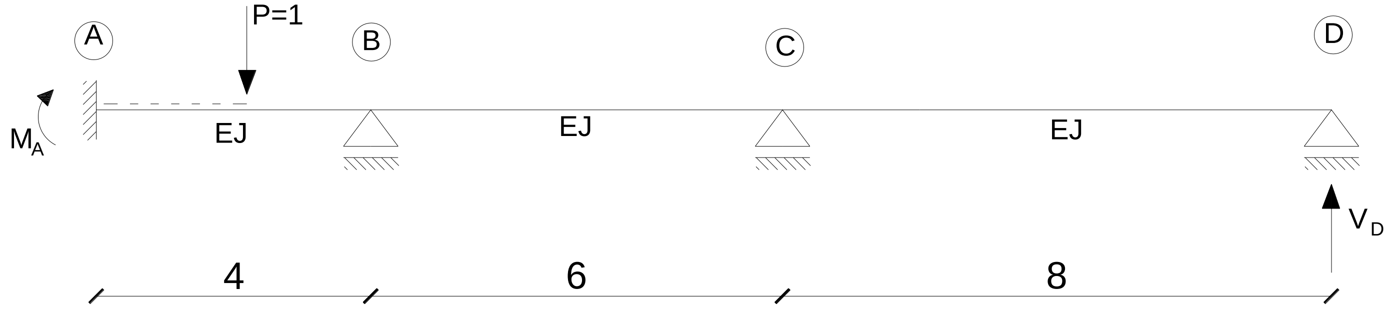
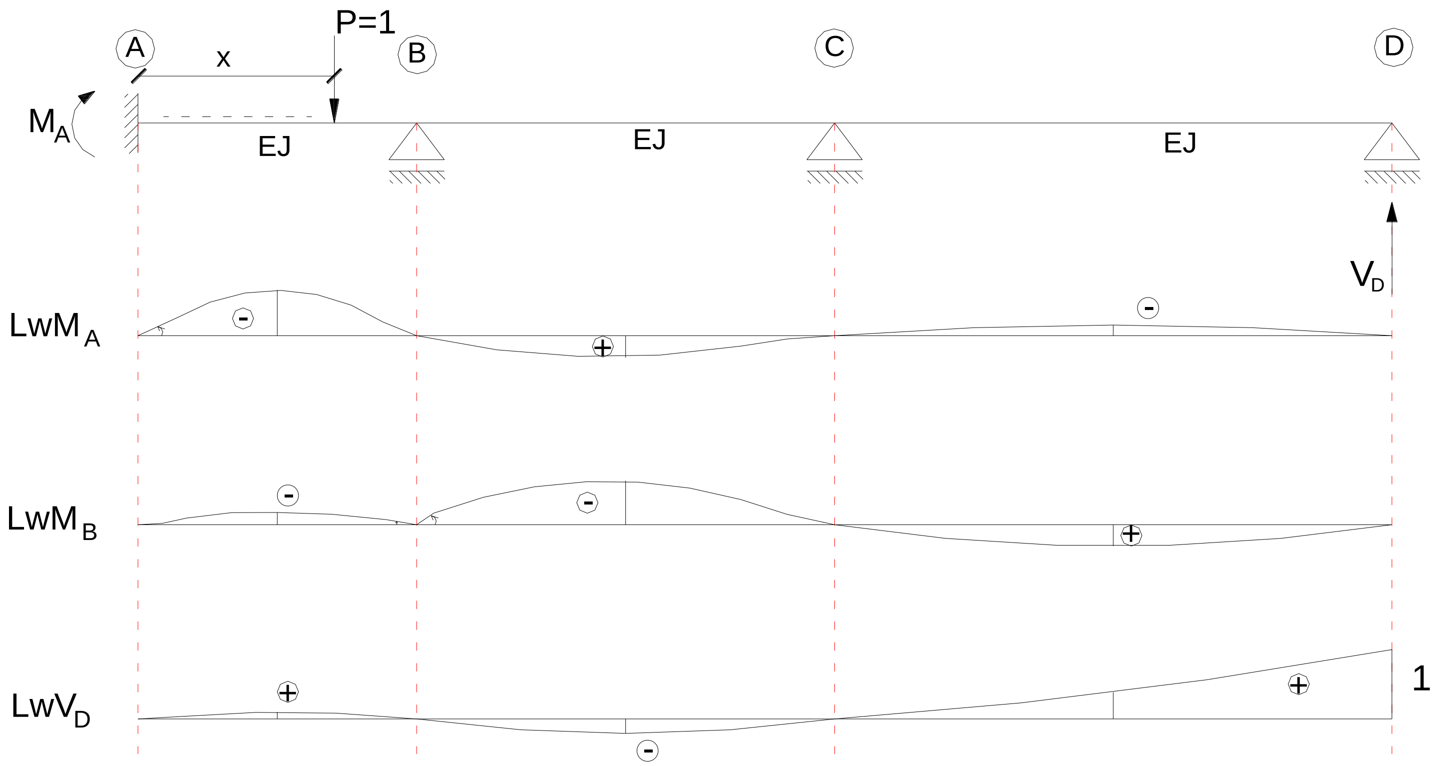
Linie wpływu w belkach statycznie niewyznaczalnych

Zadanie 1.: *Dla poniższej belki naszkicuj linie wpływu reakcji M_A, M_B i V_D . Za pomocą metody przemieszczeń wyznaczyć rzędne poszczególnych linii w połowie rozpiętości każdego przęsła.*

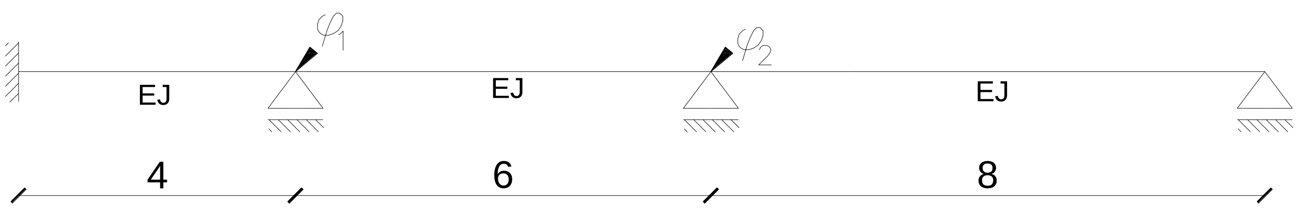


1. Szkice linii wpływu poszczególnych reakcji metodą kinematyczną:

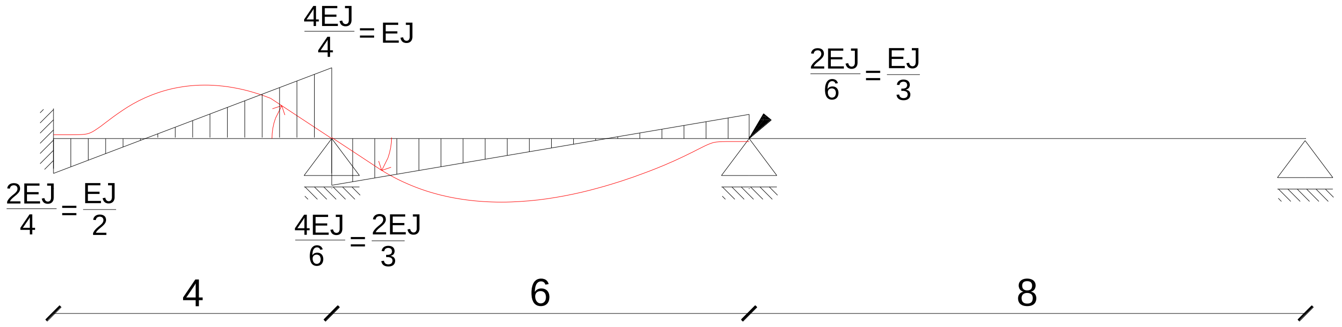


2. Wyznaczenie rzędnych poszczególnych linii wpływu w połowie długości przęsła AB

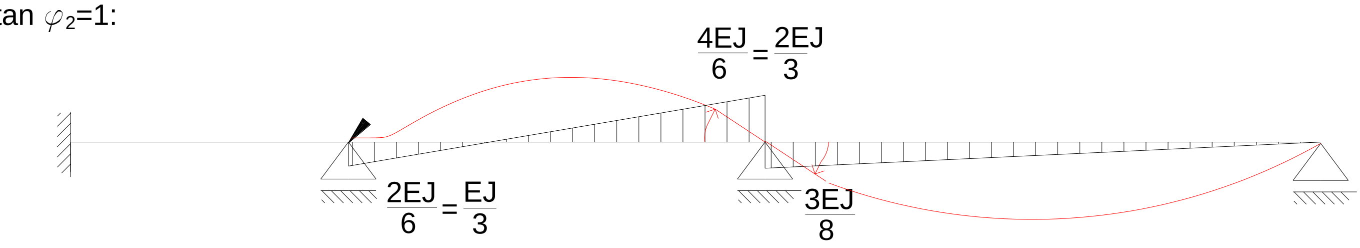
- Schemat podstawowy metody przemieszczeń (wstawiamy blokady obrotu):



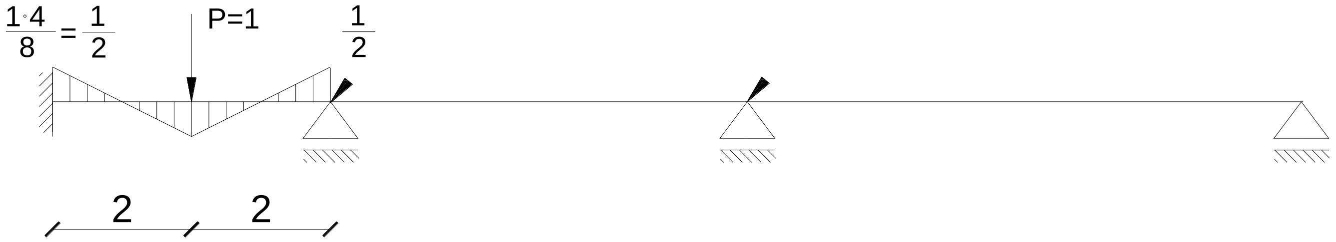
- stan φ_1=1:



- stan φ_2=1:



- obciążenie siłą skupioną w połowie przęsła AB



<u>Układ równań metody przemieszczeń:</u>

$$\begin{cases} k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{10} = 0 \\ k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{20} = 0 \end{cases}$$

Wyznaczenie współczynników układu:

$$k_{11} = EJ + \frac{2EJ}{3} = \frac{5EJ}{3}$$

$$k_{12} = \frac{EJ}{3} = k_{21}$$

$$k_{22} = \frac{2EJ}{3} + \frac{3EJ}{8} = \frac{25EJ}{24}$$

$$k_{10} = \frac{1}{2}$$

$$k_{20} = 0$$

Podstawienie współczynników do układu i rozwiązanie:

$$\begin{cases} \frac{5EJ}{3}\cdot\varphi_1 + \frac{EJ}{3}\cdot\varphi_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{EJ}{3}\cdot\varphi_1 + \frac{25EJ}{24}\cdot\varphi_2 + 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{0{,}321}{EJ} \\ \varphi_2 = \frac{0{,}103}{EJ} \end{cases}$$

Wykres momentów w poszczególnych punktach wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$\boxed{M_i = M_i^{\varphi_1=1} \cdot \varphi_1 + M_i^{\varphi_2=1} \cdot \varphi_2 + M_{0i}}$$

Przy obliczaniu momentów przyjęto znaki zgodne z metodą przemieszczeń: moment kręcący zgonie z ruchem wskazówek zegara „+”, moment kręcący przeciwnie do ruchu wskazówek zegara „-”.

$$M_A = \frac{EJ}{2} \cdot \left(-\frac{0{,}321}{EJ}\right) + 0 \cdot \frac{0{,}103}{EJ} - \frac{1}{2} = -0{,}6605$$

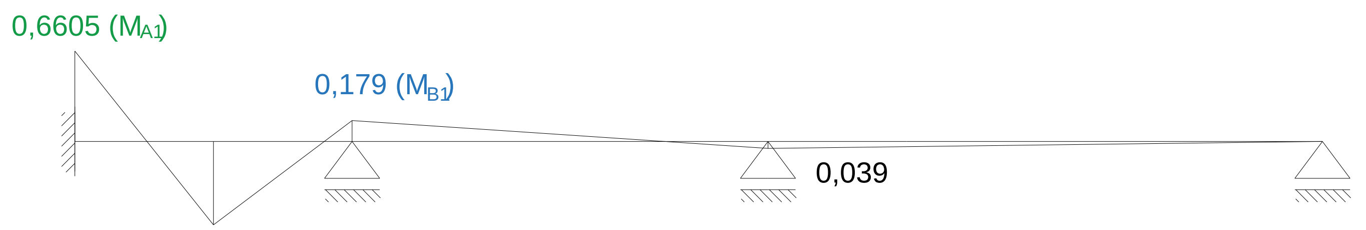
$$M_{B_L} = EJ \cdot \left(-\frac{0{,}321}{EJ}\right) + 0 \cdot \frac{0{,}103}{EJ} + \frac{1}{2} = 0{,}179$$

$$M_{B_P} = \frac{2EJ}{3} \cdot \left(\frac{-0{,}321}{EJ}\right) + \frac{EJ}{3} \cdot \frac{0{,}103}{EJ} = -0{,}179$$

$$M_{C_L} = \frac{EJ}{3} \cdot \left(-\frac{0{,}321}{EJ}\right) + \frac{2EJ}{3} \cdot \frac{0{,}103}{EJ} = -0{,}039$$

$$M_{C_P} = 0 \cdot \left(-\frac{0{,}321}{EJ}\right) + \frac{3EJ}{8} \cdot \frac{0{,}103}{EJ} = 0{,}039$$

Wykres momentów od siły przyłożonej w połowie długości przęsła AB

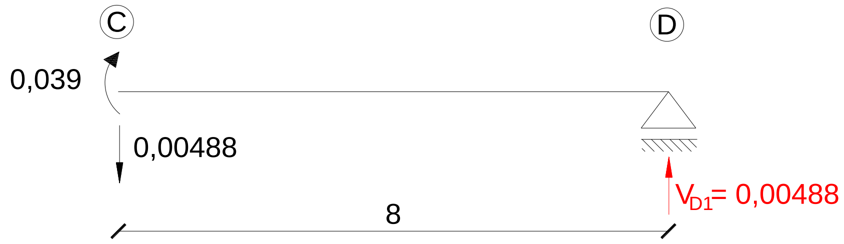


Wartość M_{A1} z rysunku odpowiada rzędnej na linii wpływu M_A w połowie rozpiętości pierwszego przęsła. Ponieważ moment rozciąga włókna górne, liniia wpływu momentu M_A w pierwszym przęśle przyjmuje znak „-”. Analogicznie w przypadku M_{B1}. Aby obliczyć rzędną w połowie pierwszego przęsła na LwV_D, szukamy wartości reakcji V_D dla tego przypadku obciążenia. W tym celu odcinamy ostatnie przęsło, zaznaczmy moment M_C i z równań równowagi wyznaczamy wartość reakcji V_{D1}.

$$\sum M_{CP} = 0{,}039 - V_{D1} \cdot 8 = 0$$

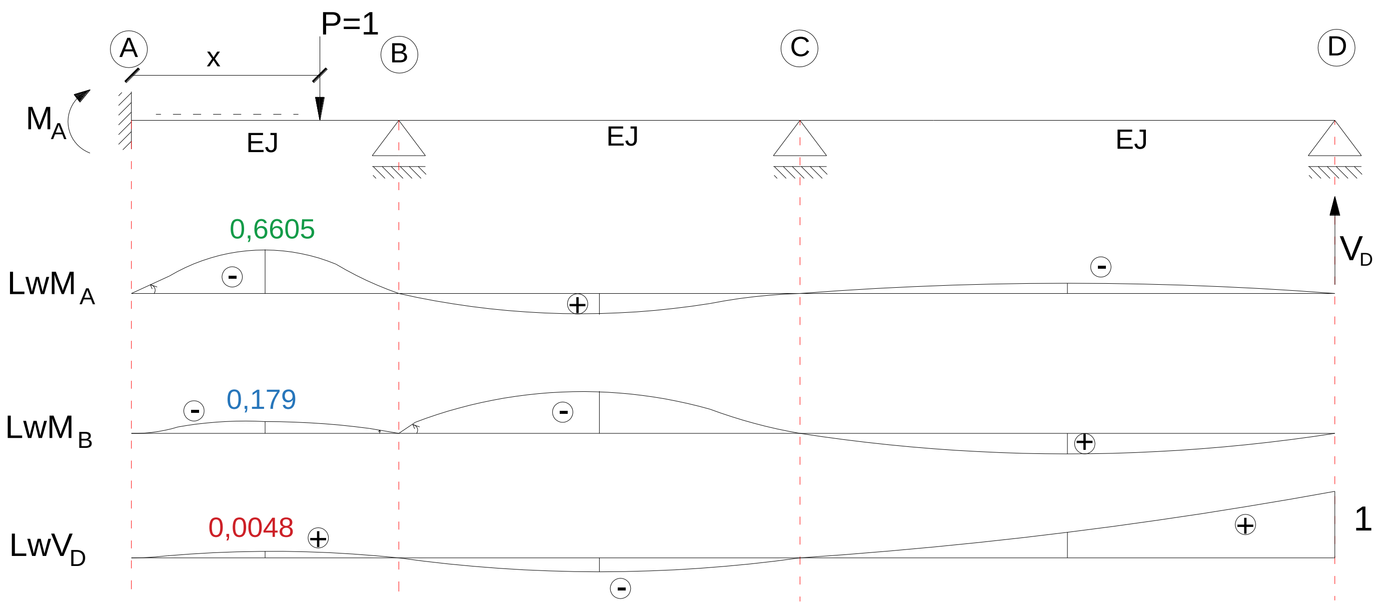
$$\downarrow$$

$$V_{D1} = \frac{0{,}039}{8} = 0{,}00488$$



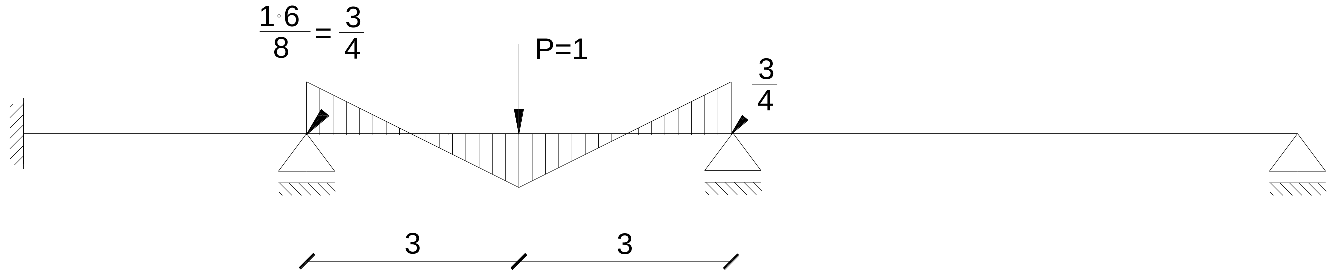
Ponieważ reakcja V_D ma zwrot do góry, wartość 0,00488 będzie się znajdować na dodatnim polu linii wpływu.

Naniesinie wartości rzędnych na poszczególne linie wpływu w połowie rozpiętości przęsła AB:



3. Wyznaczenie rzędnych poszczególnych linii wpływu w połowie długości przęsła BC:

Wykresy jednostkowe od kątów obrotu są identyczne, więc dla uproszczenia prezentacji je pominięto.
-Obciążenie siłą skupioną w połowie przęsła BC



Wyznaczenie współczynników od obciążenia zewnętrznego:

$$k_{10}=-0{,}75$$
$$k_{20}=0{,}75$$

Podstawienie współczynników do układu i rozwiązanie:

$$\begin{cases}\frac{5EJ}{3}\cdot\varphi_1+\frac{EJ}{3}\cdot\varphi_2-\frac{3}{4}=0\\ \frac{EJ}{3}\cdot\varphi_1+\frac{25EJ}{24}\cdot\varphi_2+\frac{3}{4}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\varphi_1=\frac{0{,}635}{EJ}\\ \varphi_2=-\frac{0{,}923}{EJ}\end{cases}$$

Wyznaczenie wartości momentów w poszczególnych punktach:

$$M_A=\frac{EJ}{2}\cdot\left(\frac{0{,}635}{EJ}\right)+0\cdot\left(-\frac{0{,}923}{EJ}\right)=0{,}3175$$

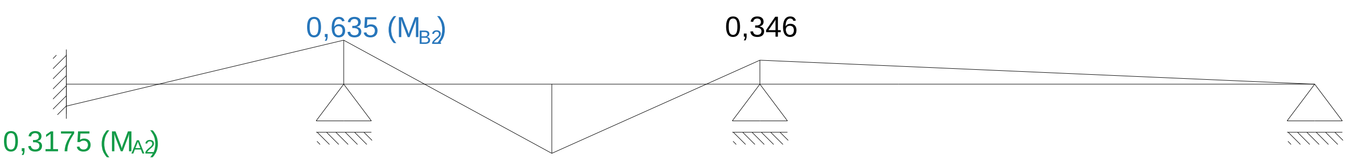
$$M_{B_L}=EJ\cdot\left(\frac{0{,}635}{EJ}\right)+0\cdot\left(-\frac{0{,}923}{EJ}\right)=0{,}635$$

$$M_{B_P}=\frac{2EJ}{3}\cdot\left(\frac{0{,}635}{EJ}\right)+\frac{EJ}{3}\cdot\left(-\frac{0{,}923}{EJ}\right)-\frac{3}{4}=-0{,}635$$

$$M_{C_L}=\frac{EJ}{3}\cdot\left(\frac{0{,}635}{EJ}\right)+\frac{2EJ}{3}\cdot\left(-\frac{0{,}923}{EJ}\right)+\frac{3}{4}=0{,}346$$

$$M_{C_P}=0\cdot\left(\frac{0{,}635}{EJ}\right)+\frac{3EJ}{8}\cdot\left(-\frac{0{,}923}{EJ}\right)=-0{,}346$$

Wykres momentów od siły przyłożonej w połowie długości przęsła BC:



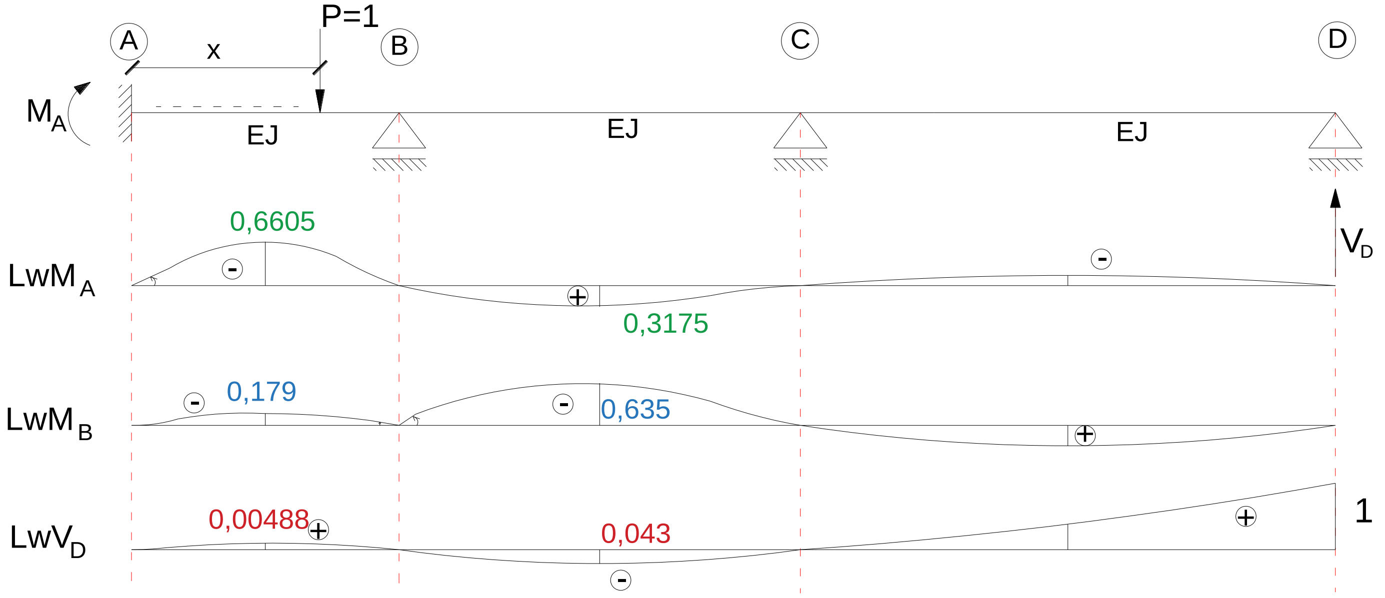
Moment M_{A2} rozciąga włókna dolne więc wartość 0,3175 znajduje się na dodatniej części linii wpływu.
Moment M_{B2} rozciąga włókna górne więc wartość 0,635 znajduje się na ujemnej części linii wpływu.

Wyznaczenie wartości reakcji V_{D2}:

$$\sum M_{CP}=0{,}346+V_{D2}\cdot 8=0$$
$$\downarrow$$
$$V_{D2}=-\frac{0{,}346}{8}=-0{,}043$$

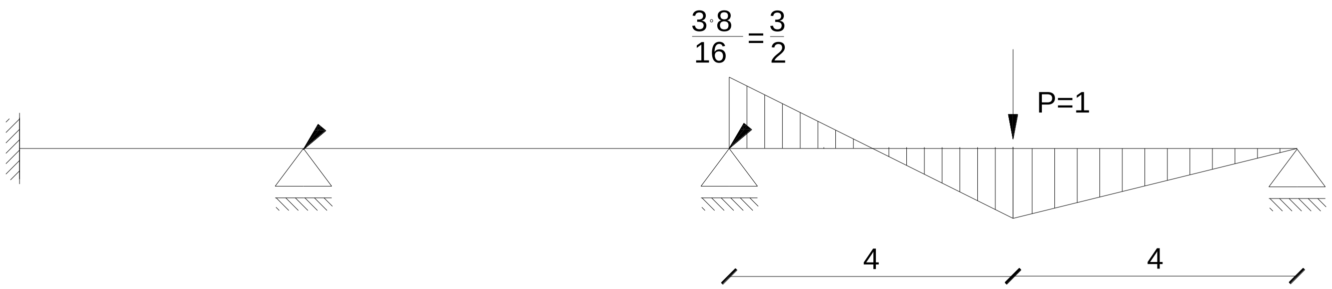
Ponieważ wartość reakcji wyszła ujemna, rzędna 0,043 znajduje się po ujemnej stronie linii wpływu.

Naniesinie wartości rzędnych na poszczególne linie wpływu w połowie rozpiętości przęsła BC:



4. Wyznaczenie rzędnych poszczególnych linii wpływu w połowie długości przęsła CD:

Wykresy jednostkowe od kątów obrotu są identyczne, więc dla uproszczenia prezentacji je pominięto.
-Obciążenie siłą skupioną w połowie przęsła CD



Wyznaczenie współczynników od obciążenia zewnętrznego:

$$k_{10}=0$$

$$k_{20}=-\frac{3}{2}$$

Podstawienie współczynników do układu i rozwiązanie:

$$\begin{cases}\frac{5EJ}{3}\cdot\varphi_1+\frac{EJ}{3}\cdot\varphi_2+0=0\\ \frac{EJ}{3}\cdot\varphi_1+\frac{25EJ}{24}\cdot\varphi_2-\frac{3}{2}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\varphi_1=-\frac{0,308}{EJ}\\ \varphi_2=\frac{1,538}{EJ}\end{cases}$$

Wyznaczenie wartości momentów w poszczególnych punktach:

$$M_A=\frac{EJ}{2}\cdot\left(-\frac{0,308}{EJ}\right)+0\cdot\frac{1,538}{EJ}+0=-0,154$$

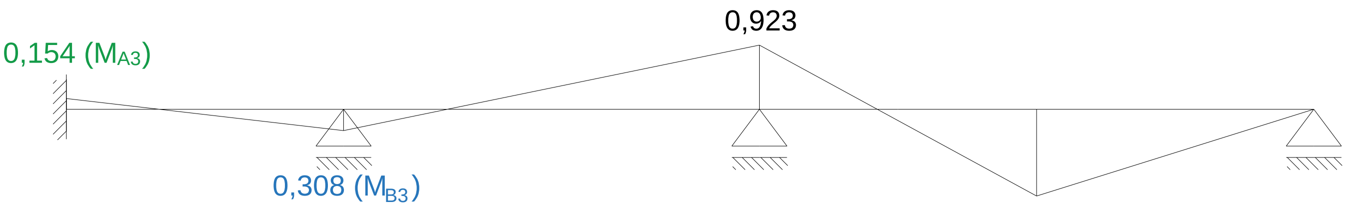
$$M_{B_L}=EJ\cdot\left(-\frac{0,308}{EJ}\right)+0\cdot\frac{1,538}{EJ}+0=-0,308$$

$$M_{B_P}=\frac{2EJ}{3}\cdot\left(\frac{-0,308}{EJ}\right)+\frac{EJ}{3}\cdot\frac{1,538}{EJ}+0=0,308$$

$$M_{C_L}=\frac{EJ}{3}\cdot\left(-\frac{0,308}{EJ}\right)+\frac{2EJ}{3}\cdot\frac{1,538}{EJ}=0,923$$

$$M_{C_P}=0\cdot\left(-\frac{0,308}{EJ}\right)+\frac{3EJ}{8}\cdot\frac{1,538}{EJ}-\frac{3}{2}=-0,923$$

Wykres momentów od siły przyłożonej w połowie długości przęsła BC



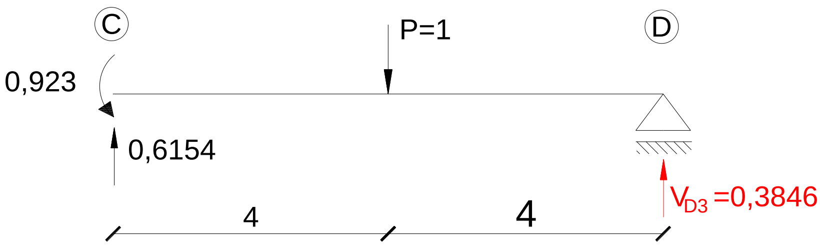
Moment M_{A3} rozciąga włókna górne więc wartość 0,154 znajduje się na ujemnej części linii wpływu.
Moment M_{B3} rozciąga włókna dolne więc wartość 0,308 znajduje się na dodatniej części linii wpływu.

Wyznaczenie wartości reakcji V_{D3}:

$$\sum M_{CP} = 0{,}923 - 1 \cdot 4 + V_{D3} \cdot 8 = 0$$

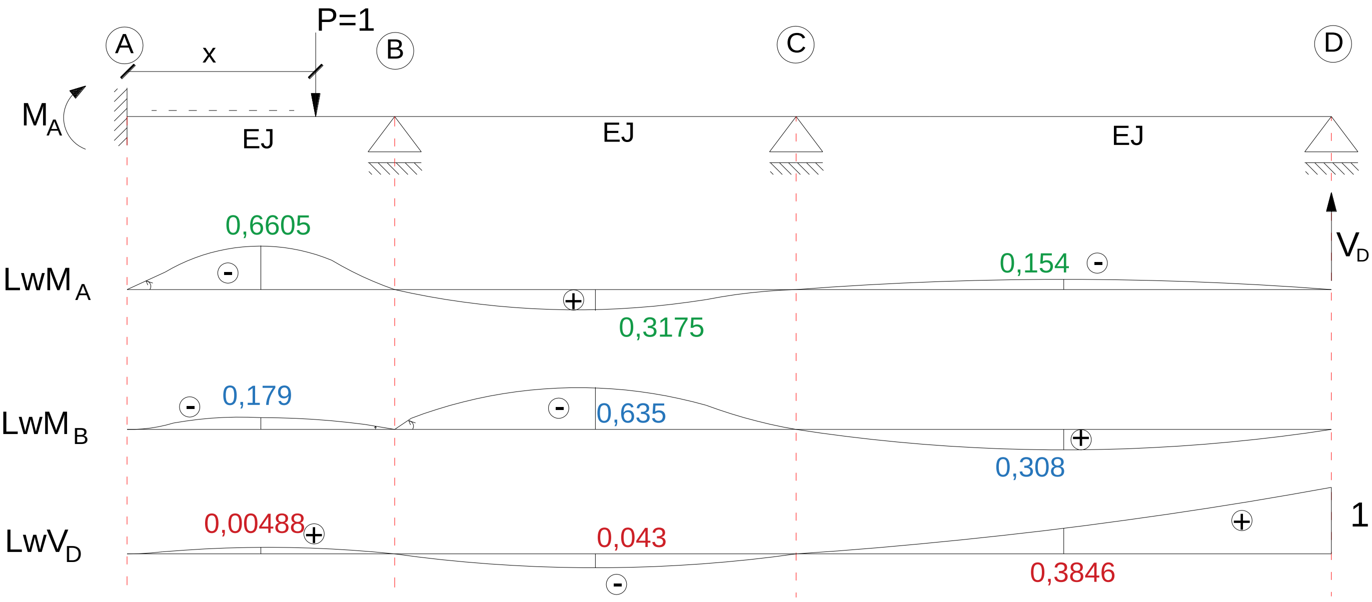
$$\downarrow$$

$$V_{D3} = \frac{4 - 0{,}923}{8} = 0{,}3846$$

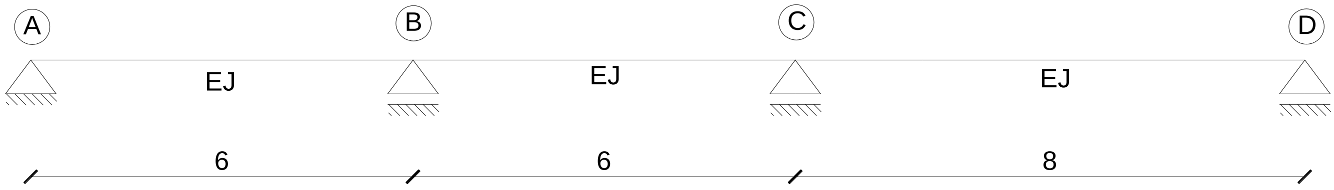


Ponieważ wartość reakcji wyszła dodatnia, rzędna 0,3846 znajduje się po dodatniej stronie linii wpływu.

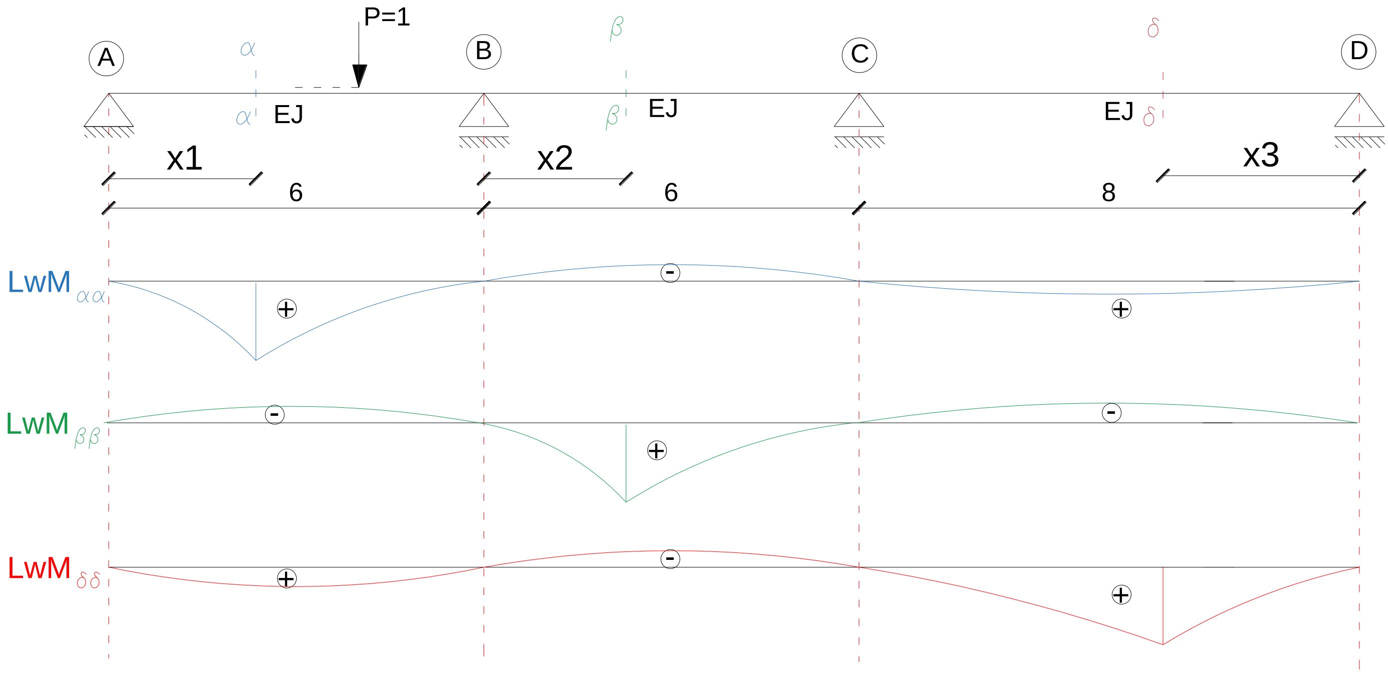
Naniesinie wartości rzędnych na poszczególne linie wpływu w połowie rozpiętości przęsła CD:



<u>Zadanie 2</u>: *Znajdź ekstremalny moment przęsłowy od obciążenia użytkowego p=6kN/m dla poniższego układu na podstawie linii wpływu.*

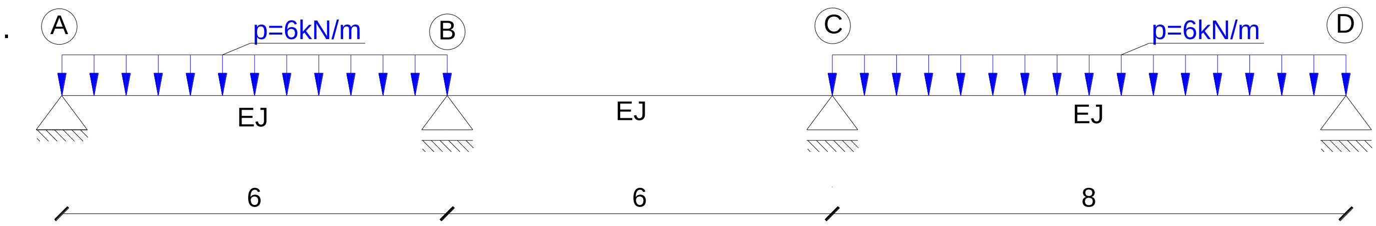


Powyższy układ składa się z trzech przęseł. Nie wiadomo, na którym z nich powstanie moment ekstremalny, ani w którym konkretnie miejscu. Dla wyznaczenia ekstremalnego momentu przęsłowego na podstawie linii wpływu szkicujemy linie wpływu momentów dla dowolnie obranych przekrojów w każdym z trzech przęseł.



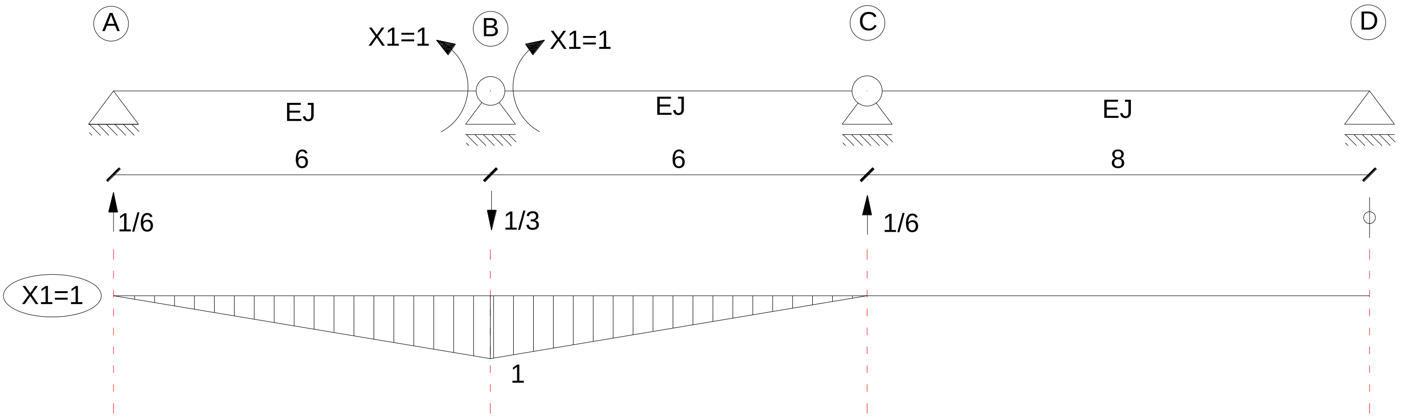
W przypadku poszukiwania ekstremalnego momentu przęsłowego należy obciążyć dane przęsło i wszystkie inne części belki, na których dana linia wpływu ma ten sam znak – w tym przypadku pola dodatnie linii wpływu. Rozważając szkice linii $LwM_{\alpha\alpha}$ i $LwM_{\delta\delta}$, aby znaleźć ekstremalne momenty na przęśle AB i CD należy jednocześnie obciążyć skrajne przęsła, rozwiązać metodę sił i wyznaczyć wartości ekstremów.
Rozważając szkic $LwM_{\beta\beta}$, widać, że aby otrzymać ekstremalny moment na przęśle BC, należy obciążyć środkowe przęsło.
Aby rozwiązać zadanie należy zatem rozpatrzeć dwa przypadki obciążenia:

1. <u>Obciążenie skrajnych przęseł:</u>

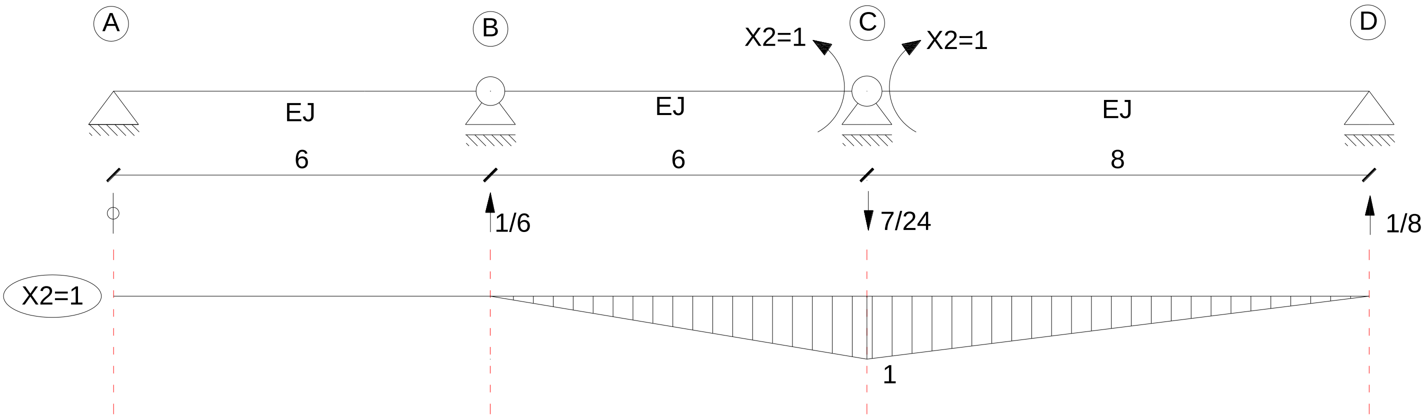


Schemat podstawowy metody sił:

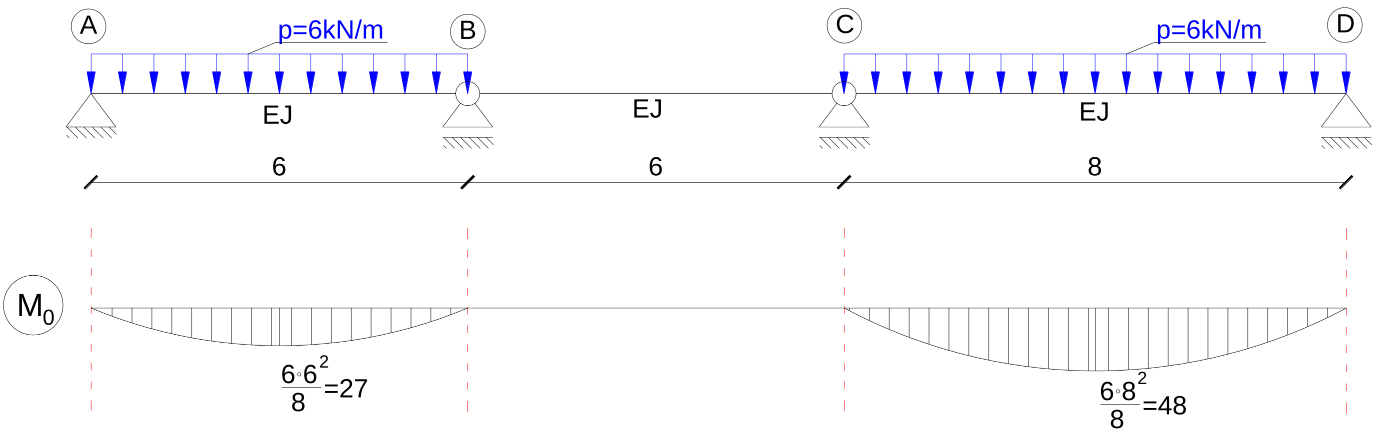
- stan X1=1



- stan X2=1



- obciążenie zewnętrzne:



<u>Wyznaczenie współczynników układu równań metody sił</u>:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot6\cdot\frac{2}{3}\cdot1\cdot2=\frac{4}{EJ}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EJ}\cdot\frac{2}{3}\cdot27\cdot6\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{54}{EJ}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot6\cdot\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EJ}\cdot\frac{2}{3}\cdot48\cdot8\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{128}{EJ}$$

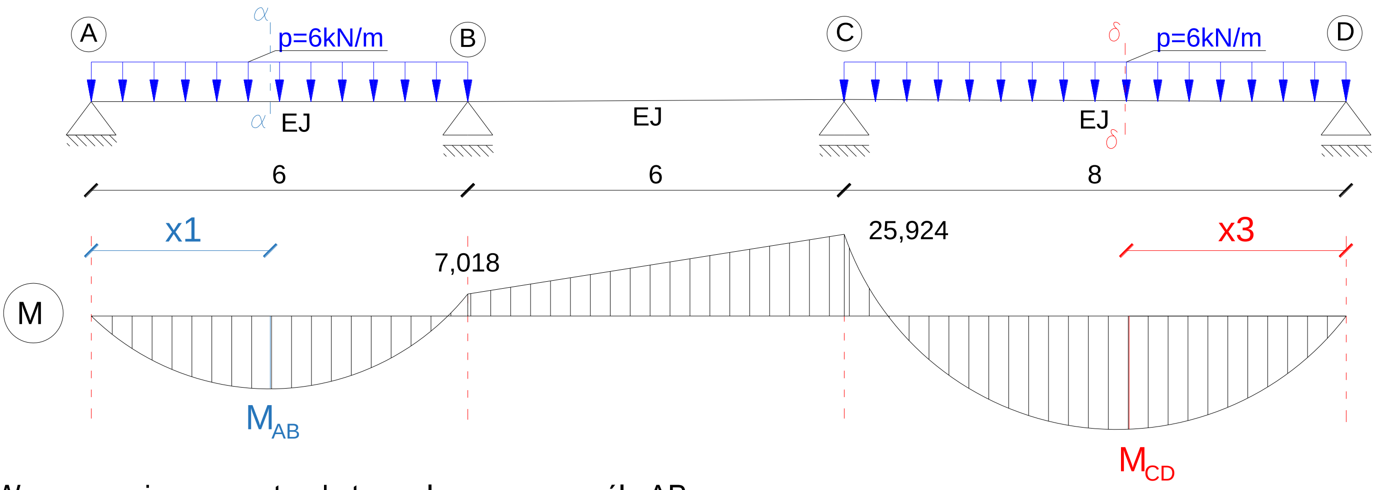
$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot6\cdot\frac{2}{3}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1\cdot8\cdot\frac{2}{3}\cdot1\right)=\frac{14}{3EJ}$$

Podstawienie współczynników do układu i rozwiązanie:

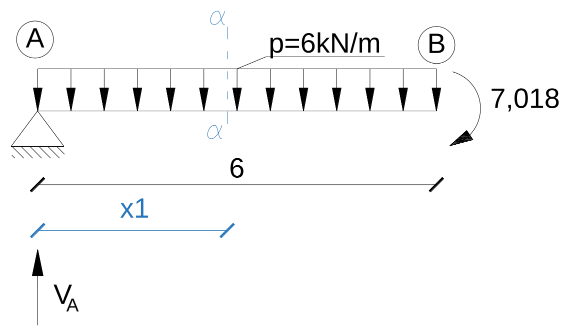
$$\begin{cases} \delta_{11}\cdot X1+\delta_{12}\cdot X2+\delta_{10}=0 \\ \delta_{21}\cdot X1+\delta_{22}\cdot X2+\delta_{20}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{EJ}\cdot X1+\dfrac{1}{EJ}\cdot X2+\dfrac{54}{EJ}=0 \\ \dfrac{1}{EJ}\cdot X1+\dfrac{14}{3EJ}\cdot X2+\dfrac{128}{EJ}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X1=-7{,}018kNm \\ X2=-25{,}924kNm \end{cases}$$

Przebieg wykresu momentów zginających od obciążenia założonego na skrajnych przęsłach uzyskany na podstawie wyznaczonych nadliczbowych X1 i X2:



Wyznaczenie momentu ekstremalnego na przęśle AB:



$$\sum M_B = 7{,}018 + V_A\cdot 6 - 6\cdot 6\cdot 3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$V_A = 16{,}83kN$$

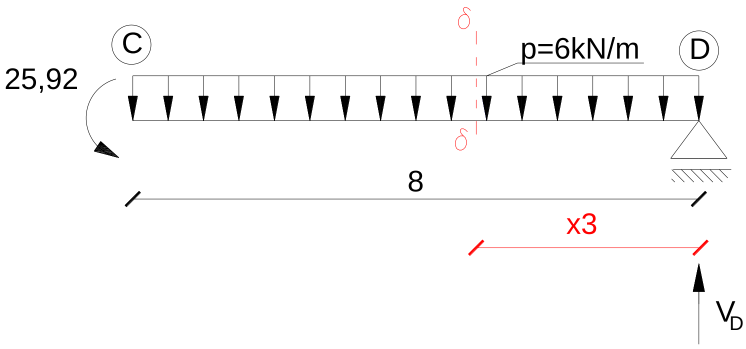
$$T[x1] = 16{,}83 - 6\cdot x1 = 0 \rightarrow x1 = 2{,}805m$$

$$M_{AB}[x1] = 16{,}83\cdot x1 - 6\cdot x1\cdot \frac{x1}{2}$$

$$= 16{,}83\cdot 2{,}805 - 6\cdot 2{,}805\cdot \frac{2{,}805}{2}$$

$$= 23{,}6kNm$$

Wyznaczenie momentu ekstremalnego na przęśle CD:



$$\sum M_C = 25{,}92 + V_D\cdot 8 - 6\cdot 8\cdot 4 = 0$$

$$\downarrow$$

$$V_D = 20{,}76kN$$

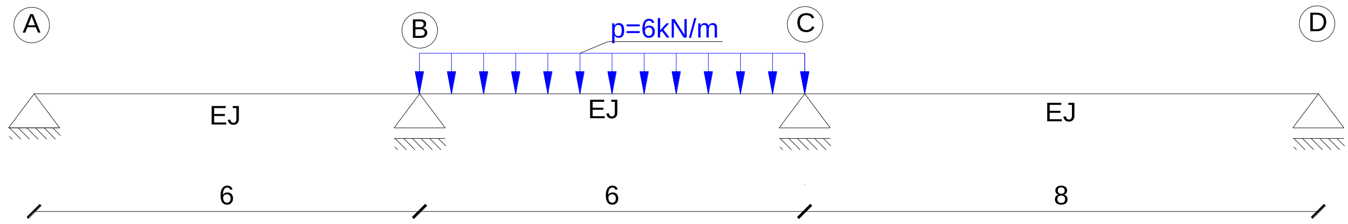
$$T[x3] = -20{,}76 + 6\cdot x3 = 0 \rightarrow x3 = 3{,}46m$$

$$M_{CD}[x3] = 20{,}76\cdot x3 - 6\cdot x3\cdot \frac{x3}{2}$$

$$= 20{,}76\cdot 3{,}46 - 6\cdot 3{,}46\cdot \frac{3{,}46}{2}$$

$$= 35{,}91kNm$$

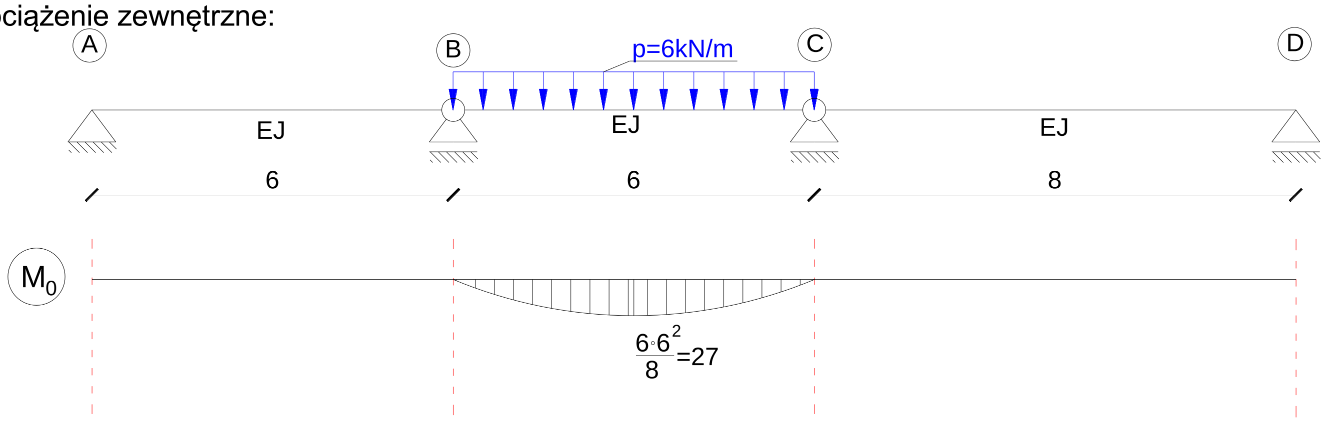
2. Obciążenie środkowego przęsła:



Rozwiązanie układu metodą sił:

Schemat podstawowy i wykresy od jednostkowych momentów oraz współczynniki δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22} są takie same jak w pkt. 1.Pominięto je zatem w rozwiązaniu:

- obciążenie zewnętrzne:



Wyznaczenie współczynników układu równań metody sił:

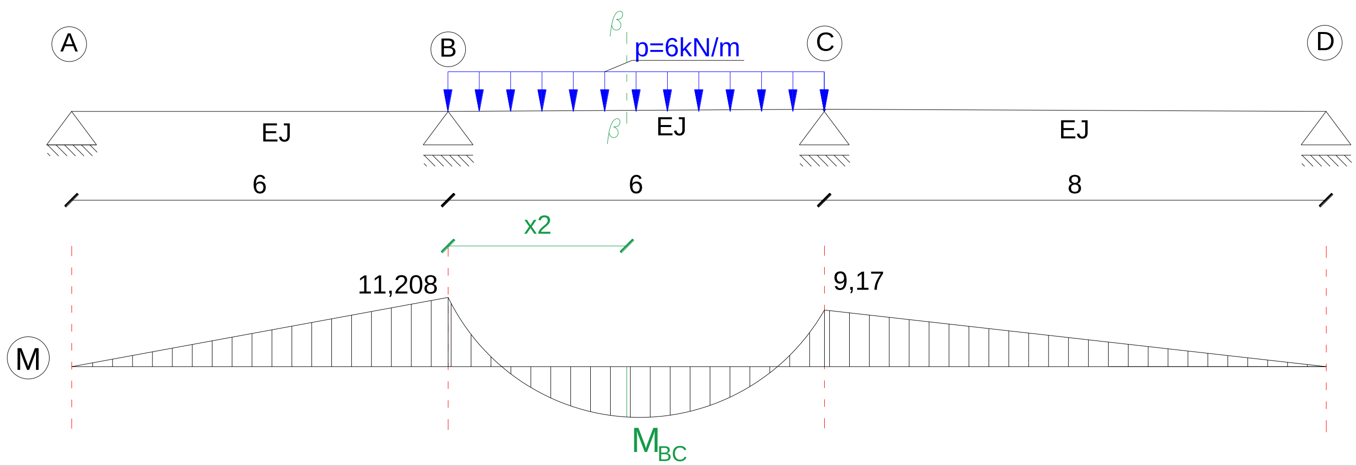
$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 27 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{54}{EJ} \qquad \delta_{20} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 27 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{54}{EJ}$$

Podstawienie współczynników do układu i rozwiązanie:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X1 + \delta_{12} \cdot X2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X1 + \delta_{22} \cdot X2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

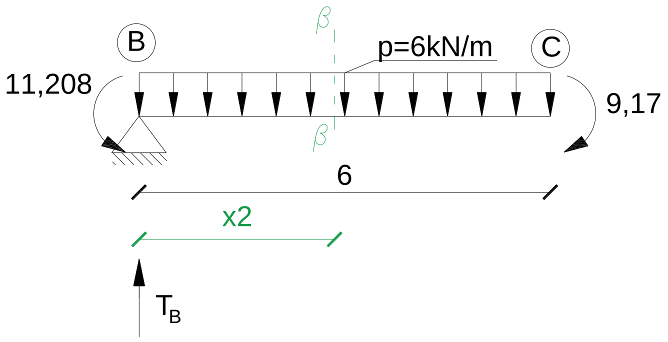
$$\begin{cases} \frac{4}{EJ} \cdot X1 + \frac{1}{EJ} \cdot X2 + \frac{54}{EJ} = 0 \\ \frac{1}{EJ} \cdot X1 + \frac{14}{3EJ} \cdot X2 + \frac{54}{EJ} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X1 = -11{,}208 kNm \\ X2 = -9{,}17 kNm \end{cases}$$

Przebieg wykresu momentów zginających od obciążenia założonego na środkowym przęśle uzyskany na podstawie wyznaczonych nadliczbowych X1 i X2:



dr inż. Hanna Weber

Wyznaczenie momentu ekstremalnego na przęśle BC:



$$\sum M_C = 9{,}17 - 11{,}208 + T_B \cdot 6 - 6 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$
$$\downarrow$$
$$T_B = 18{,}34 kN$$

$$T[x3] = 18{,}34 - 6 \cdot x3 = 0 \rightarrow x3 = 3{,}06 m$$

$$M_{BC}[x3] = 18{,}34 \cdot x3 - 6 \cdot x3 \cdot \frac{x3}{2} - 11{,}208$$
$$= 18{,}34 \cdot 3{,}06 - 6 \cdot 3{,}06 \cdot \frac{3{,}06}{2} - 11{,}208$$
$$= 16{,}82 kNm$$

Odp. Maksymalny moment przęsłowy powstanie na przęśle CD i będzie wynosił 35,91kNm.