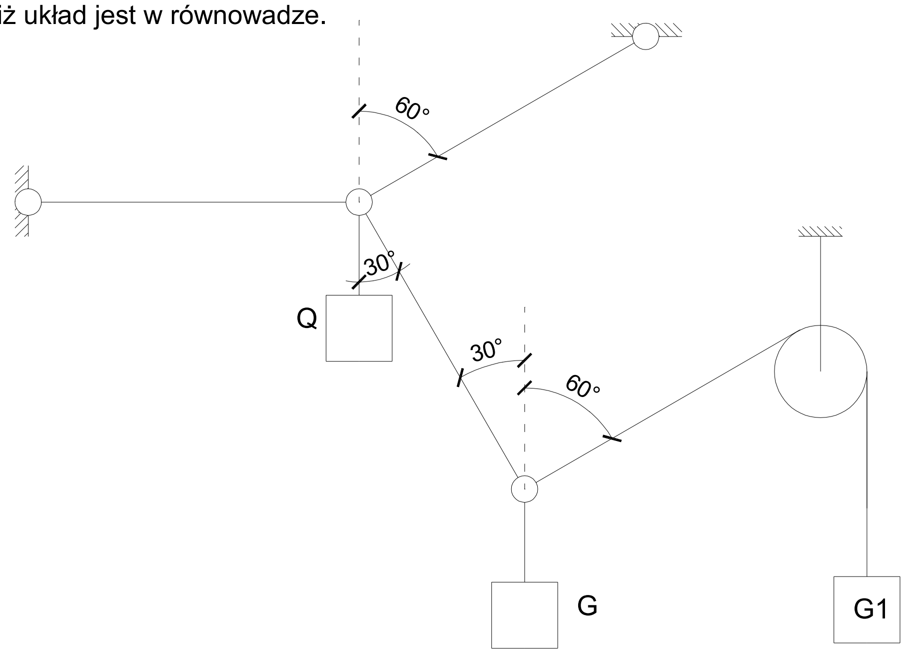
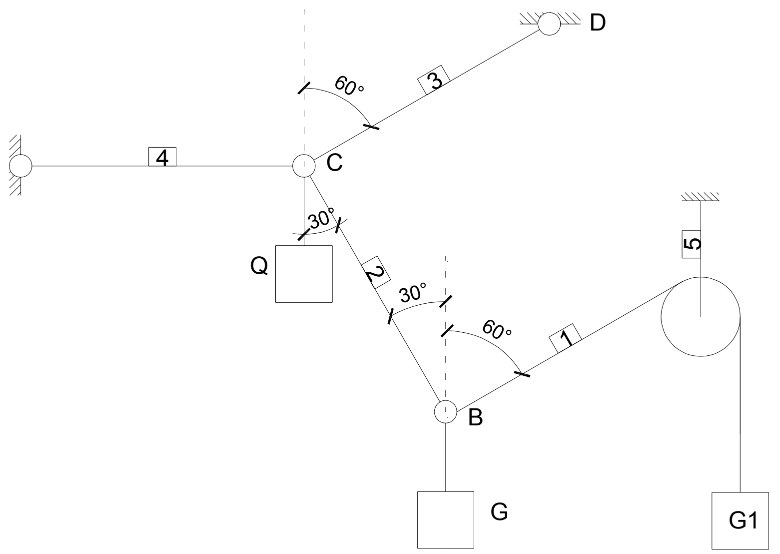
ZADANIA Z DZIAŁU **„RÓWNOWAGA NA PŁASZCZYŹNIE"**

Zadanie 1.

Mając dane G1=10kN i Q=20kN wyznaczyć siły w prętach i linie, na których zawieszone są ciężary Q i G zakładając iż układ jest w równowadze.

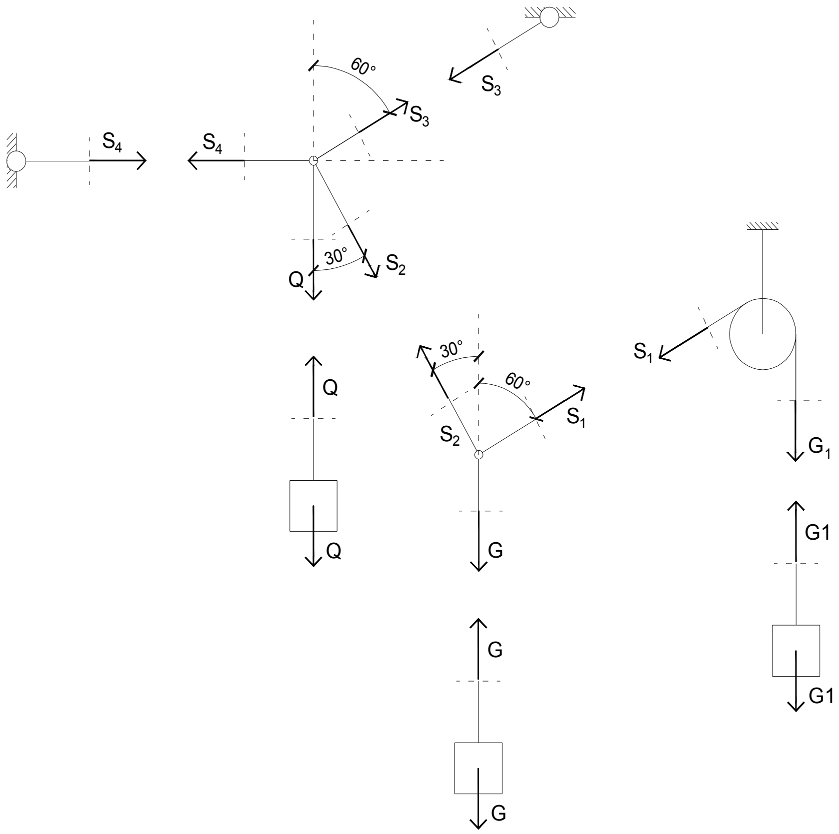


Rozwiązanie:
Oznaczamy numery poszczególnych węzłów i prętów układu:

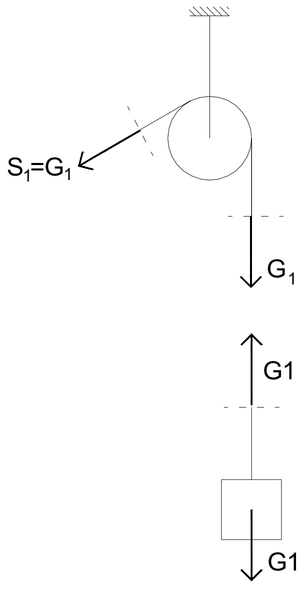


mgr inż. Hanna Weber

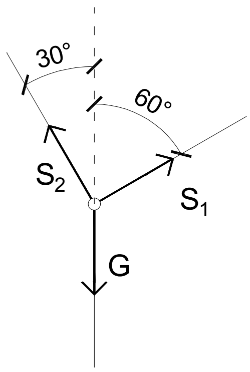
Stosujemy zasadę uwolnienia od więzów i zaznaczamy siły w poszczególnych prętach i linie.

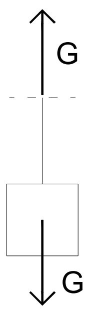


Rozpatrując równowagę kołowrotka określamy wartość siły w linie. Ponieważ mamy do czynienia z liną naciąg na obu końcach musi być identyczny, stąd otrzymujemy, że $S_1 = G_1$.



Następnie wyliczamy siły w poszczególnych prętach korzystając z równowagi węzła C i B. Obliczenia rozpoczynamy od węzła B, ponieważ schodzą się w nim tylko trzy siły.





Wartości sił wyznaczamy z sumy rzutów na dwie osie x i y:

$$\sum R_x = -S_2 \sin 30^0 + S_1 \sin 60^\circ = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Ry = S_2 \cos 30^0 + S_1 \cos 60^\circ - G = 0 \qquad (2)$$

z równania (1) wyznaczamy S_2:

$$S_2 = \frac{S_1 \sin 60^0}{\sin 30^0} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5} = 10\sqrt{3} = 17{,}32\,kN \qquad (3)$$

wstawiamy (3) do równania (2) uzyskując:

$$S_1 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} \cos 30^0 + S_1 \cos 60^\circ - G = 0$$

$$S_1 \sin 60^\circ \cot 30^\circ + S_1 \cos 60^\circ - G = 0 \qquad (4)$$

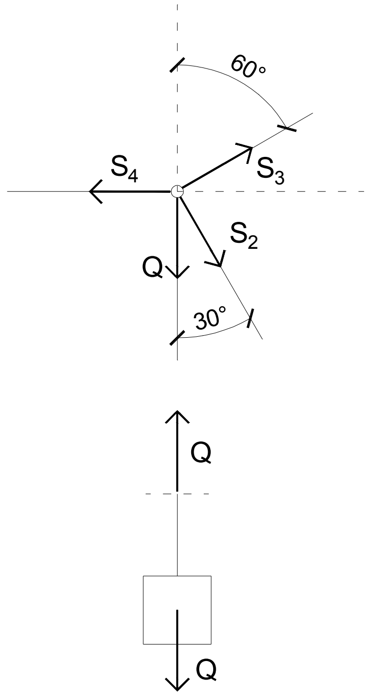
Przekształcamy równanie (4) dla obliczenia *G*

$$S_1 (\sin 60^\circ \cot 30^\circ + \cos 60^\circ) = G$$

$$G = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = 20\text{kN}$$

Wyznaczoną wartość siły S_2 przykładamy do węzła C (z przeciwnym zwrotem tak aby siły w pręcie drugim się równoważyły) i liczymy siły w pozostałych prętach z równowagi w drugim węźle.

węzeł C



Wartości sił wyznaczamy z sumy rzutów na dwie osie x i y:

$$\sum R_x = S_2 \sin 30^0 + S_3 \sin 60^\circ - S_4 = 0 \quad (5)$$

$$\sum Ry = - S_2 \cos 30^0 + S_3 \cos 60^\circ - Q = 0 \quad (6)$$

z równania (6) wyznaczamy S_3:

$$S_3 = \frac{Q + S_2 \cos 30^0}{\cos 60^0} = \frac{20 + 10 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0,5} = 70\mathrm{kN}$$

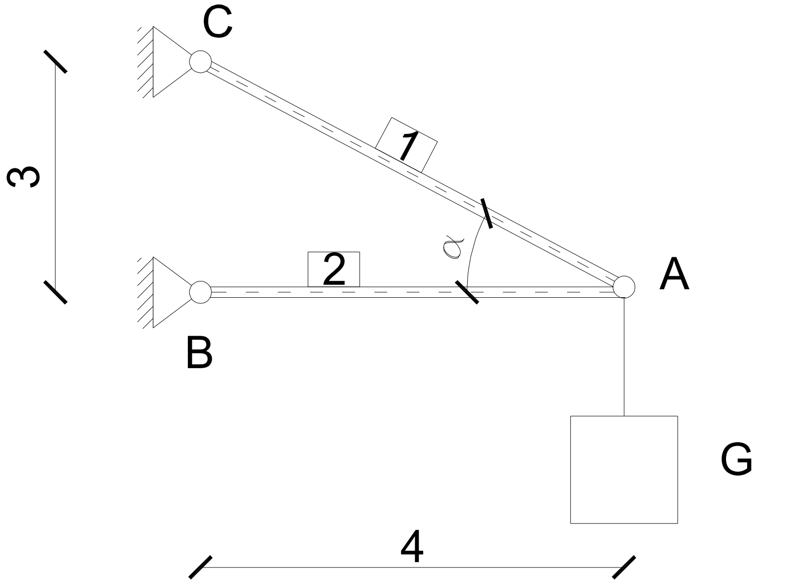
Uzyskaną wartość S_3 podstawiamy do równania (5) i wyliczamy S_4

$$S_4 = S_2 \sin 30^0 + S_3 \sin 60^0 = 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 70 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3} = 69,28\,kN$$

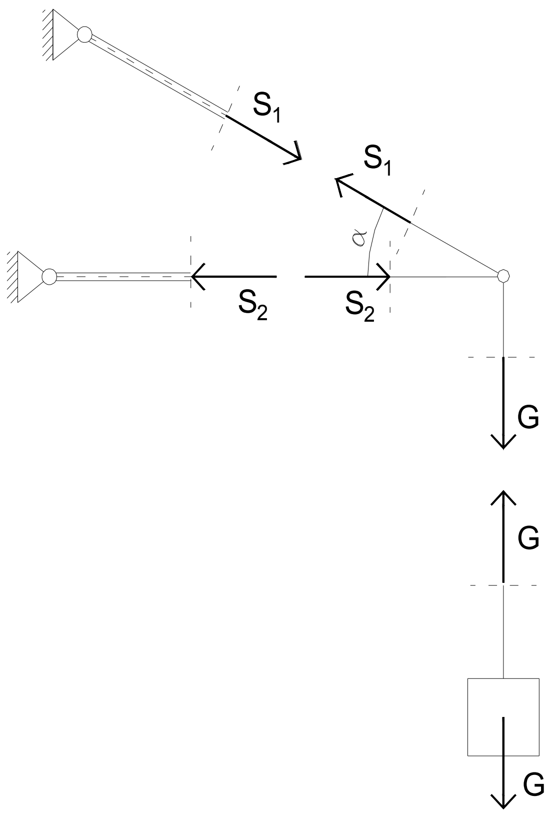
Odp.: S_1= 10kN, S_2= 17,32kN, S_3= 70kN, S_4= 69,28kN

Zadanie 2.

Obliczyć siły w prętach dla układu jak na rysunku pomijając ich ciężary własne i tarcie w przegubach, jeżeli ciężar G ma wartość 3kN.

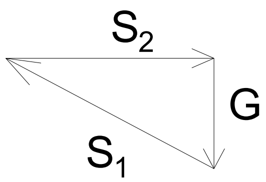


Stosujemy zasadę uwolnienia od więzów i zaznaczamy siły w poszczególnych prętach i linie.



<u>Rozwiązanie:</u>

I sposób (układ sił zbieżnych) – tworzymy zamknięty wielobok sił i wyznaczamy wartości sił w prętach z funkcji trygonometrycznych



Siły utworzyły trójkąt prostokątny.

Korzystając w wymiarów na początkowym rysunku określamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między prętami.

$$\cos\alpha=\frac{4}{5}=0{,}8 \quad ; \quad \sin\alpha=\frac{3}{5}=0{,}6$$

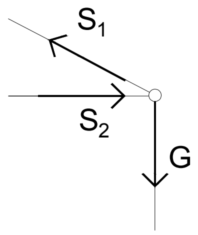
$$\tan\alpha=\frac{3}{4}=0{,}75 \quad ; \quad \cot\alpha=\frac{4}{3}=1{,}33$$

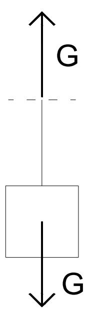
Z trójkąta prostokątnego wyliczamy wartości sił S_1 i S_2:

$$\sin\alpha=\frac{G}{S_1}\rightarrow S_1=\frac{G}{\sin\alpha}=\frac{3}{0{,}6}=5\mathrm{kN}$$

$$\tan\alpha=\frac{G}{S_2}\rightarrow S_2=\frac{G}{\tan\alpha}=G\cot\alpha=3\cdot\frac{4}{3}=4\mathrm{kN}$$

II sposób – przewidujemy zwroty sił w prętach i wyznaczamy ich wartości rzutując na dwie wzajemnie prostopadłe osie x (poziomą) i y (pionową).





Wartości sił otrzymujemy z sumy rzutów na dwie osie x i y:

$$\sum R_x = S_2 - S_1\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$
$$\sum Ry = S_1\sin\alpha - G = 0 \qquad (2)$$

z równania (2) wyznaczamy S_1:

(3)

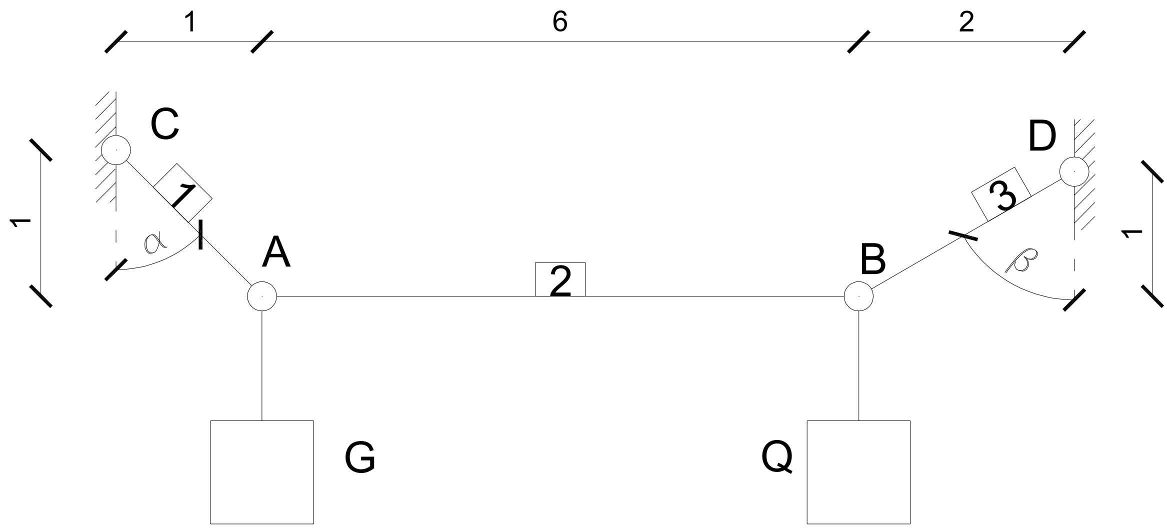
$$S_1=\frac{G}{\sin\alpha}=\frac{3}{0{,}6}=5\mathrm{kN}$$

Przekształcamy równanie (1) dla wyliczenia S_2

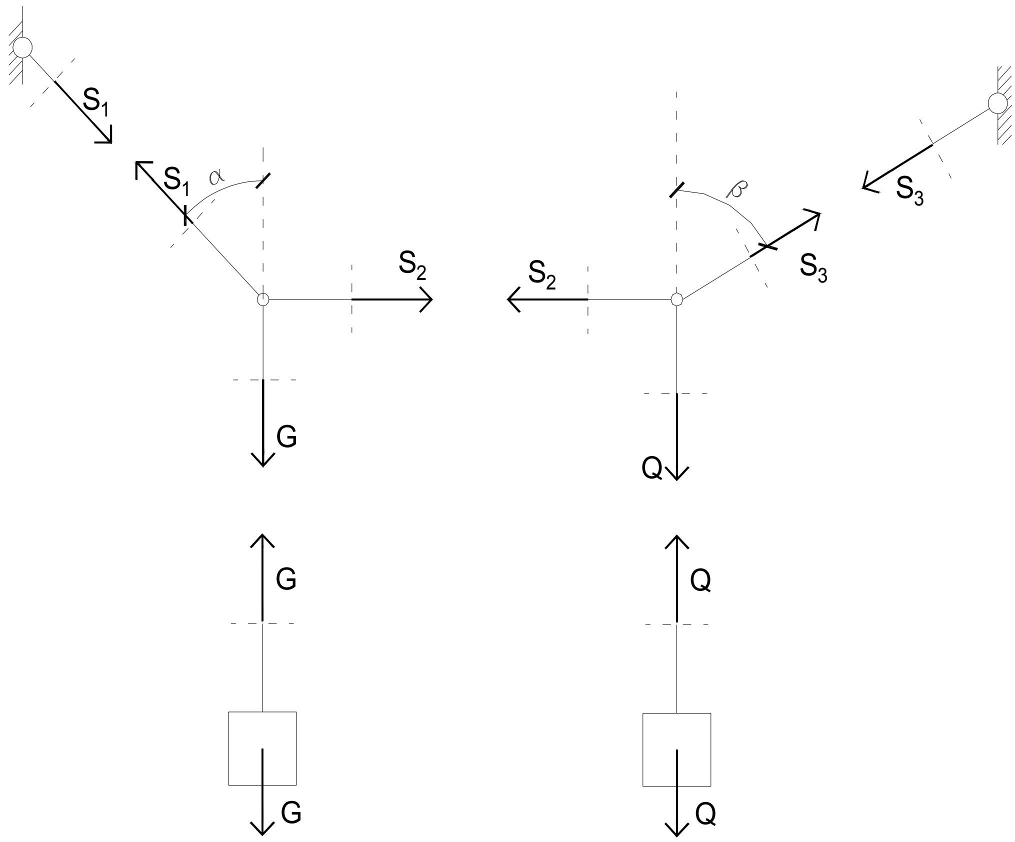
$$S_2=S_1\cos\alpha=\frac{G}{\sin\alpha}\cos\alpha=G\cot\alpha=\frac{3\cdot 4}{3}=4\mathrm{kN}$$

Odp.: S_1= 5kN, S_2= 4kN.

Zadanie 3.
Wyznacz Q jeśli ciężar G ma wartość 5kN, a układ znajduje się w równowadze.

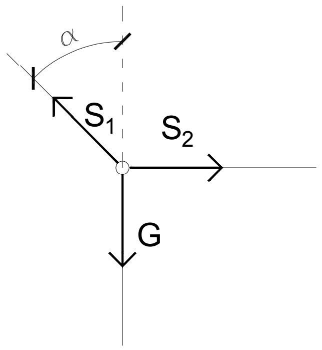


Stosujemy zasadę uwolnienia od więzów i zaznaczamy siły w poszczególnych prętach.



mgr inż. Hanna Weber

Węzeł A



Wartości sił otrzymujemy z sumy rzutów na dwie osie x i y:

$$\sum R_x = -S_1 \sin\alpha + S_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Ry = S_1 \cos\alpha - G = 0 \qquad (2)$$

Zgodnie z wymiarami podanymi na rysunku $\alpha = 45^0$.
Z równania (2) wyznaczamy *S_1:*

$$S_1 = \frac{G}{\cos 45^0} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 7{,}07\,kN \qquad (3)$$

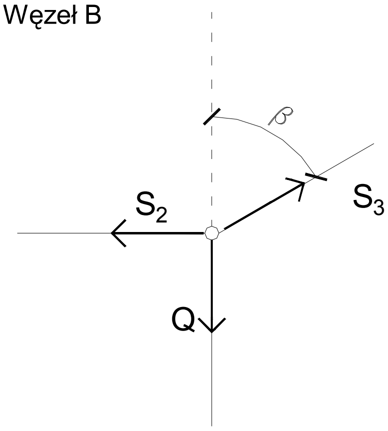
wstawiamy (3) do równania (1)uzyskując:

$$-\frac{G}{\cos 45^0} \sin 45^0 + S_2 = 0 \qquad (4)$$

Przekształcamy równanie (4) dla wyliczenia *S_2*

$$S_2 = \frac{G}{\cos 45^0} \sin 45^0 = \frac{G}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = G = 5\mathrm{kN}$$

Węzeł B



Wartości sił wyznaczamy z sumy rzutów na dwie osie x i y:

$$\sum R_x = S_3 \sin\beta - S_2 = 0 \qquad (5)$$

$$\sum Ry = S_3 \cos\beta - Q = 0 \qquad (6)$$

Korzystając z pierwszego rysunku wyliczamy wartość funkcji trygonometrycznych dla kąta β

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \tan\beta = \frac{2}{1} = 1 \quad \cot\beta = \frac{1}{2}$$

z równania (5) wyznaczamy *S_3:*

$$S_3 = \frac{S_2}{\sin\beta} = \frac{G}{\sin\beta} = \frac{5}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 2{,}5\sqrt{5} = 5{,}59\,kN \qquad (7)$$

wstawiamy (7) do równania (6) uzyskując poszukiwane Q:

$$Q = S_3 \cos\beta = \frac{G}{\sin\beta} \cos\beta = G \cot\beta = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5\,kN$$

Odp.: Q = 2,5kN.