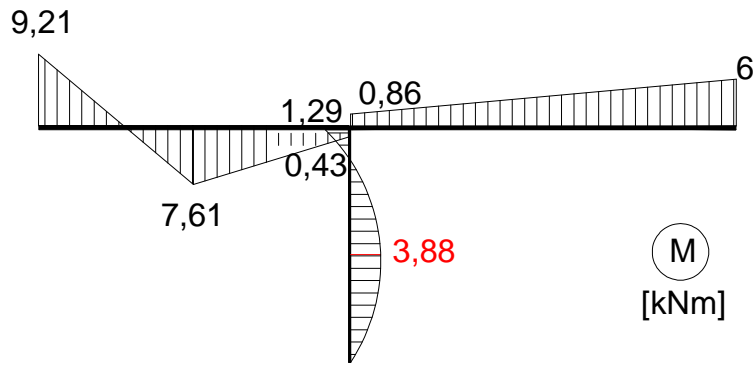
$$M_E = 0 \cdot 0,43 - 1 \cdot (-1,29) + 0 \cdot (-9,21) + 0 = 1,29 \text{ kNm}$$

$$M_F = 0 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-1,29) + 0 \cdot (-9,21) - 6 = -6 \text{ kNm} \rightarrow \text{podpora przegubowa obciążona momentem skupionym}$$

$$M_G = 0 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-1,29) + 0 \cdot (-9,21) + 0 = 0 \text{ kNm} \rightarrow \text{podpora przegubowa nie obciążona momentem skupionym}$$

Wyznaczenie wartości sił tnących i normalnych w zadanej ramie odbywa się identycznie jak w rozwiązaniu nr 1.

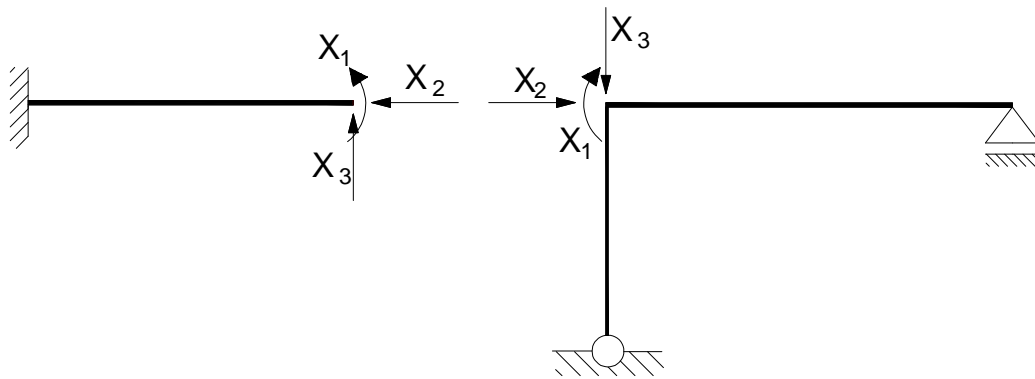
Wykres momentów w ramie statycznie niewyznaczalnej:



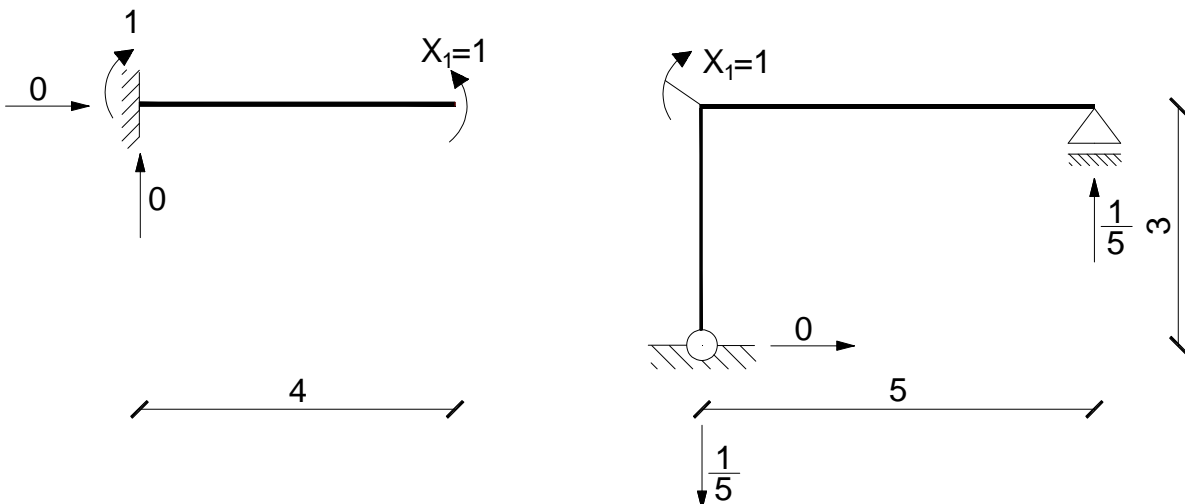
Niewielkie różnice w wartości momentów w węzłach w stosunku do rozwiązania nr 1 wynikają z zaokrągleń wyników układu równań. Wykres sił tnących i normalnych analogicznie jak w rozwiązaniu nr 1.

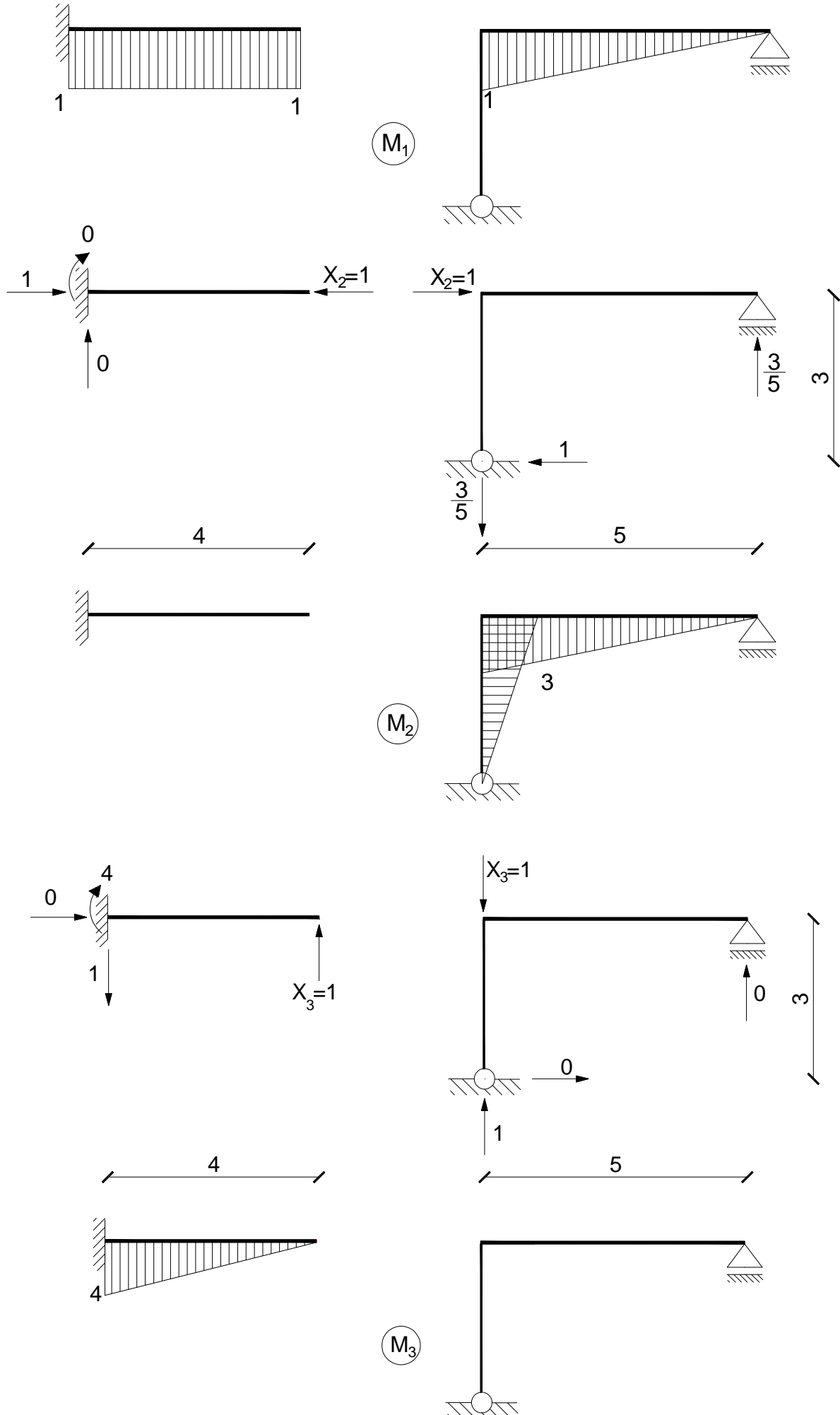
Rozwiązanie nr 3.

3. Schemat podstawowy (przecięcie układu):



Wykresy jednostkowe:





Wykres M_0 (moment zginający od obciążenia zewnętrznego):

Wyznaczenie reakcji:

- część lewa układu

$$\sum M_A = -M_A + 12 \cdot 2 = 0 \rightarrow M_A = 24 \text{ kNm}$$

$$\sum R_{x_L} = -H_A = 0 \rightarrow H_A = 0 \text{ kN}$$

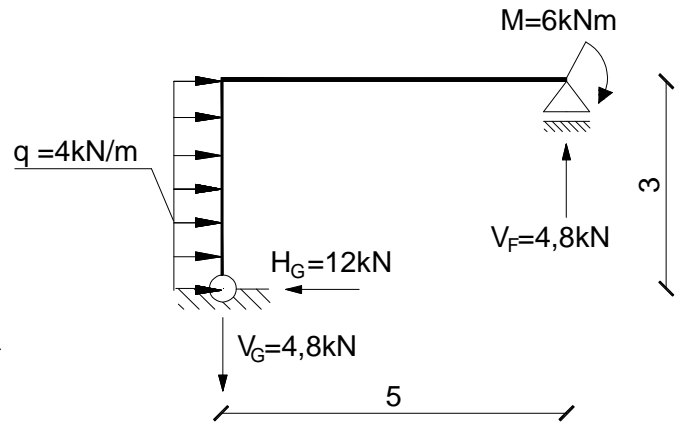
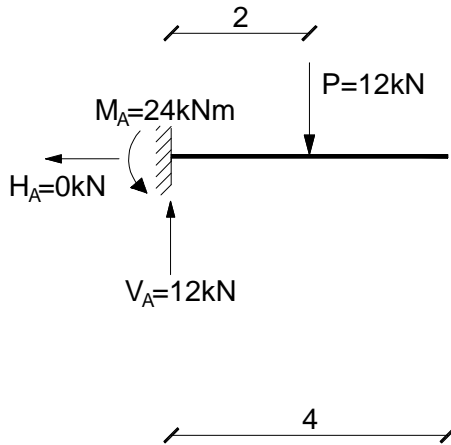
$$\sum R_{y_L} = V_A - 12 = 0 \rightarrow V_A = 12 \text{ kN}$$

- część prawa układu

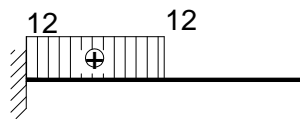
$$\sum M_G = -5V_F + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 = 0 \rightarrow V_F = 4,8 \text{ kN}$$

$$\sum R_{x_P} = 4 \cdot 3 - H_G = 0 \rightarrow H_G = 12 \text{ kN}$$

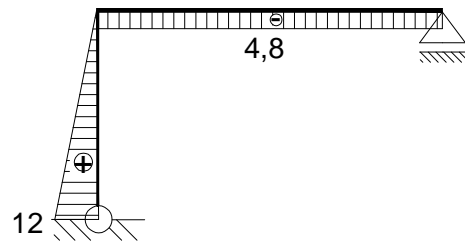
$$\sum R_{y_P} = -V_G + 4,8 = 0 \rightarrow V_G = 4,8 \text{ kN}$$



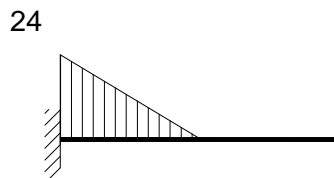
Wykres sił tnących:



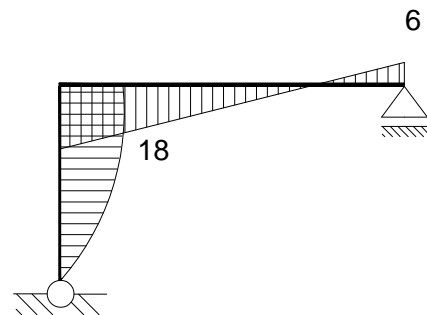
T_0
[kN]



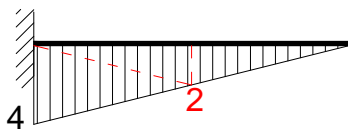
Wykres momentów zginających:



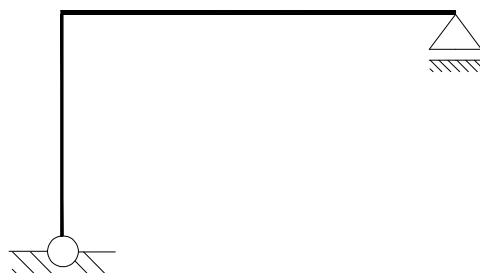
M_0
[kNm]



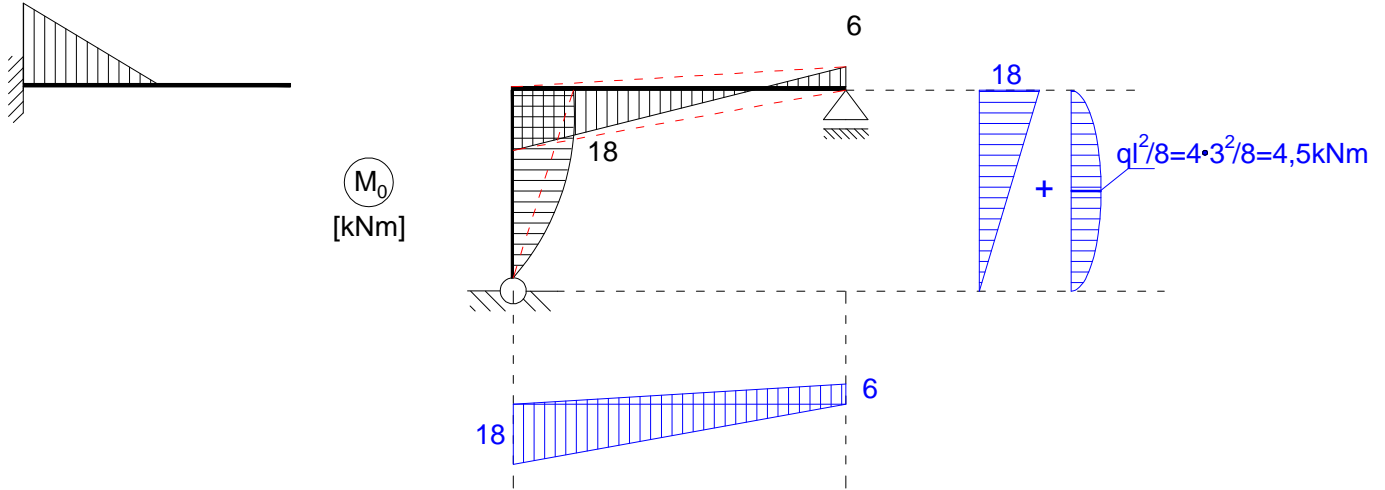
Podział wykresów momentów do całkowania:



M_3



24



Współczynniki układu równań kanonicznych:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left(1 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{17}{6EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{5}{2EI}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{2EI} \left(1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = \frac{4}{EI}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \right) = \frac{1}{2EI}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{5}{2EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{33}{2EI}$$

$$\delta_{23} = 0$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 4,5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \frac{105}{EI}$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \frac{4}{EI}$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = 0$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{32}{3EI}$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right) = -\frac{40}{EI}$$

Układ równań kanonicznych metody sił:

$$\begin{cases} \frac{17}{6EI} \cdot X_1 + \frac{5}{2EI} \cdot X_2 + \frac{4}{EI} \cdot X_3 + \frac{1}{2EI} = 0 / \cdot 6EI \\ \frac{5}{2EI} \cdot X_1 + \frac{33}{2EI} \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + \frac{105}{EI} = 0 / \cdot 2EI \\ \frac{4}{EI} \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{32}{3EI} \cdot X_3 - \frac{40}{EI} = 0 / \cdot 3EI \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17 \cdot X_1 + 15 \cdot X_2 + 24 \cdot X_3 + 3 = 0 \\ 5 \cdot X_1 + 33 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 210 = 0 \\ 12 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 32 \cdot X_3 - 120 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} X_1 = 0,43 \text{ kNm} \\ X_2 = -6,43 \text{ kN} \\ X_3 = 3,59 \text{ kN} \end{cases}$$

Ostateczny wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:

$$M_A = 1 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-6,43) + 4 \cdot (3,59) - 24 = -9,21 \text{ kNm}$$

$$M_B = 1 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-6,43) + 2 \cdot (3,59) + 0 = 7,61 \text{ kNm}$$

$$M_C = 1 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-6,43) + 0 \cdot (3,59) + 0 = 0,43 \text{ kNm}$$

$$M_D = 1 \cdot 0,43 + 3 \cdot (-6,43) + 0 \cdot (3,59) + 18 = -0,86 \text{ kNm}$$

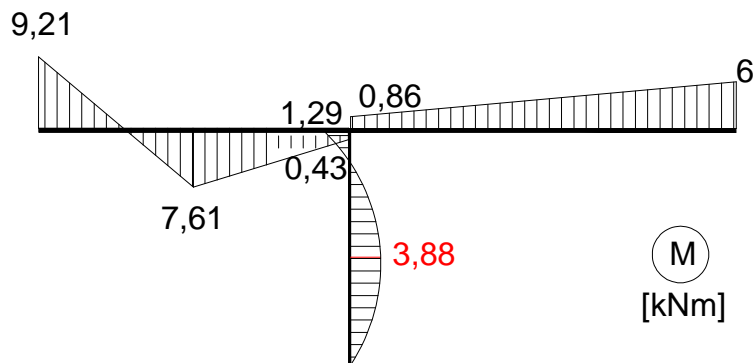
$$M_E = 0 \cdot 0,43 - 3 \cdot (-6,43) + 0 \cdot (3,59) - 18 = 1,29 \text{ kNm}$$

$$M_F = 0 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-6,43) + 0 \cdot (3,59) - 6 = -6 \text{ kNm} \rightarrow \text{podpora przegubowa obciążona momentem skupionym}$$

$$M_G = 0 \cdot 0,43 + 0 \cdot (-6,43) + 0 \cdot (3,59) + 0 = 0 \text{ kNm} \rightarrow \text{podpora przegubowa nie obciążona momentem skupionym}$$

Wyznaczenie wartości sił tnących i normalnych w zadanej ramie odbywa się identycznie jak w rozwiązaniu nr 1.

Wykres momentów w ramie statycznie niewyznaczalnej:



Inne przykładowe schematy podstawowe dla rozwiązania tego zadania:

