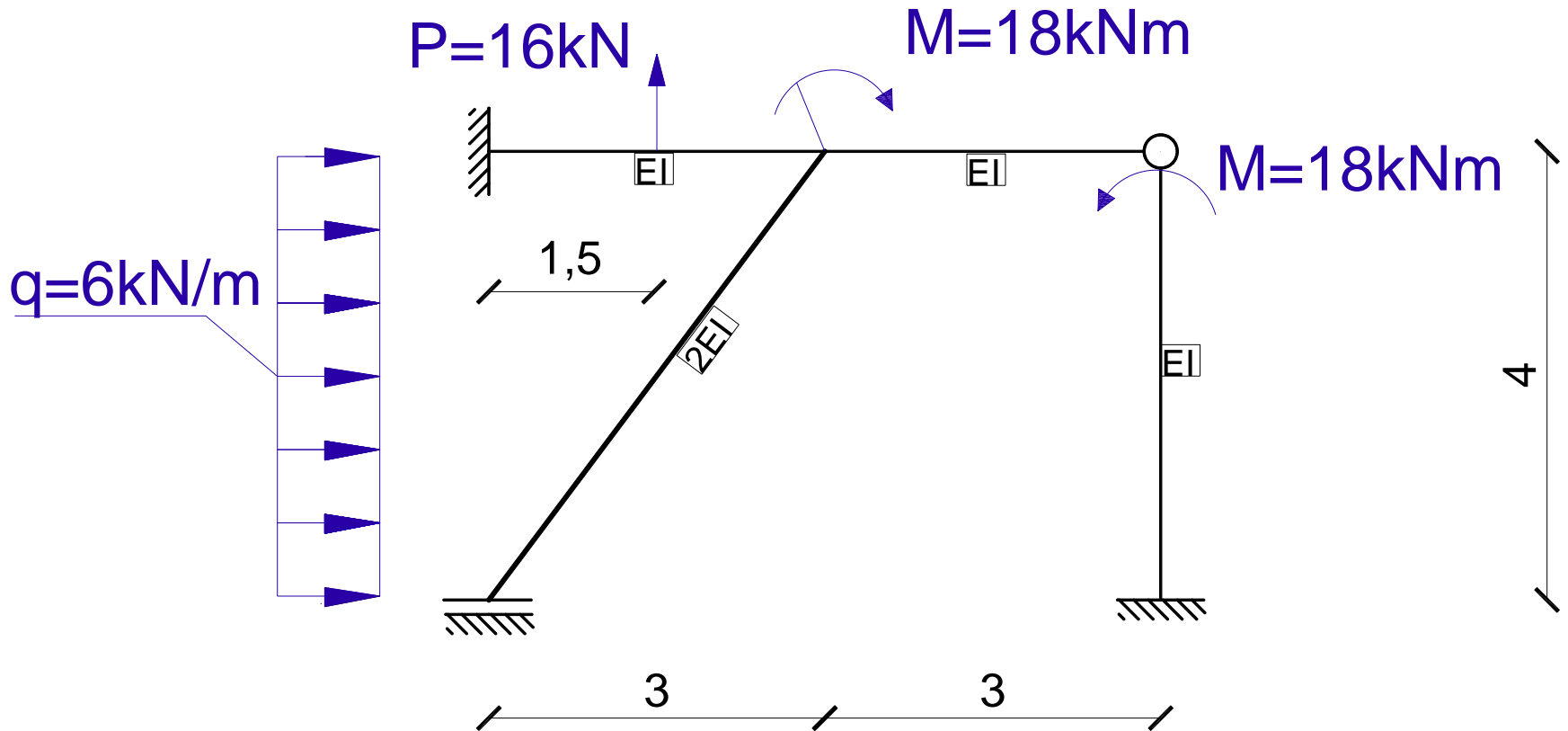


Mechanika Budowli – sem. IV

Wykład:

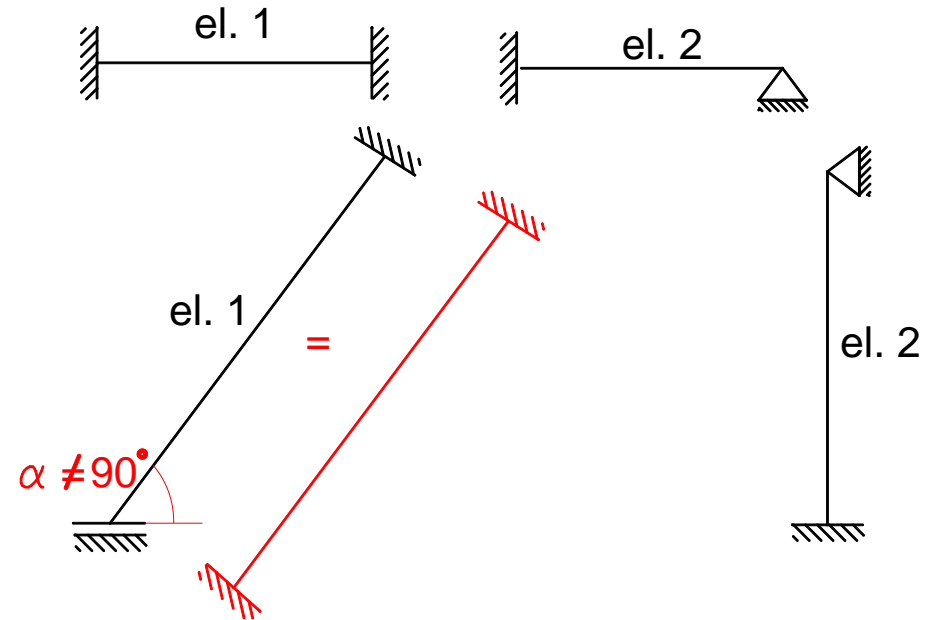
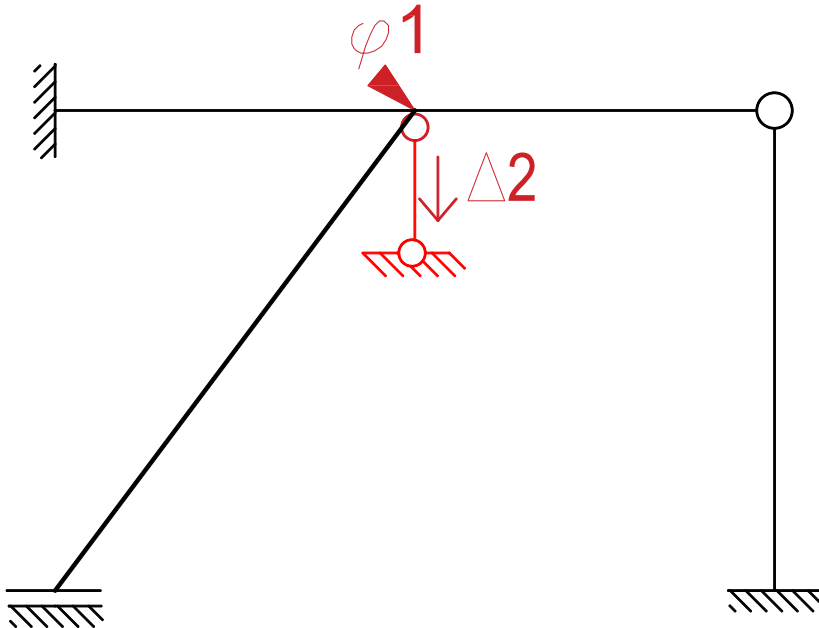
Obliczanie ramy przesuwnej z prętami ukośnymi metodą przemieszczeń

Zadanie 1: Wyznaczyć współczynniki układu równań metody przemieszczeń.
Zadanie rozwiązać w minimalnej bazie niewiadomych.



Schemat podstawowy geometrycznie wyznaczalny

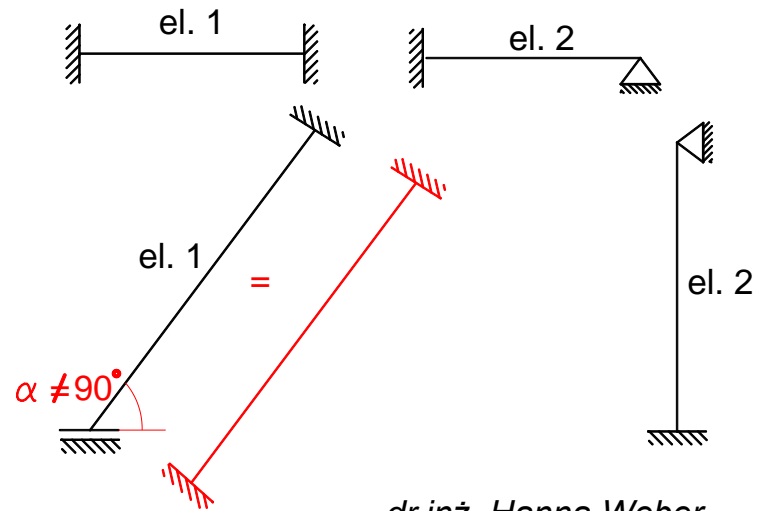
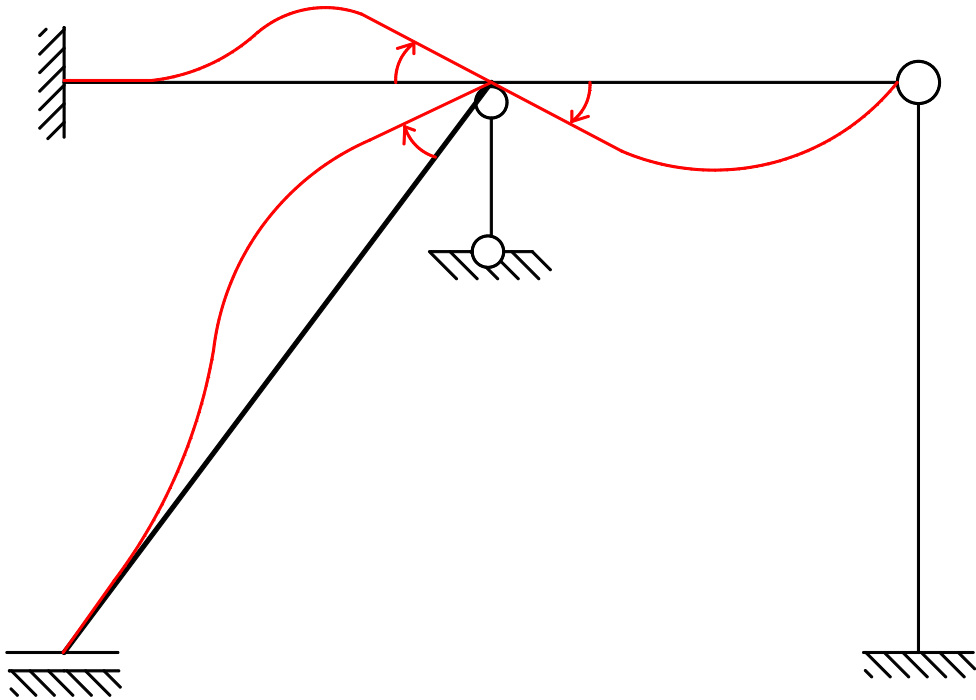
Podział na elementy:



Układ dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalny

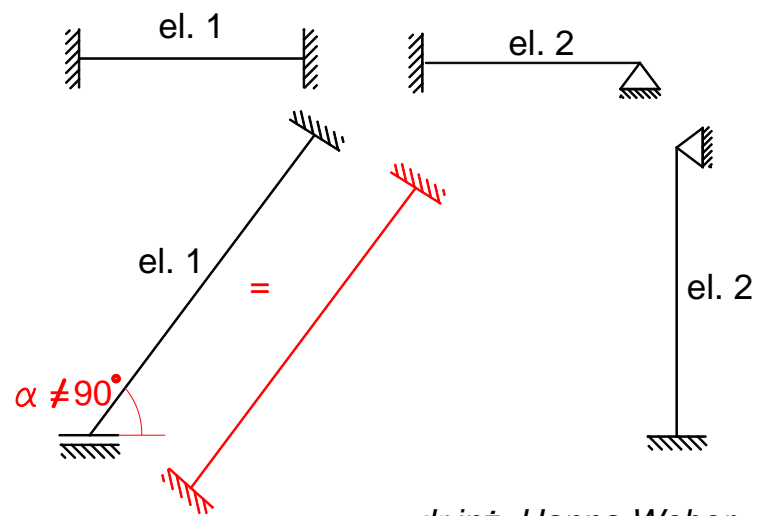
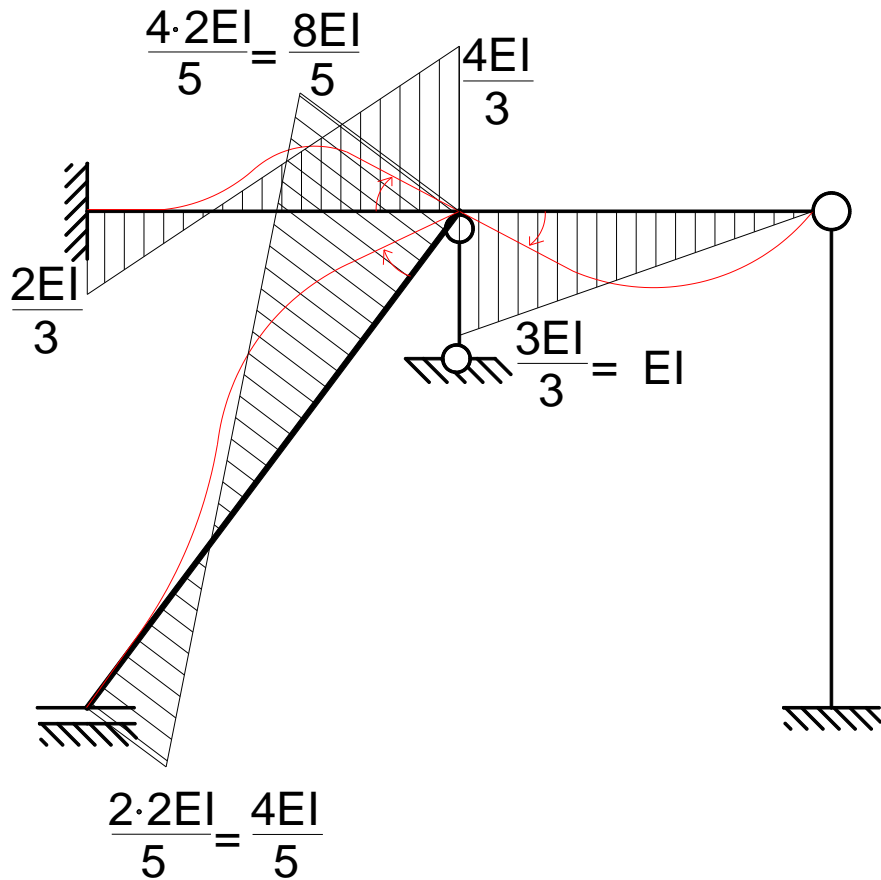
$$n_g = 2(\varphi 1, \Delta 2)$$

Stan $\varphi_1=1$



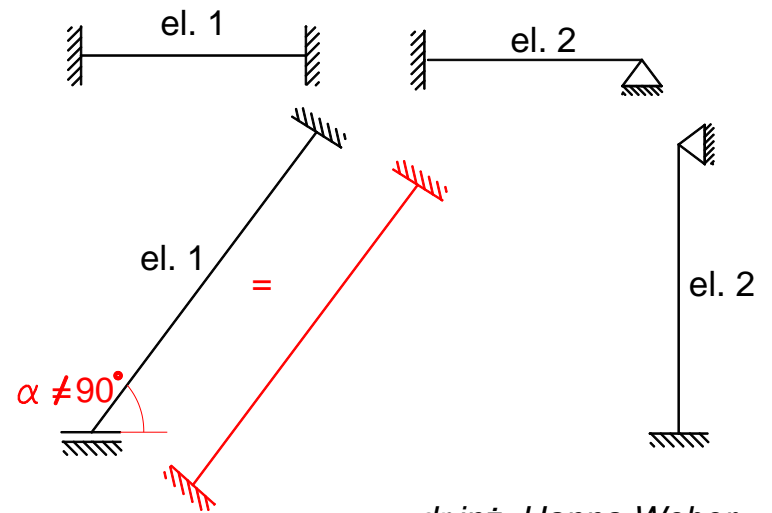
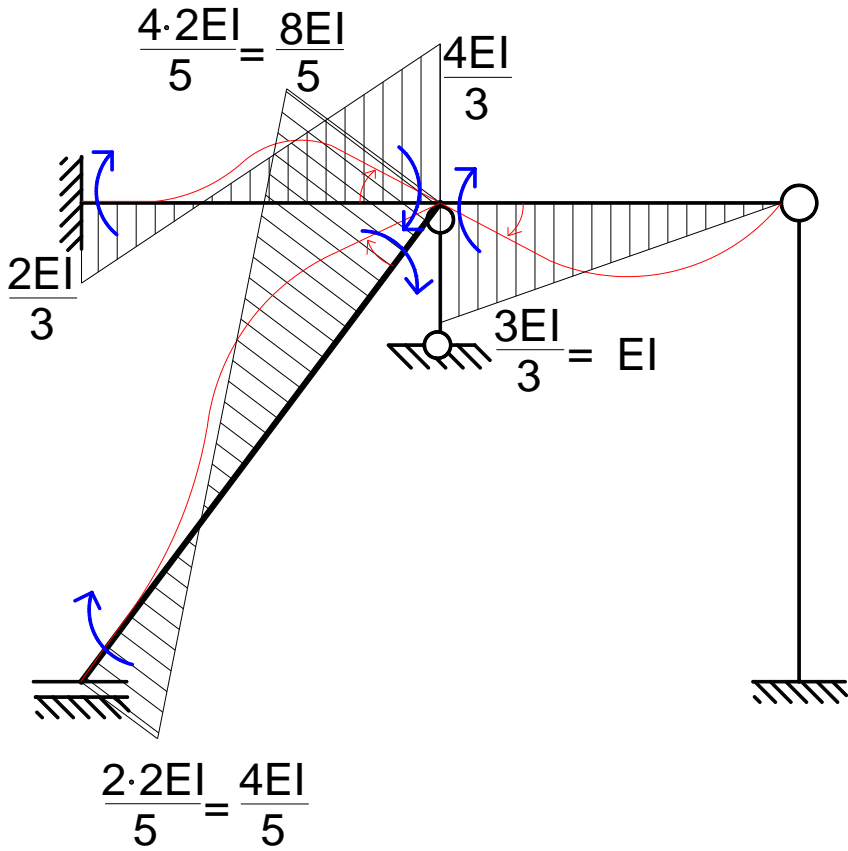
dr inż. Hanna Weber

Stan $\varphi_1=1$



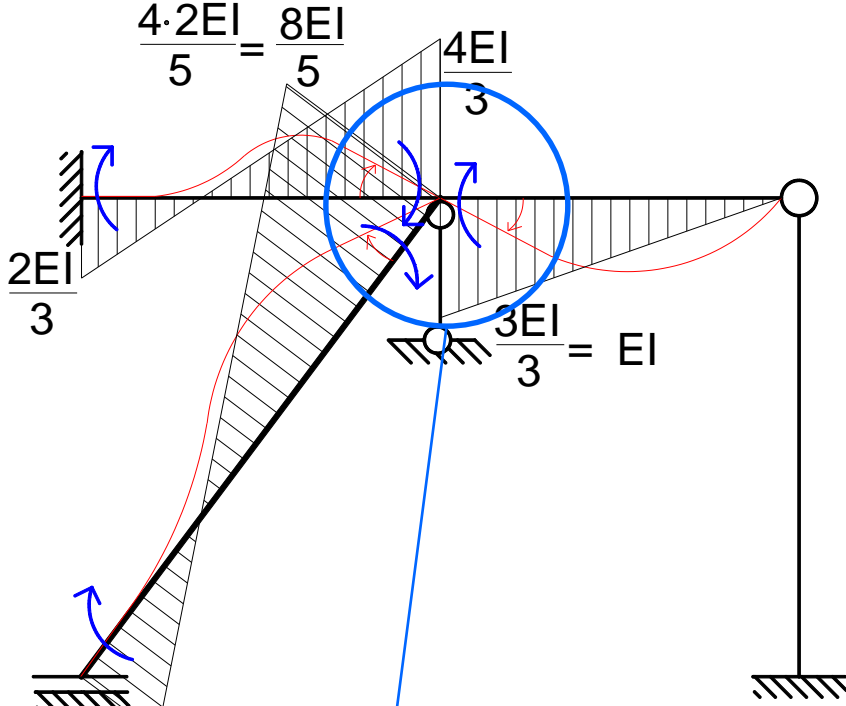
dr inž. Hanna Weber

Stan $\varphi_1=1$

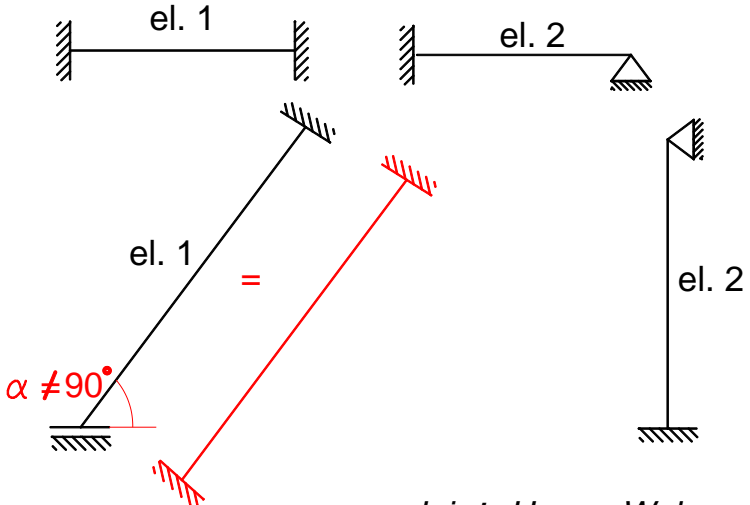


dr inž. Hanna Weber

Stan $\varphi_1=1$

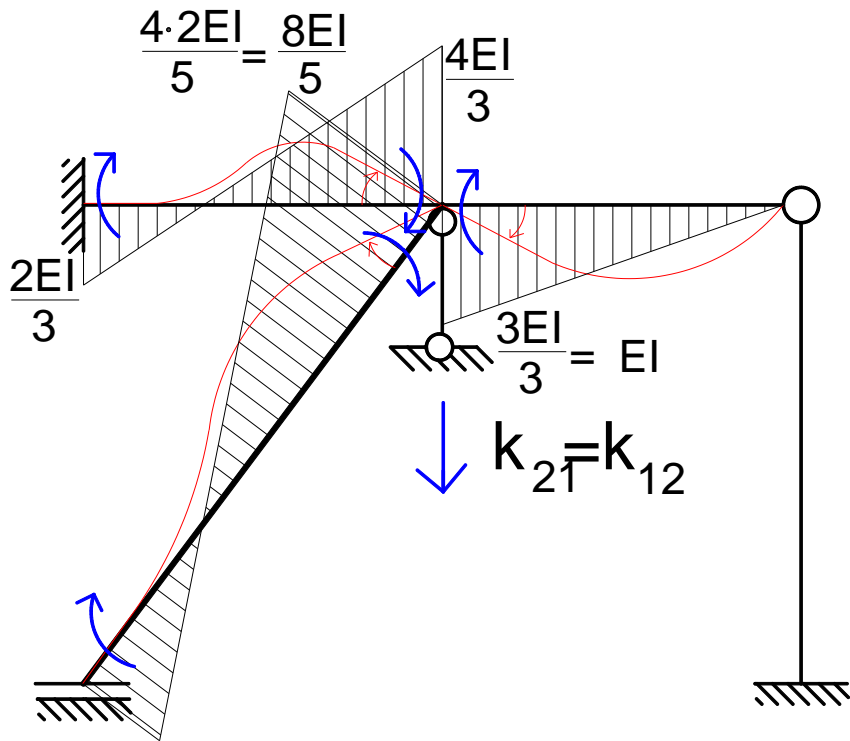


$$k_{11} = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{5} + EI = \frac{59EI}{15}$$

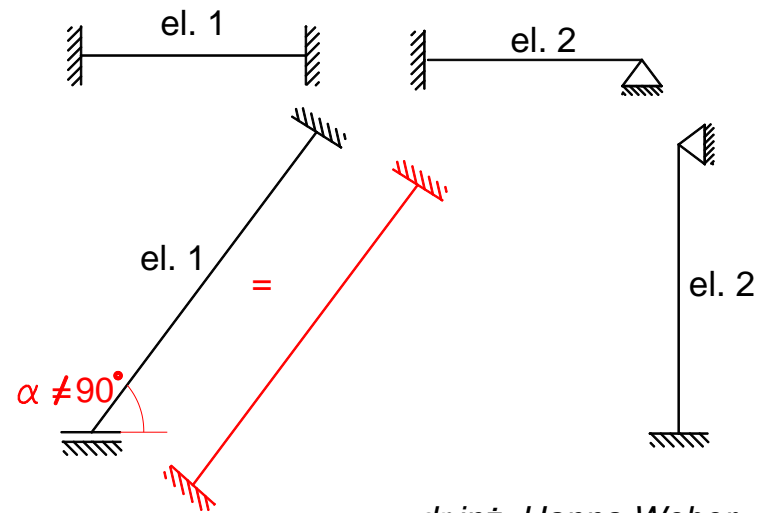


dr inż. Hanna Weber

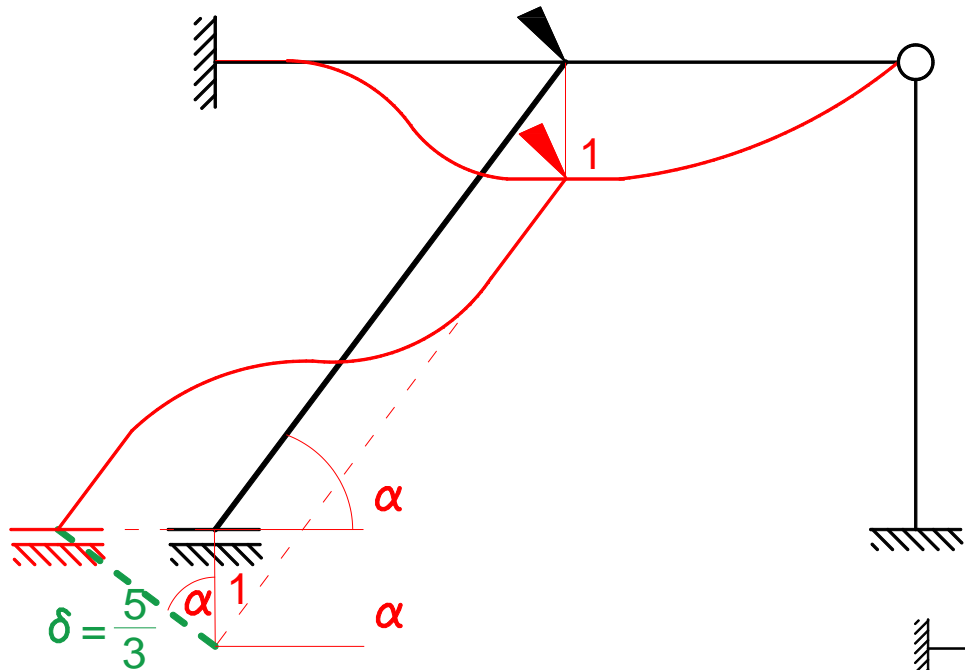
Stan $\varphi_1=1$



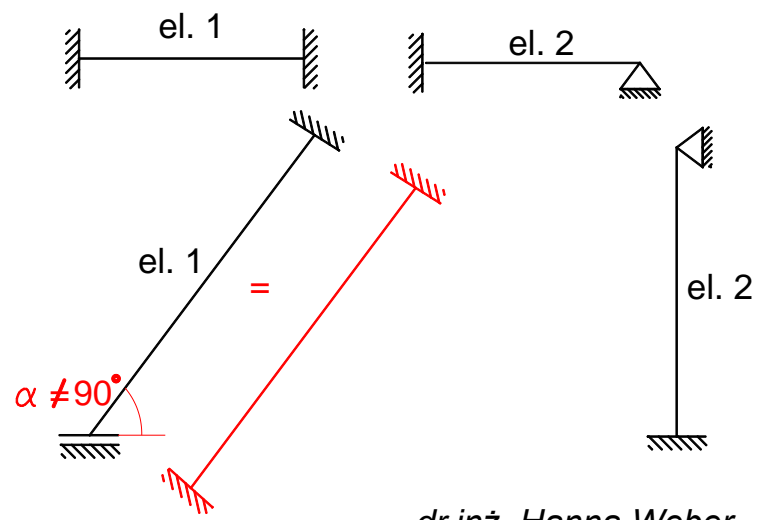
$$k_{11} = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{5} + EI = \frac{59EI}{15}$$



Stan $\Delta_2=1$

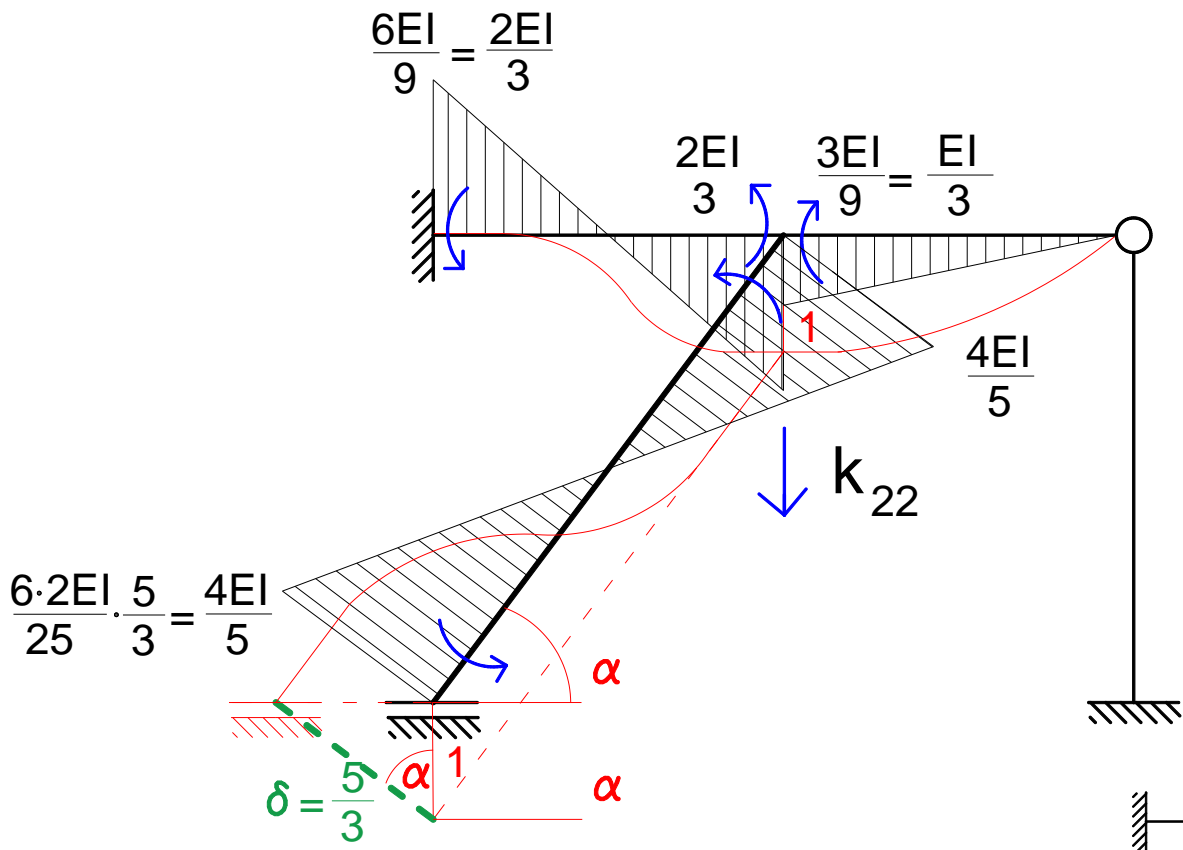


$$k_{11} = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{5} + EI = \frac{59EI}{15}$$

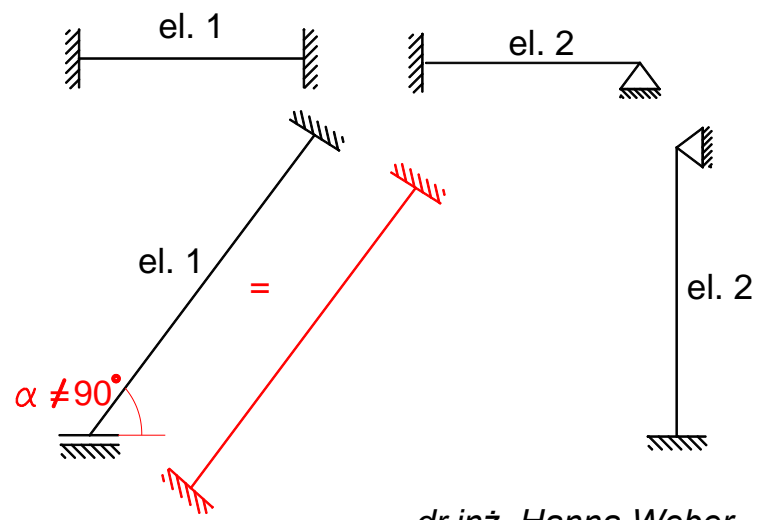


dr inż. Hanna Weber

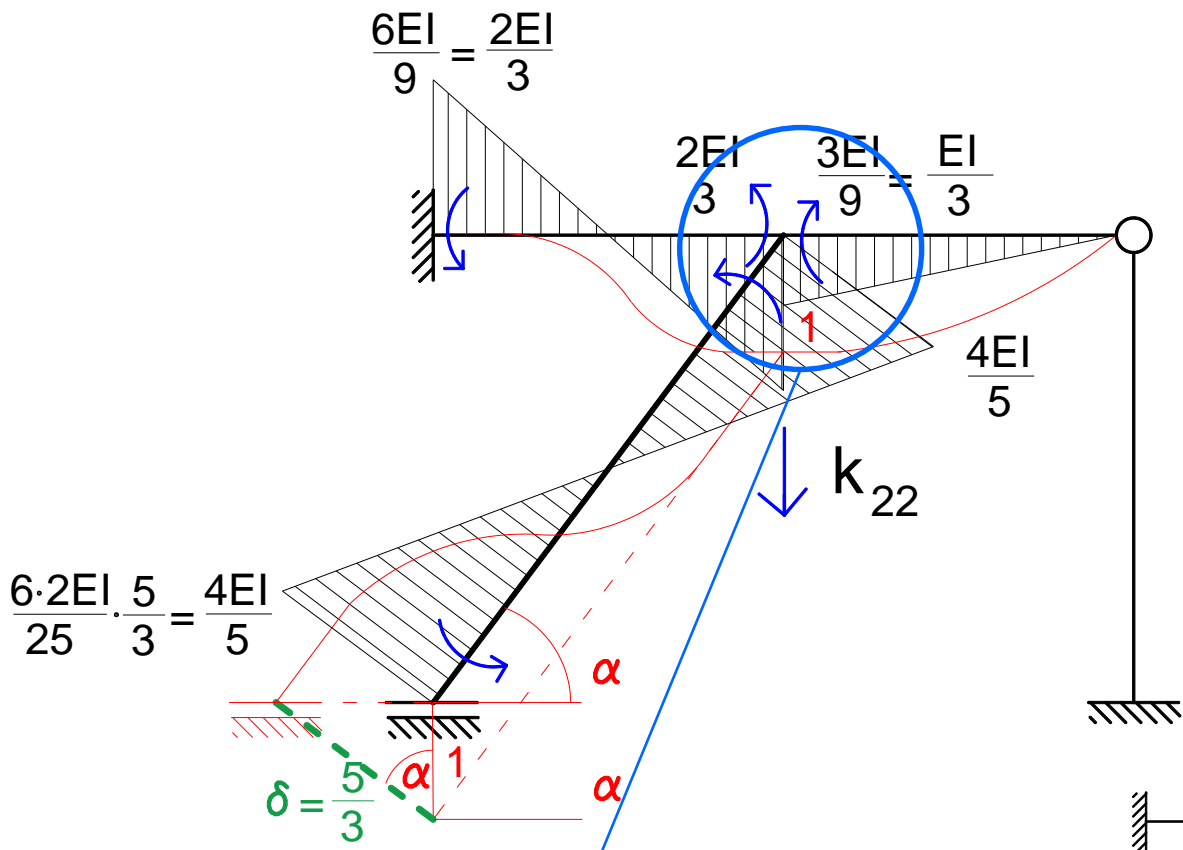
Stan $\Delta_2=1$



$$k_{11} = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{5} + EI = \frac{59EI}{15}$$

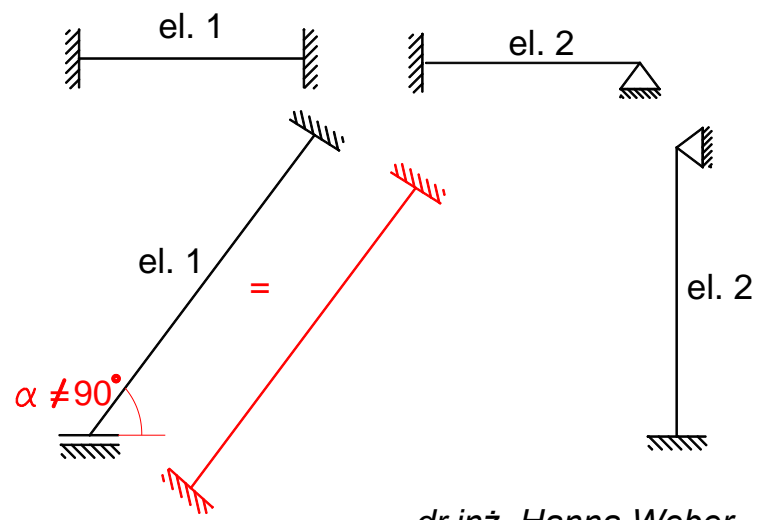


Stan $\Delta_2=1$

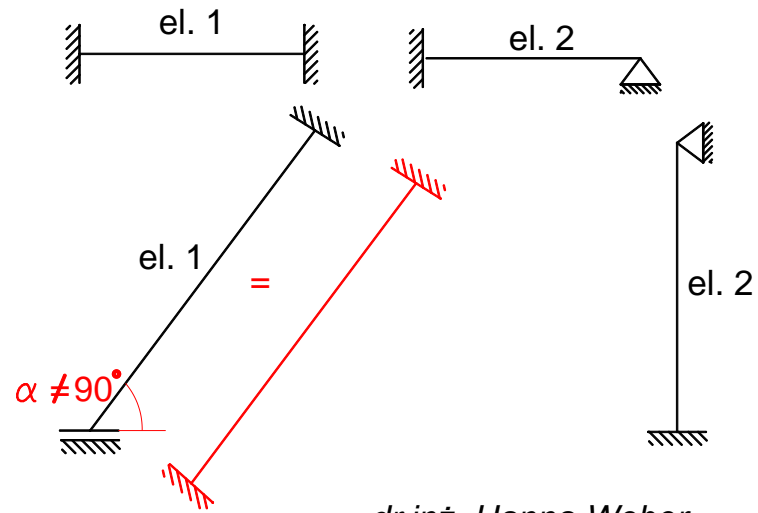
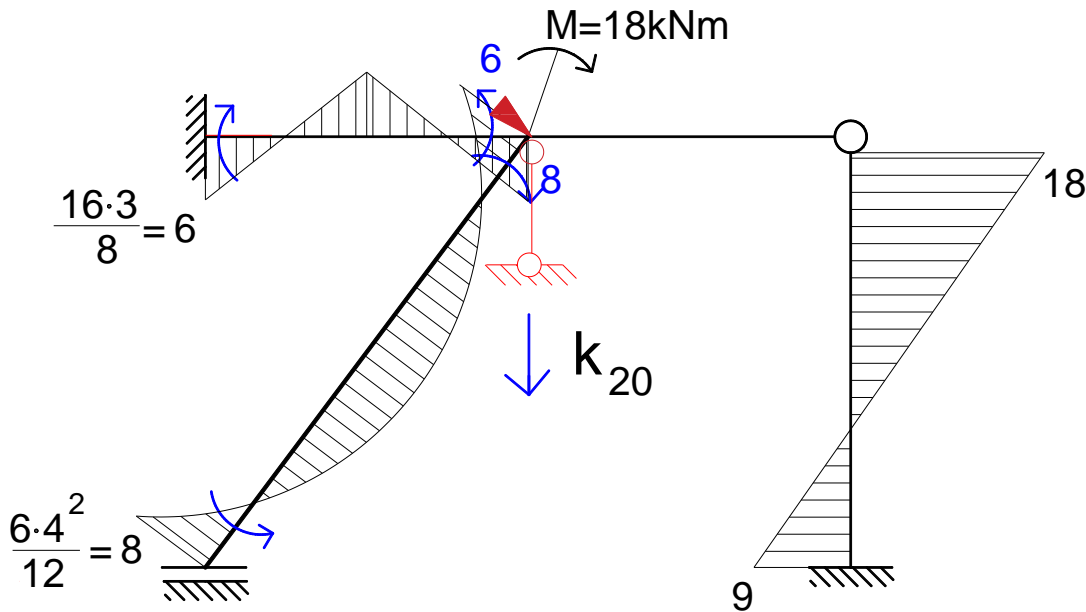
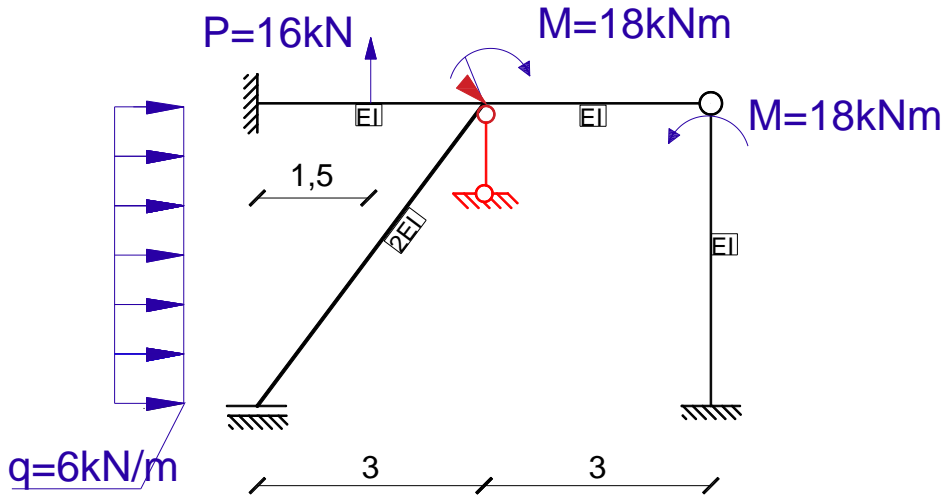


$$k_{11} = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{5} + EI = \frac{59EI}{15}$$

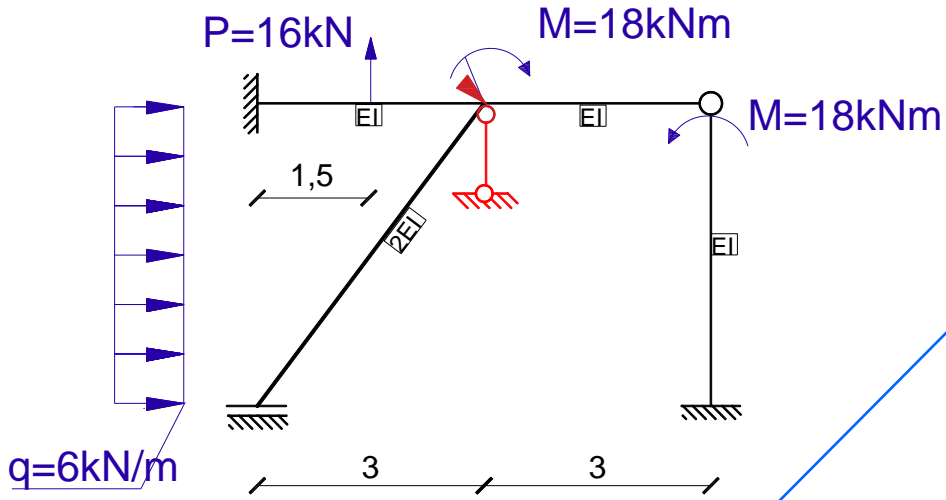
$$k_{12} = -\frac{2EI}{3} + \frac{EI}{3} - \frac{4EI}{5} = -\frac{17EI}{15}$$



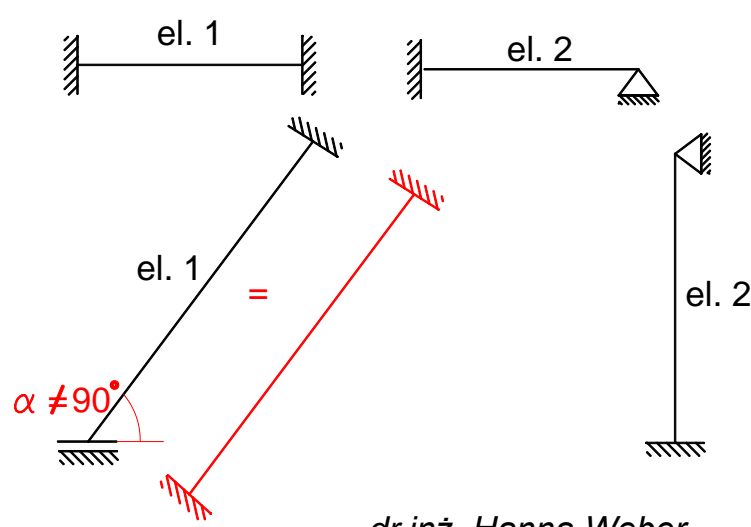
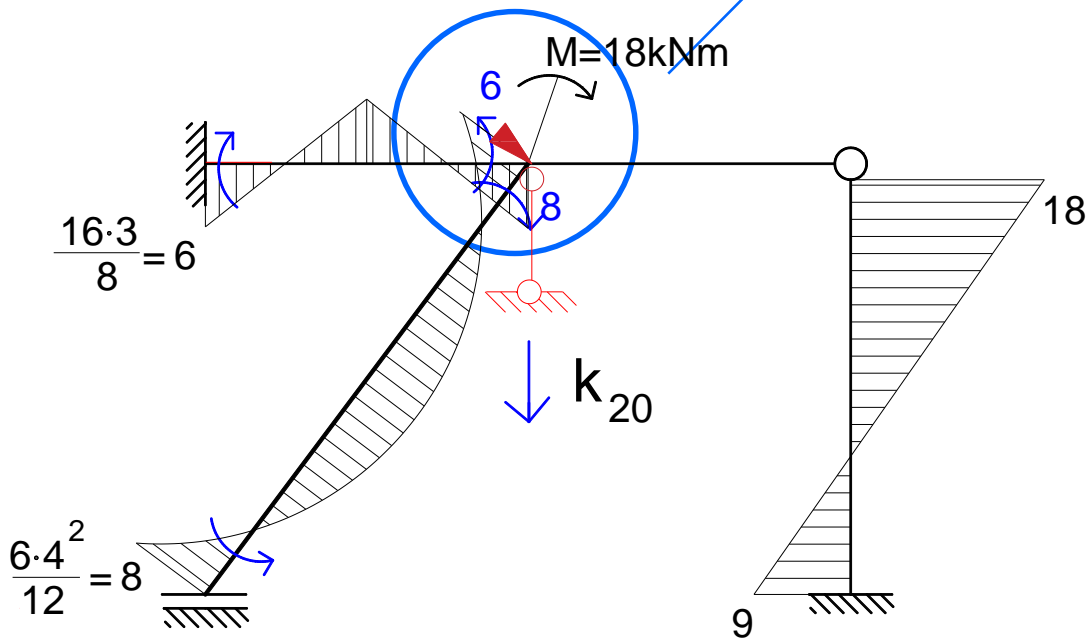
Obciążenie zewnętrzne



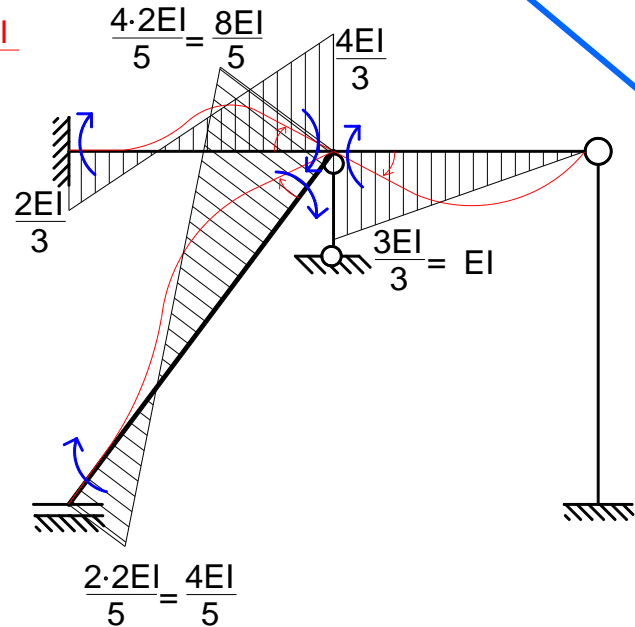
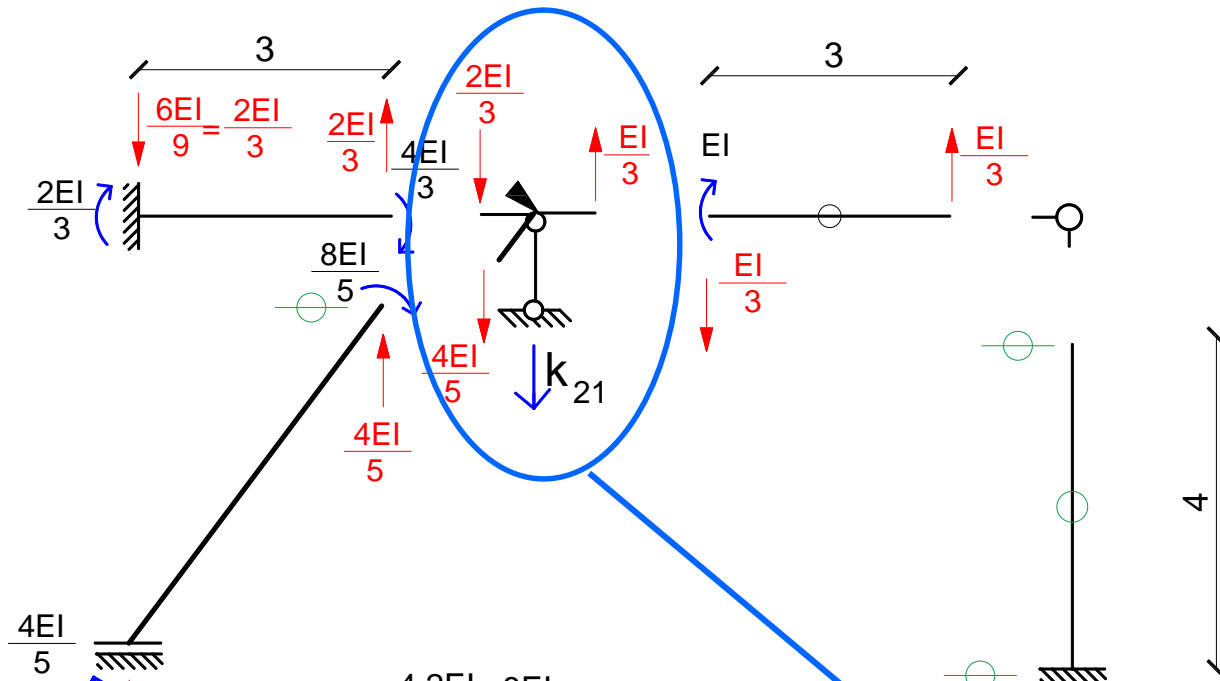
Obciążenie zewnętrzne



$$k_{10} = -6 + 8 - 18 = -16 \text{ kNm}$$



Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{21} , k_{22} , k_{20}

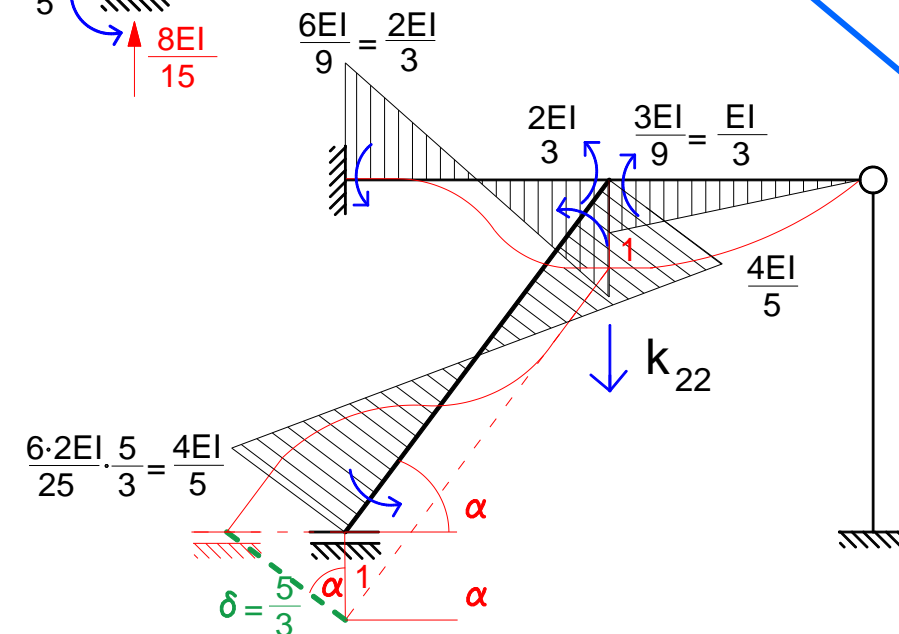
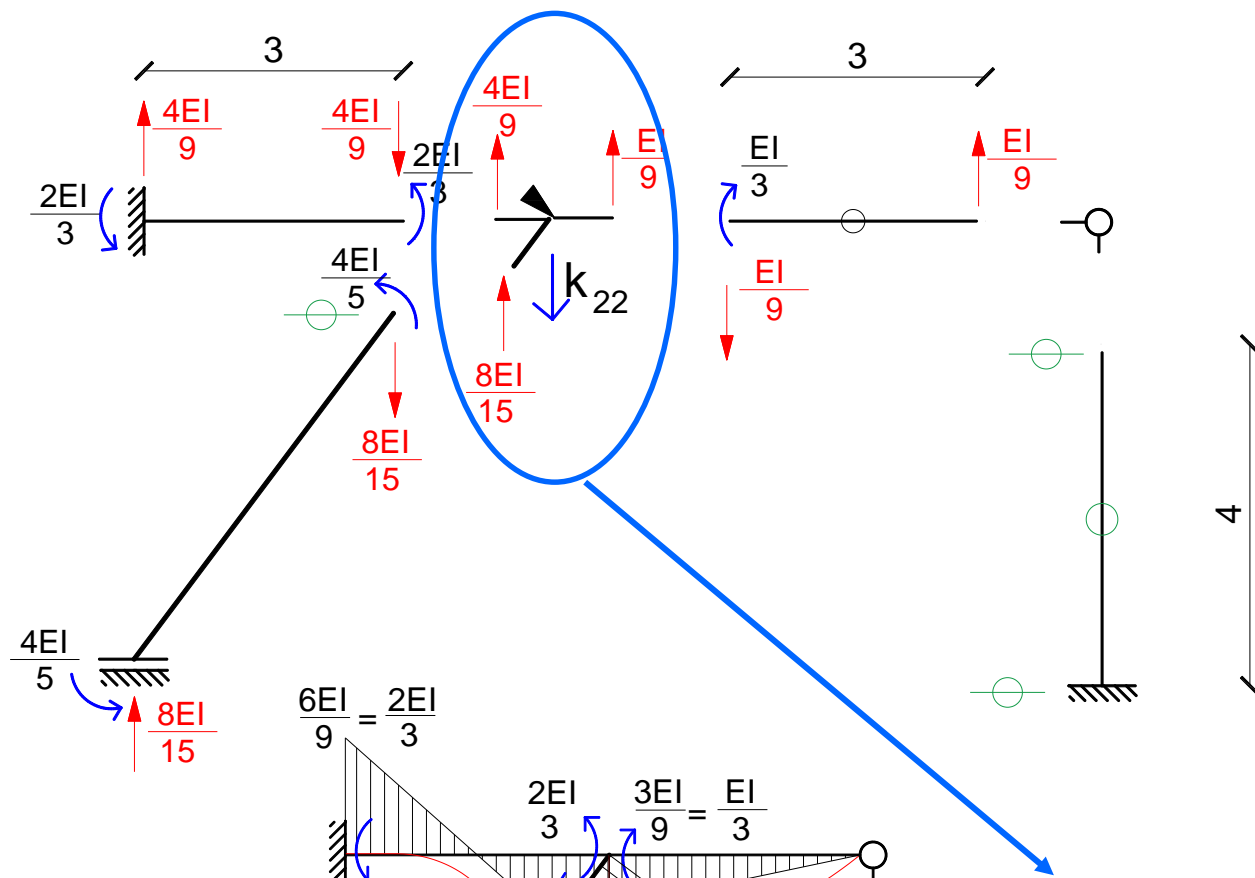


$$\sum R_y = -\frac{2EI}{3} + \frac{EI}{3} - \frac{4EI}{5} - k_{21} = 0$$

$$\downarrow$$

$$k_{21} = -\frac{17EI}{15} = k_{12}$$

Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{21} , k_{22} , k_{20}

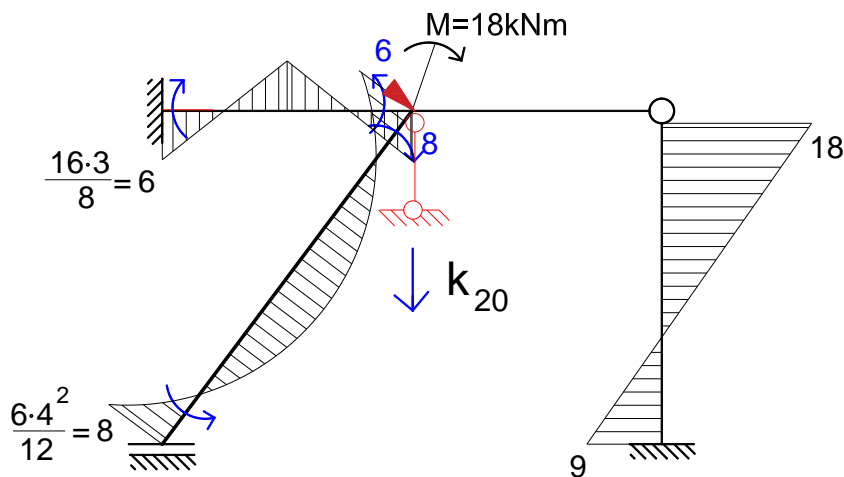
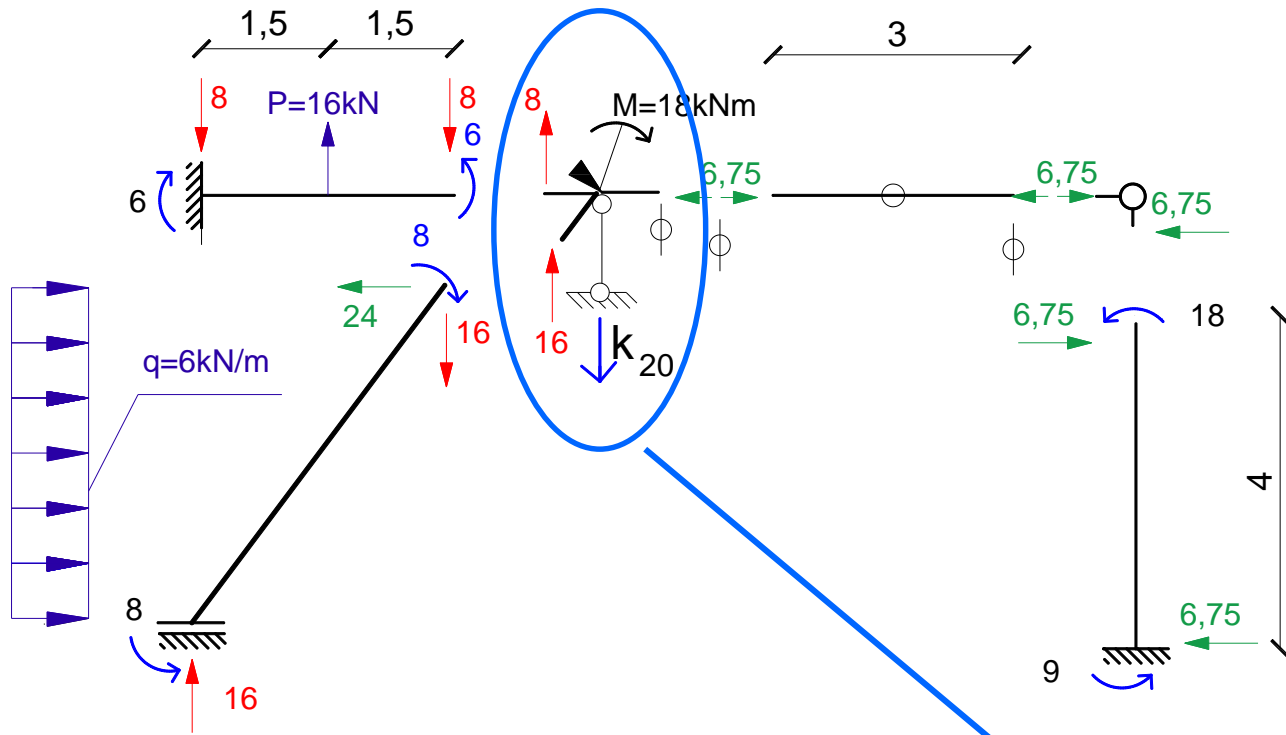


$$\sum R_y = \frac{4EI}{9} + \frac{EI}{9} + \frac{8EI}{15} - k_{22} = 0$$

$$k_{20} = \frac{49EI}{45}$$

dr inż. Hanna Weber

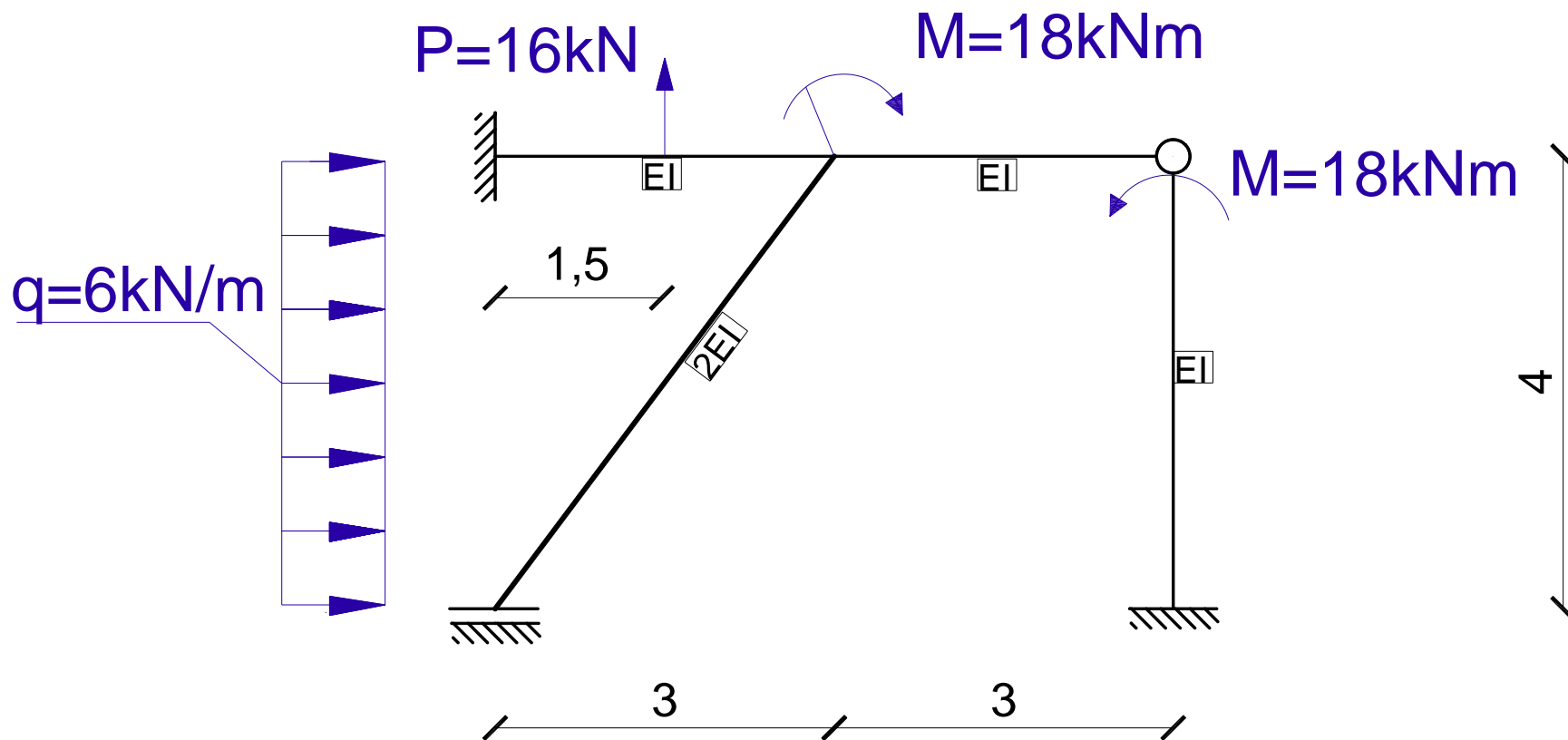
Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{21} , k_{22} , k_{20}



$$\sum R_y = 8 + 16 - k_{20} = 0$$

$$k_{20} = 24kN$$

Zadanie 2: Wykorzystując wyniki z zadania 1 narysuj końcowy wykres momentów dla ramy statycznie niewyznaczalnej i wykonaj sprawdzenie poprawności wykresu korzystając z twierdzenia redukcyjnego.



Układ równań metody przemieszczeń:

$$k_{11}\varphi_1 + k_{12}\Delta_2 + k_{10} = 0$$

$$k_{21}\varphi_1 + k_{22}\Delta_2 + k_{10} = 0$$

Podstawiając wyliczone wcześniej wartości otrzymujemy:

$$\frac{59EI}{15}\varphi_1 - \frac{17EI}{15}\Delta_2 - 16 = 0$$

$$-\frac{17EI}{15}\varphi_1 + \frac{49EI}{45}\Delta_2 + 24 = 0$$

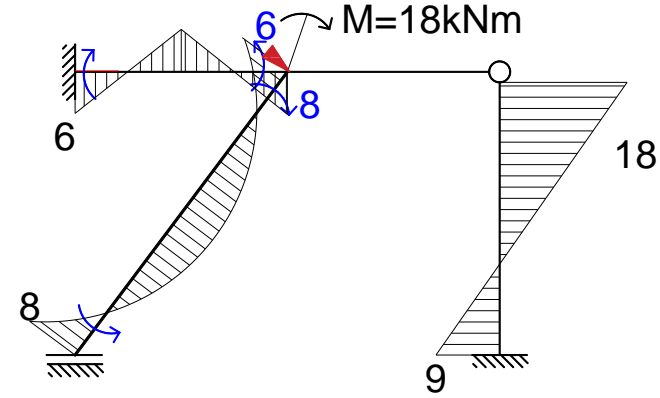
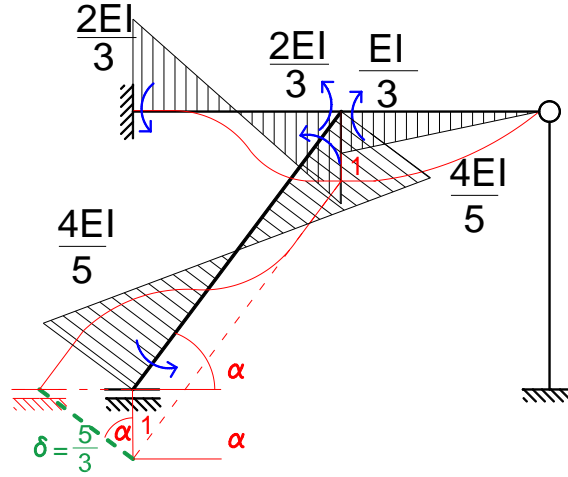
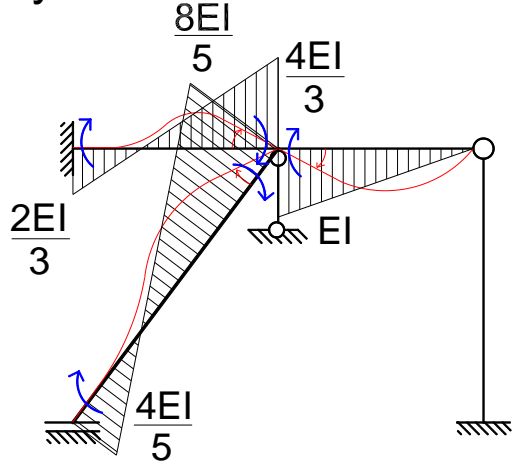
Rozwiązanie układu równań:

$$\varphi_1 = \frac{-3,261}{EI}$$

$$\Delta_2 = \frac{-25,435}{EI}$$

Wyznaczenie momentów na końcach elementów:

$$\varphi_1 = \frac{-3,261}{EI} \quad \Delta_2 = \frac{-25,435}{EI}$$



$$M_i = M_i^{\varphi_1=1} \cdot \varphi_1 + M_i^{\Delta_2=1} \cdot \Delta_2 + M_i^{obc.zewn.}$$

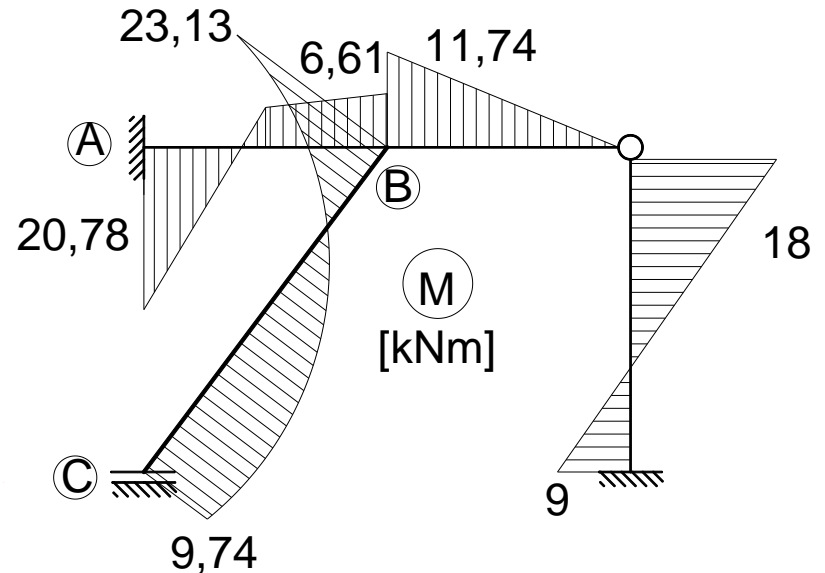
$$M_A = \frac{2EI}{3} \cdot \frac{(-3,261)}{EI} - \frac{2EI}{3} \cdot \frac{(-25,435)}{EI} + 6 = 20,78 \text{ kNm}$$

$$M_{BL} = \frac{4EI}{3} \cdot \frac{(-3,261)}{EI} - \frac{2EI}{3} \cdot \frac{(-25,435)}{EI} - 6 = 6,61 \text{ kNm}$$

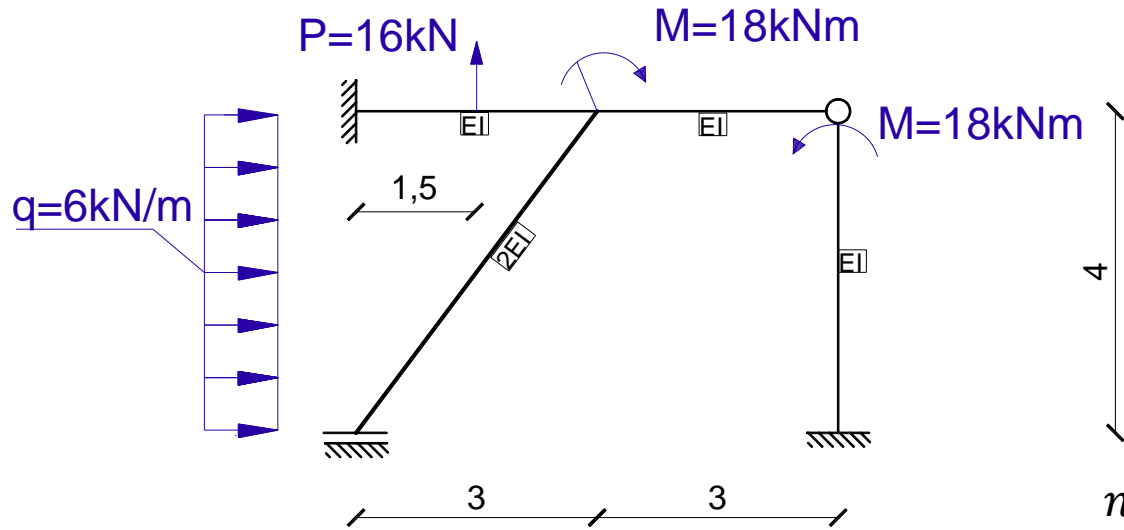
$$M_{Bp} = EI \cdot \frac{(-3,261)}{EI} + \frac{EI}{3} \cdot \frac{(-25,435)}{EI} = -11,74 \text{ kNm}$$

$$M_{BD} = \frac{8EI}{5} \cdot \frac{(-3,261)}{EI} - \frac{4EI}{5} \cdot \frac{(-25,435)}{EI} + 8 = 23,13 \text{ kNm}$$

$$M_C = \frac{4EI}{5} \cdot \frac{(-3,261)}{EI} - \frac{4EI}{5} \cdot \frac{(-25,435)}{EI} - 8 = 9,74 \text{ kNm}$$



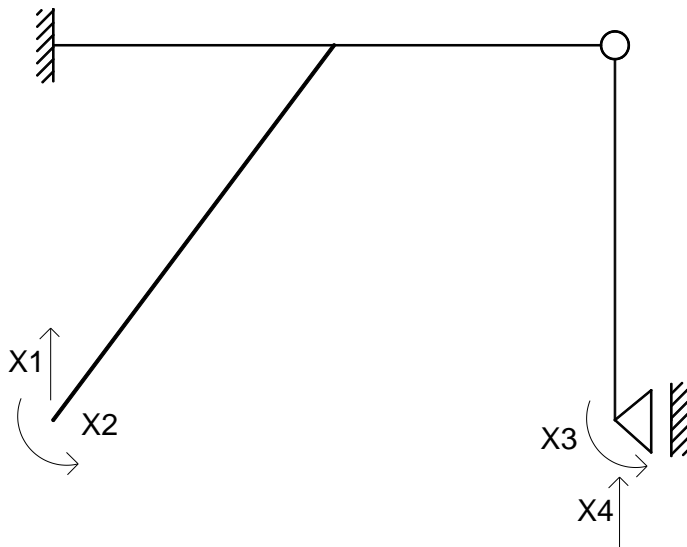
Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności ramy:



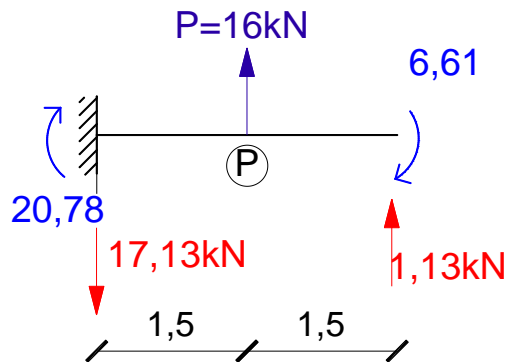
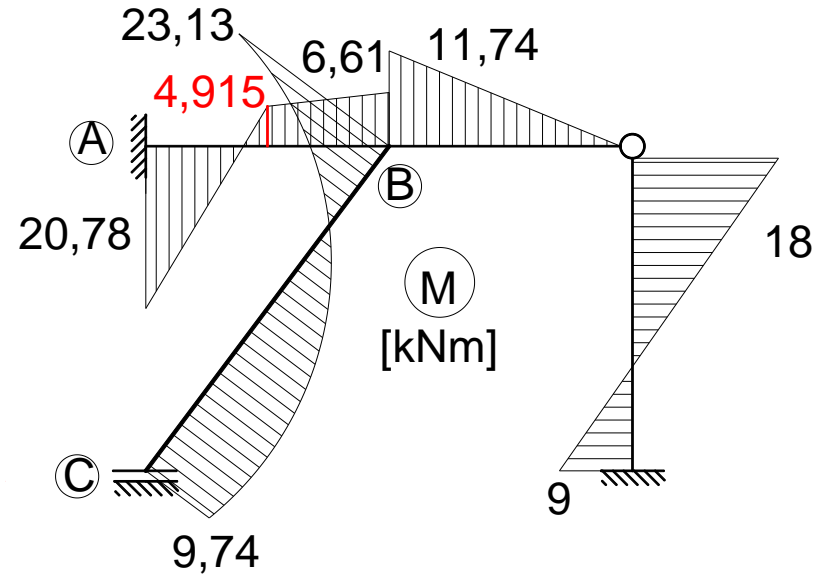
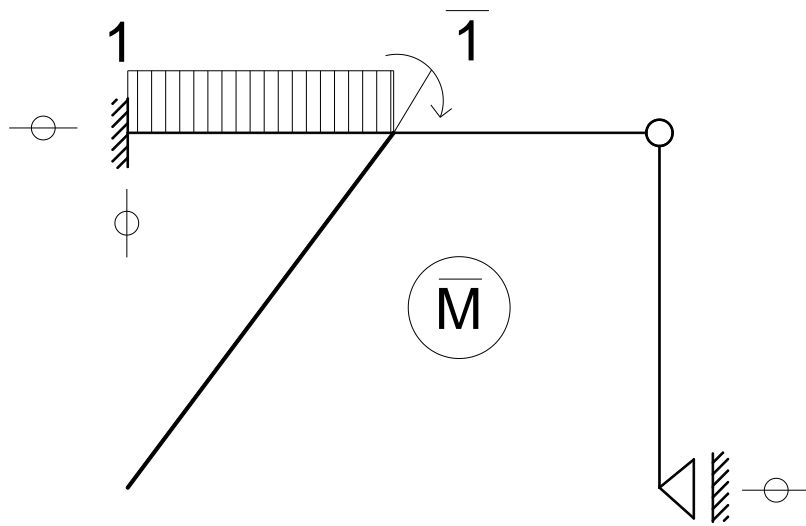
$$n_s = lr - lp - 3 = 8 - 1 - 3 = 4$$

Rama czterokrotnie statycznie niewyznaczalna.

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

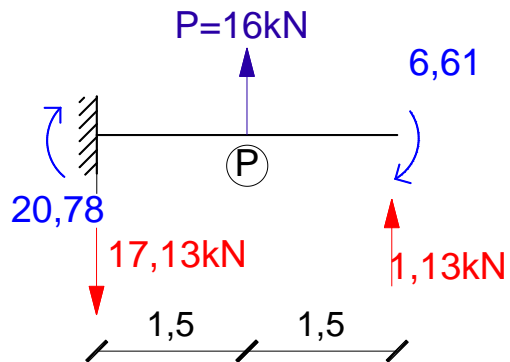
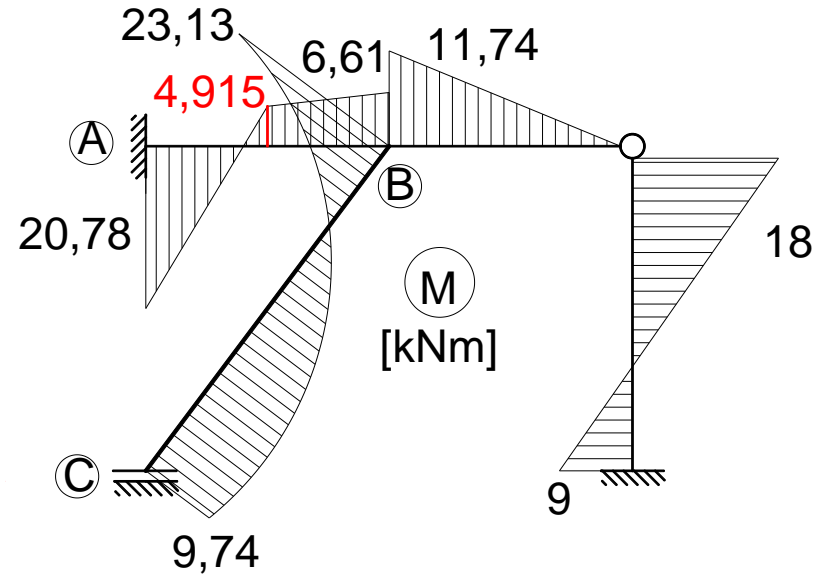
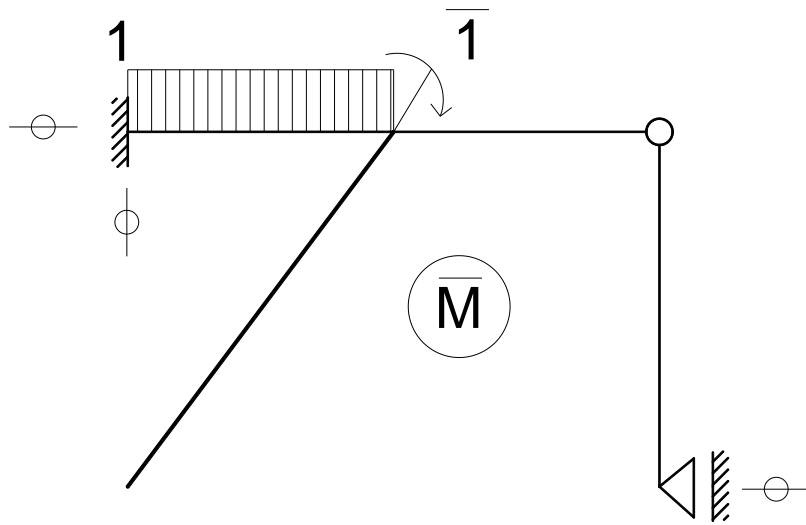


Sprawdzenie z twierdzenia redukcyjnego:



$$M_P = 20,78 - 17,13 \cdot 1,5 = -4,915 \text{ kNm}$$

Sprawdzenie z twierdzenia redukcyjnego:

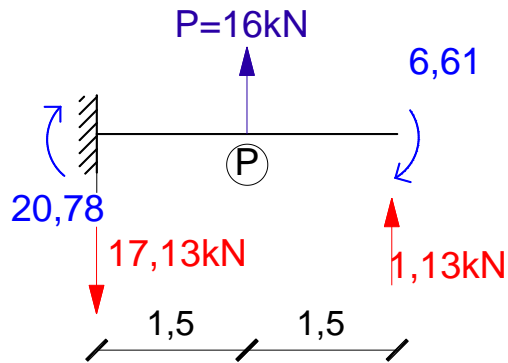
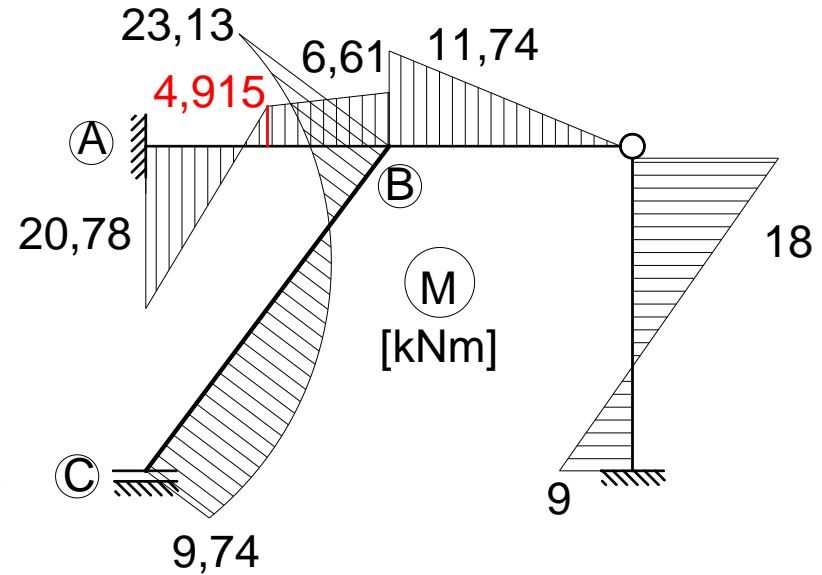
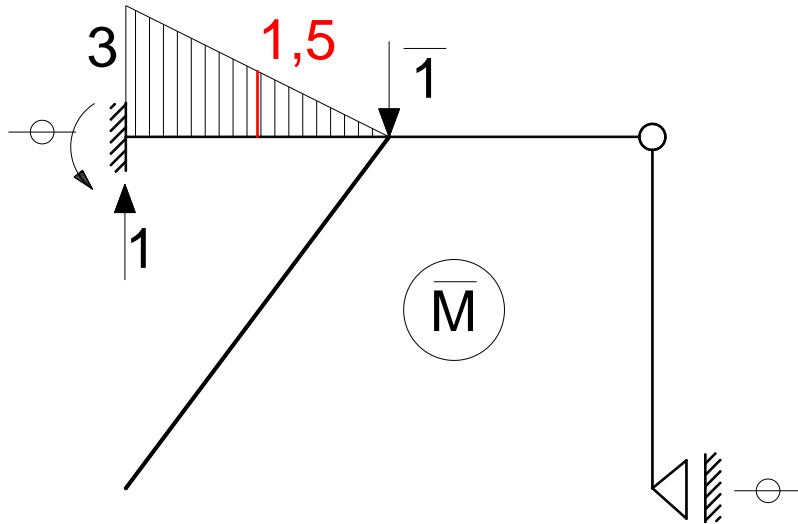


$$\varphi_B = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 20,78 \cdot 1,5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4,915 \cdot 1,5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4,915 \cdot 1,5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6,61 \cdot 1,5 \cdot 1 \right)$$

$$M_P = 20,78 - 17,13 \cdot 1,5 = -4,915 \text{ kNm}$$

$$\varphi_B = \frac{-3,26}{EI} = \varphi_1$$

Sprawdzenie z twierdzenia redukcyjnego:

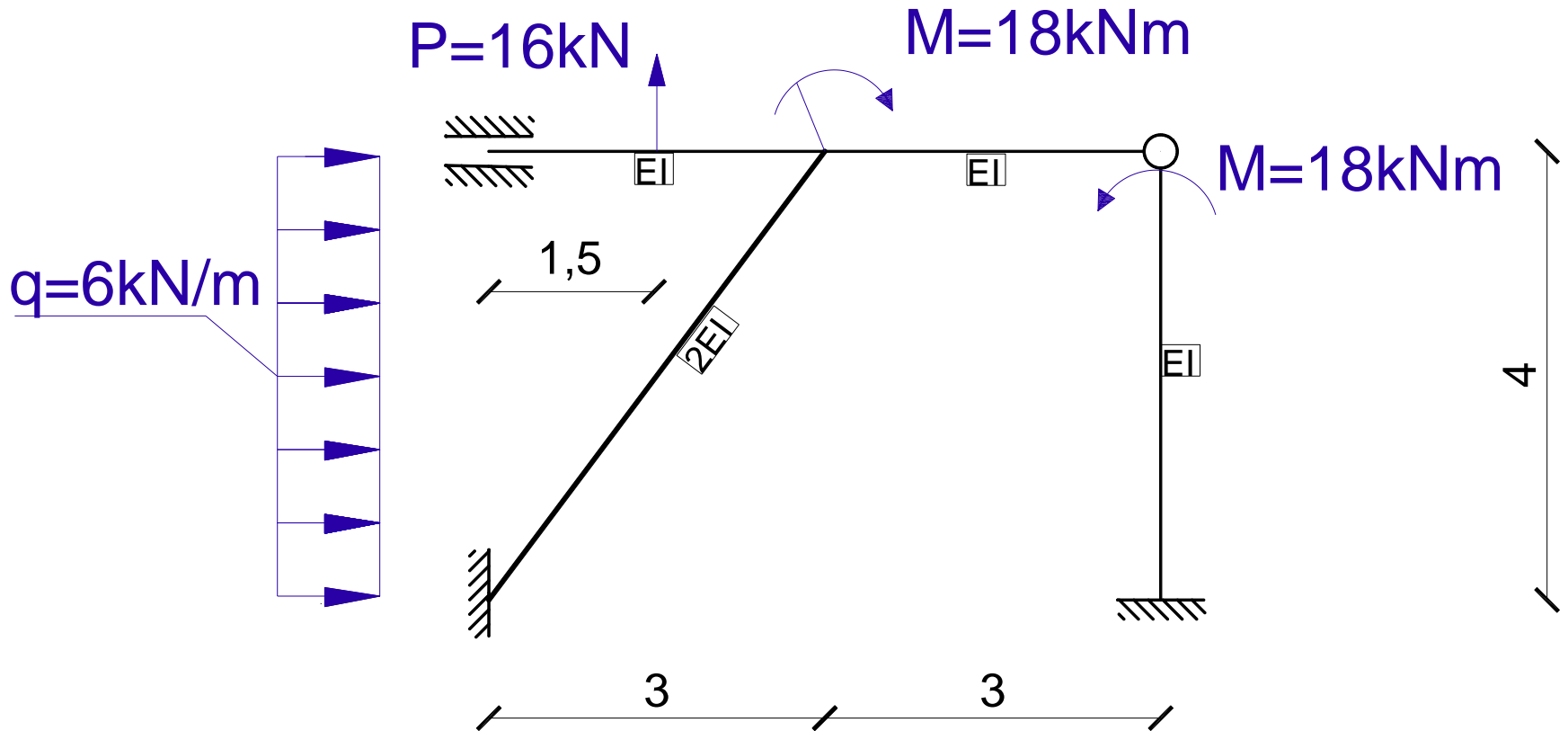


$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \cdot 20,78 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) + \\ & \frac{1}{2} \cdot 4,915 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \\ & \frac{1}{2} \cdot 4,915 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 6,61 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 \end{aligned} \right)$$

$$M_P = 20,78 - 17,13 \cdot 1,5 = -4,915 \text{ kNm}$$

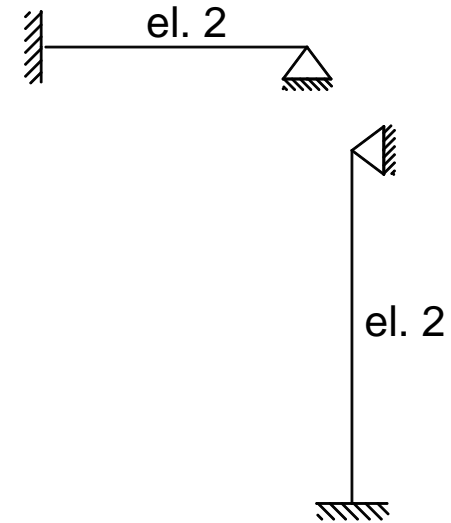
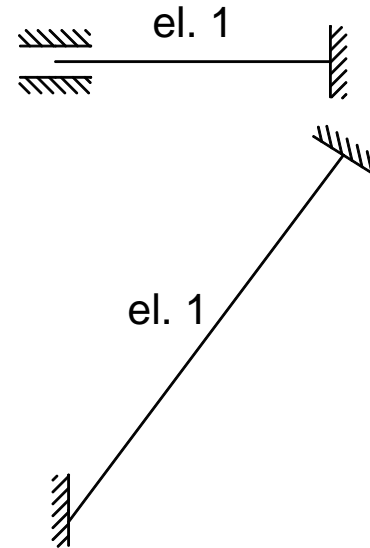
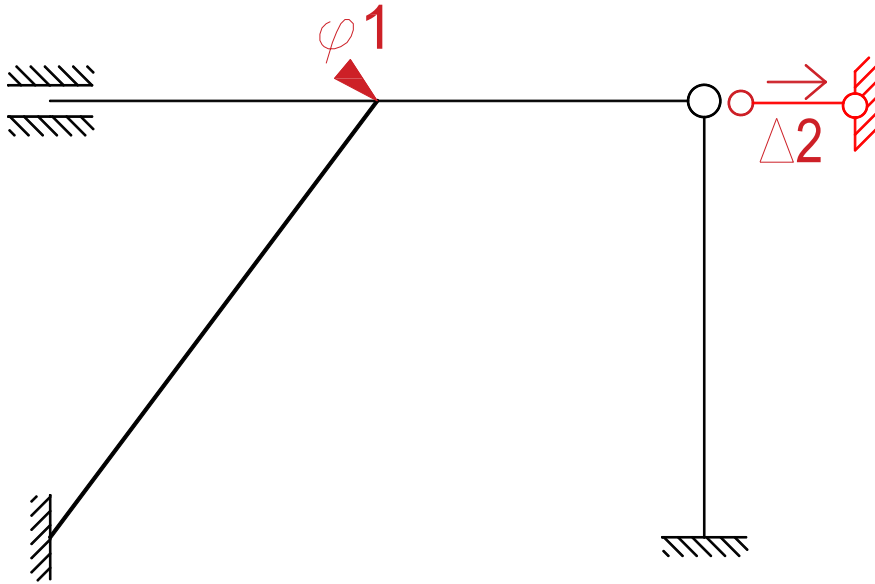
$$\Delta_B = \frac{-25,43}{EI} \sim \Delta_2$$

Zadanie 3: Wyznaczyć współczynniki układu równań metody przemieszczeń.
Zadanie rozwiązać w minimalnej bazie niewiadomych.



Schemat podstawowy geometrycznie wyznaczalny

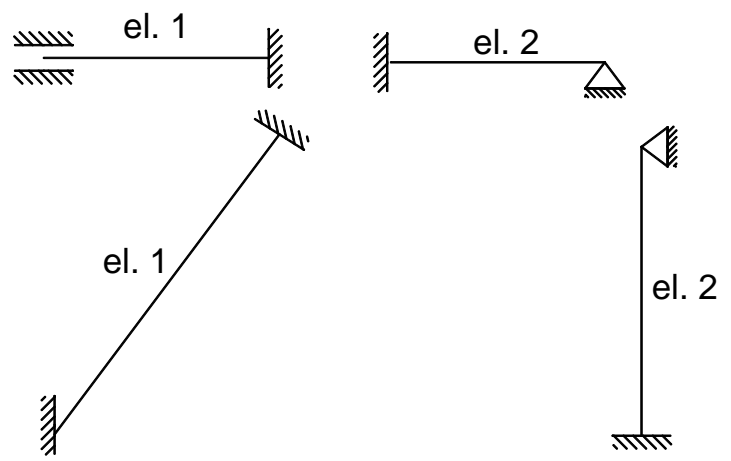
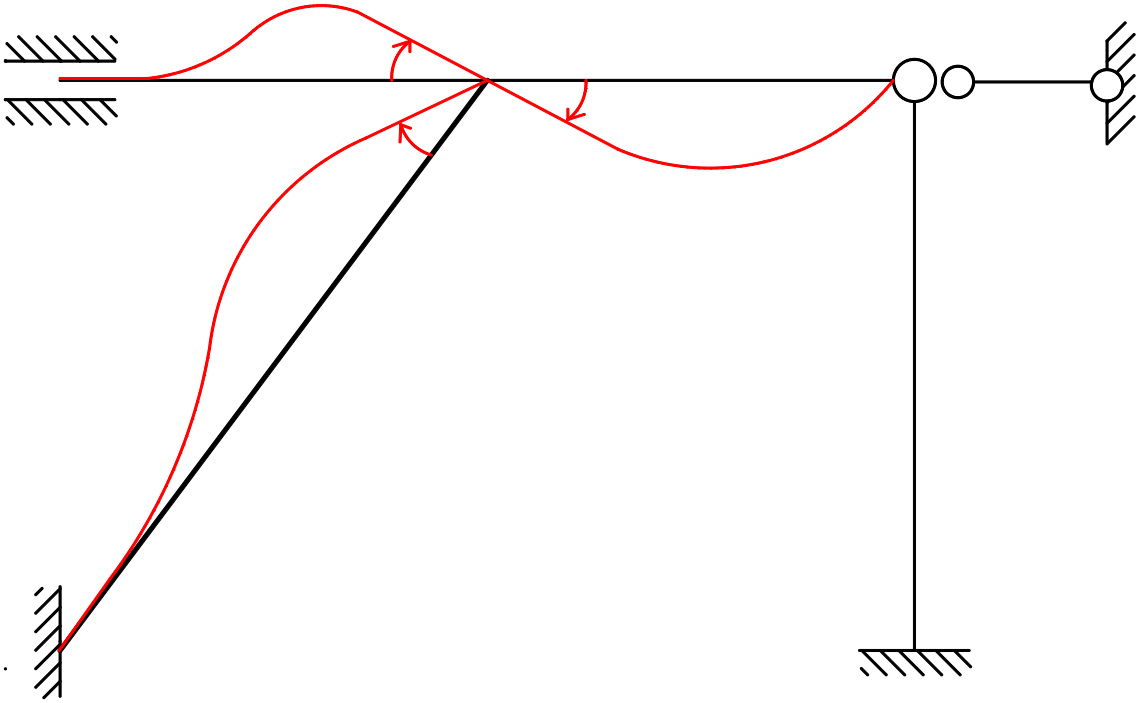
Podział na elementy:



Układ dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalny

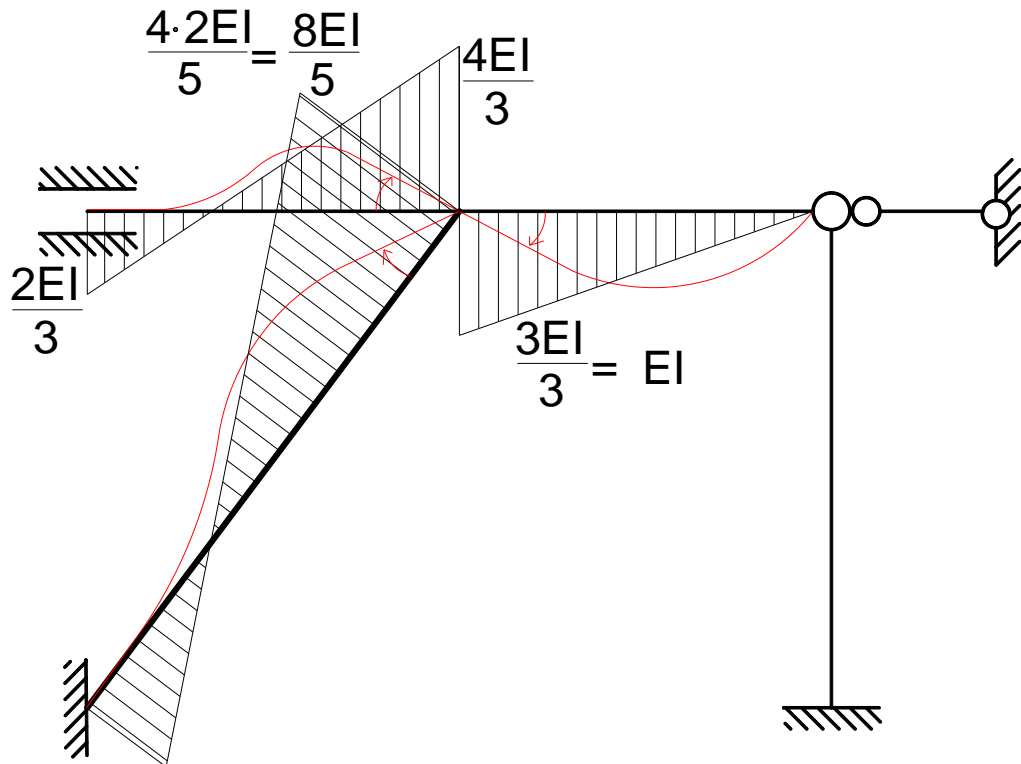
$$n_g = 2(\varphi 1, \Delta 2)$$

Stan $\varphi_1=1$



dr inž. Hanna Weber

Stan $\varphi_1=1$



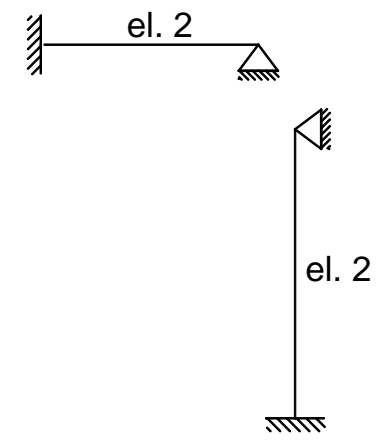
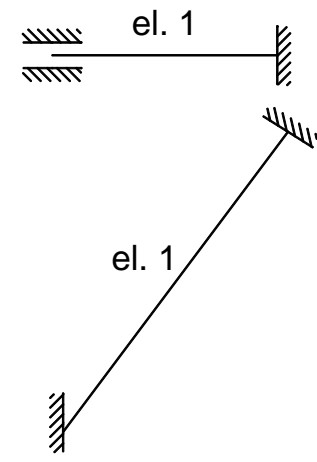
$$\frac{4 \cdot 2EI}{5} = \frac{8EI}{5}$$

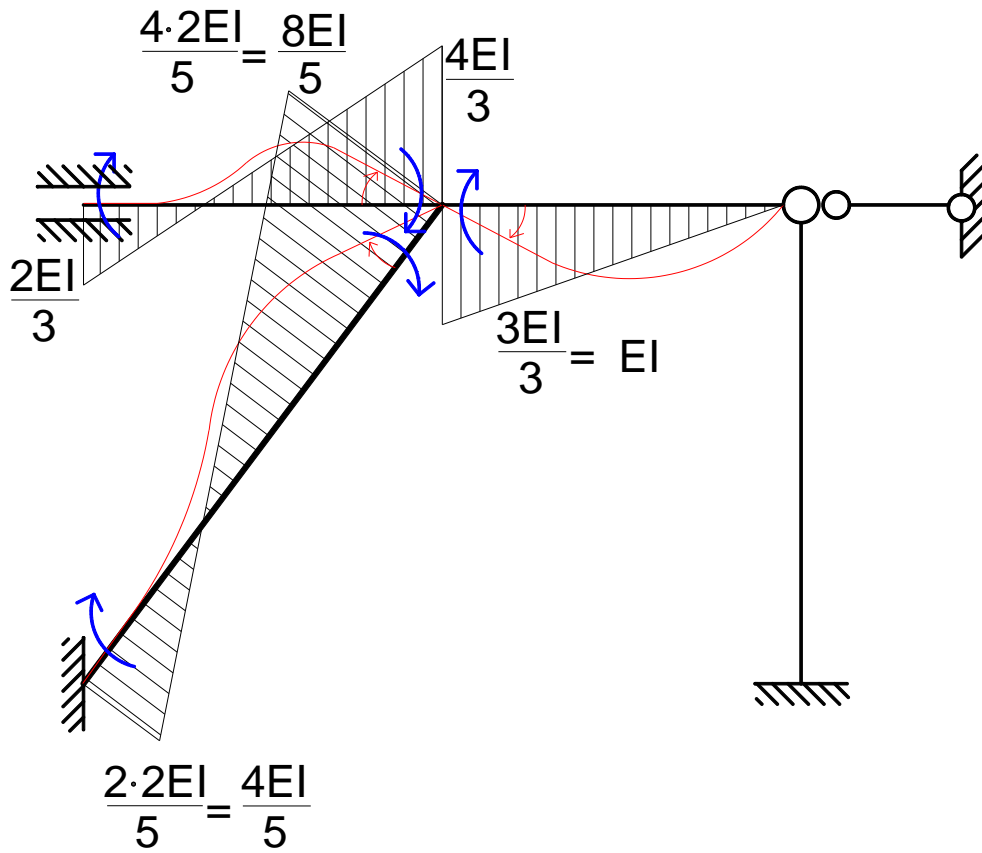
$$\frac{4EI}{3}$$

$$\frac{2EI}{3}$$

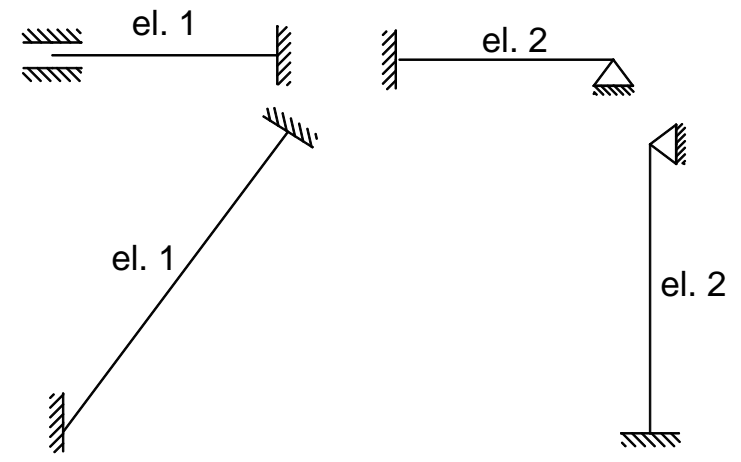
$$\frac{3EI}{3} = EI$$

$$\frac{2 \cdot 2EI}{5} = \frac{4EI}{5}$$

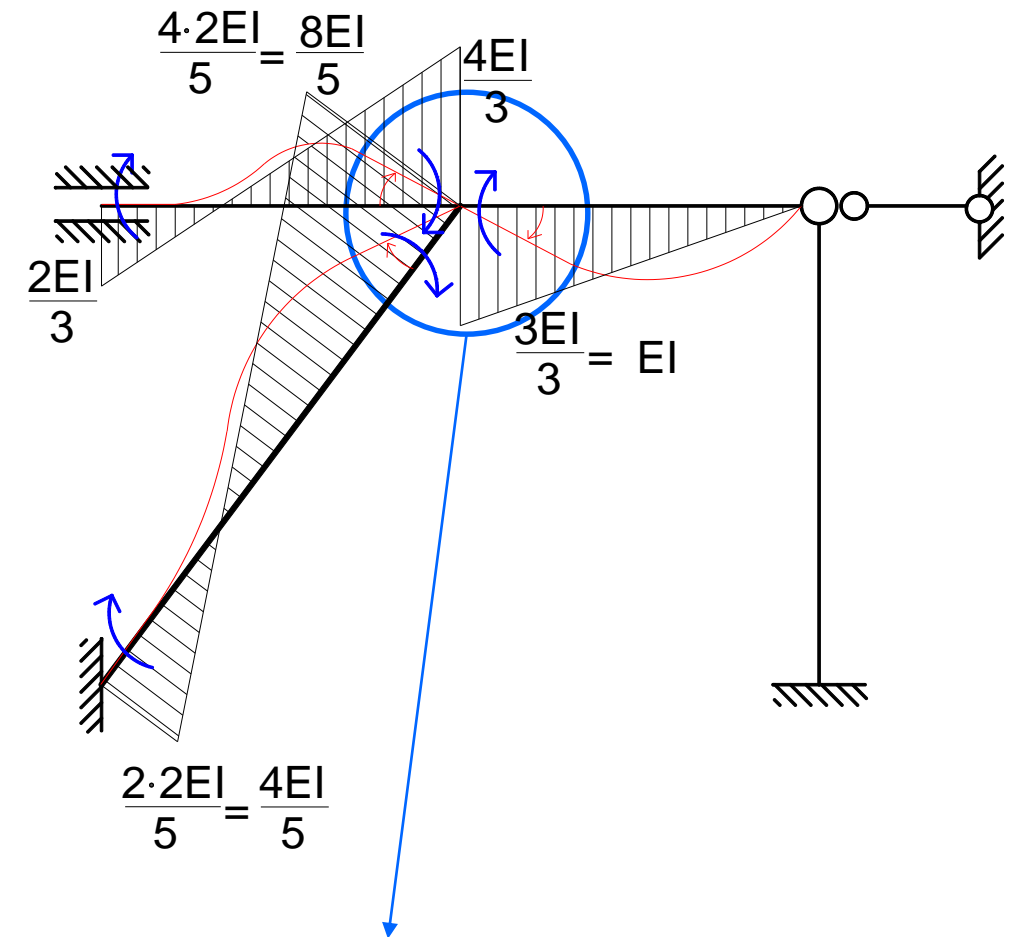




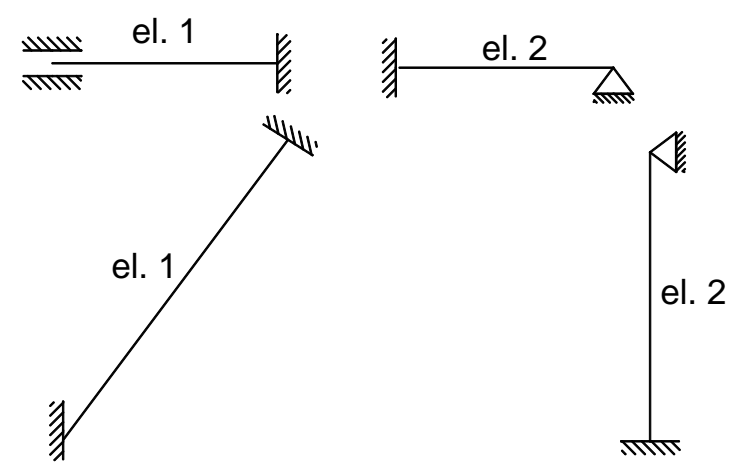
Stan $\varphi_1=1$



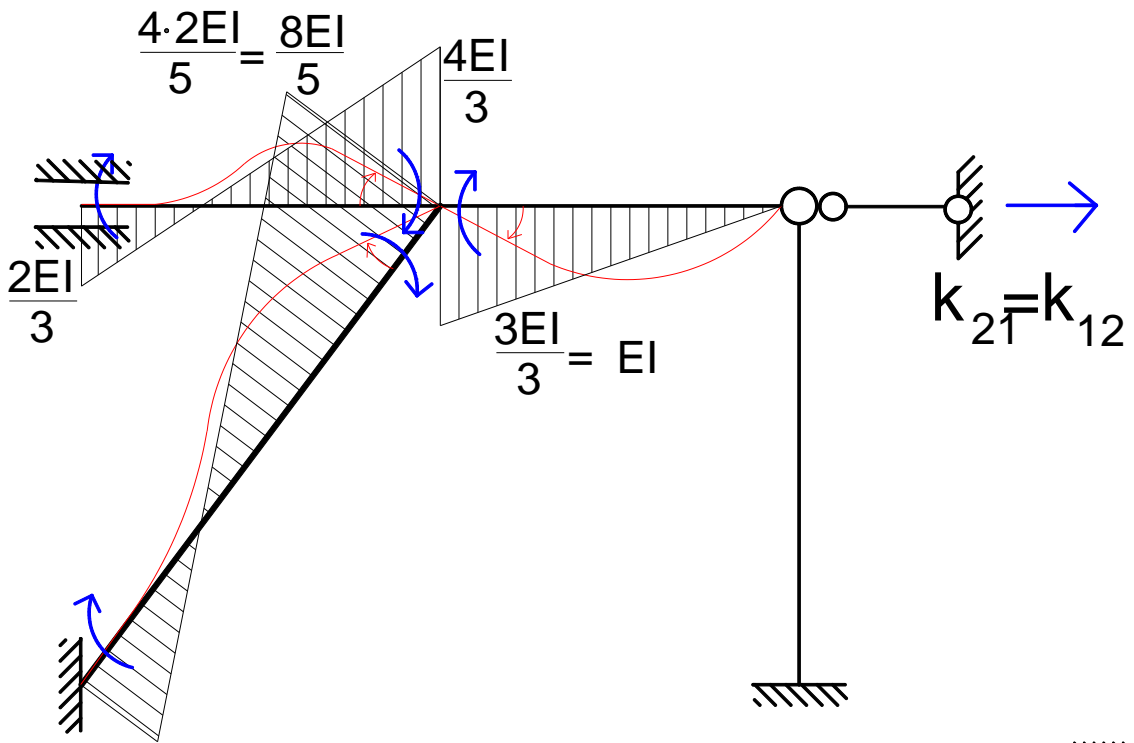
Stan $\varphi_1=1$



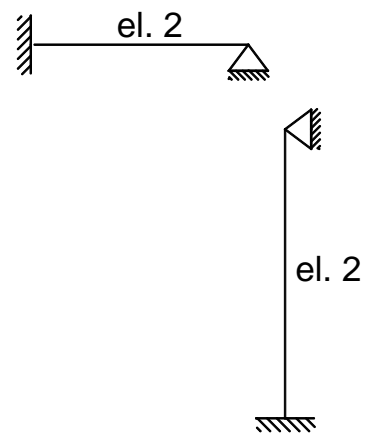
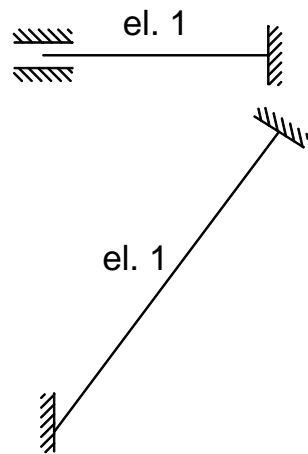
$$k_{11} = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{5} + EI = \frac{59EI}{15}$$



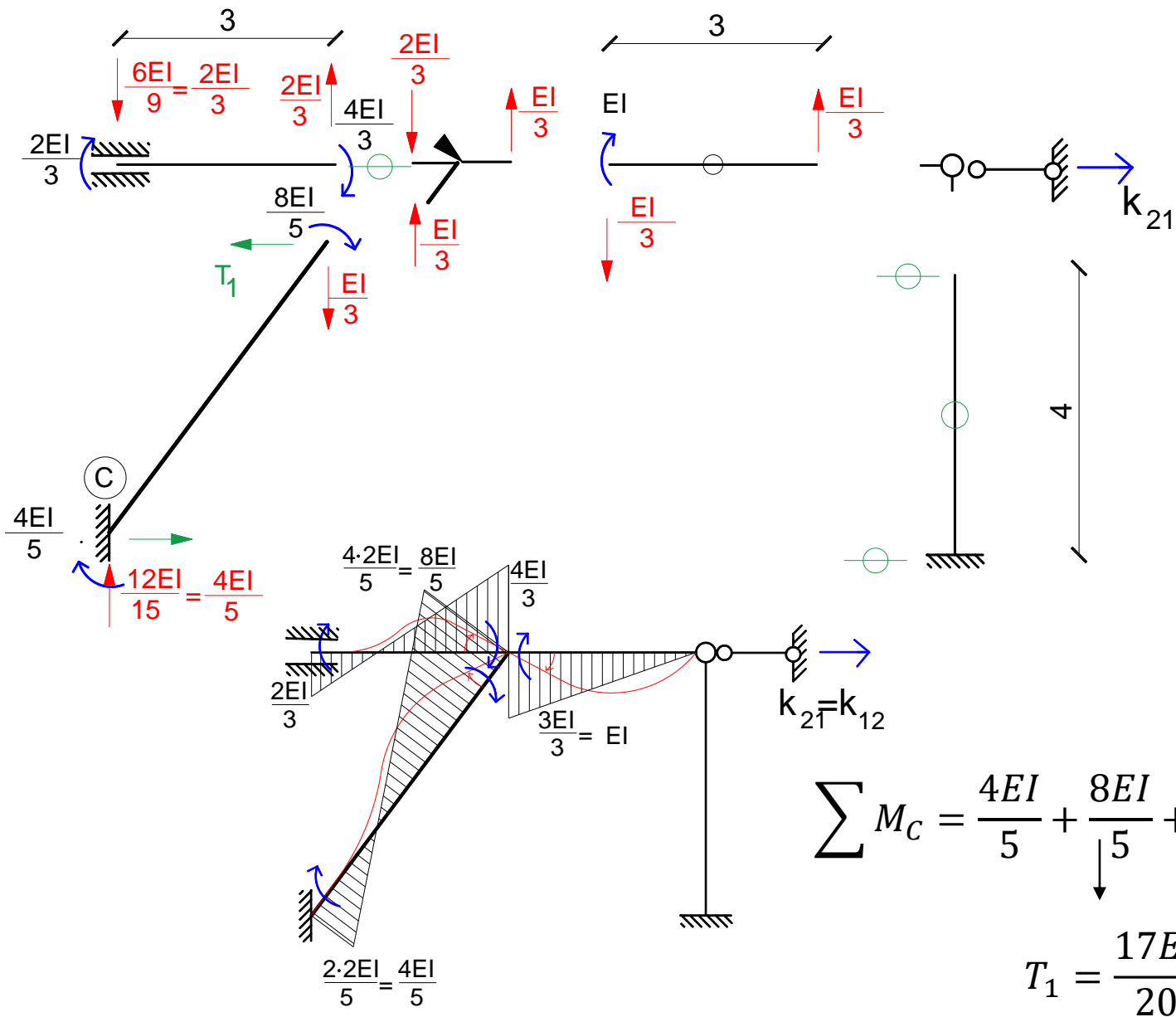
Stan $\varphi_1=1$



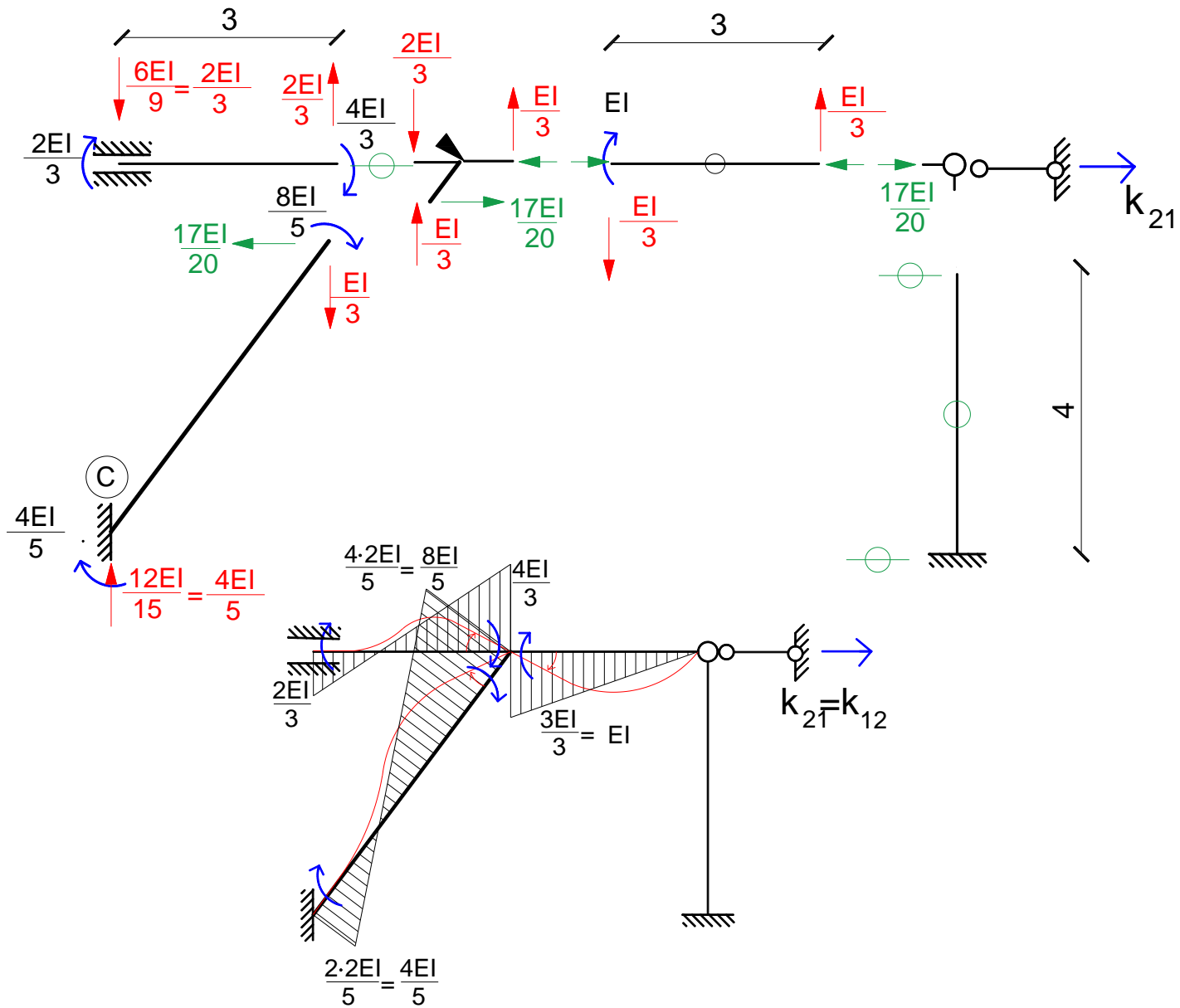
$$k_{11} = \frac{4EI}{3} + \frac{8EI}{5} + EI = \frac{59EI}{15}$$



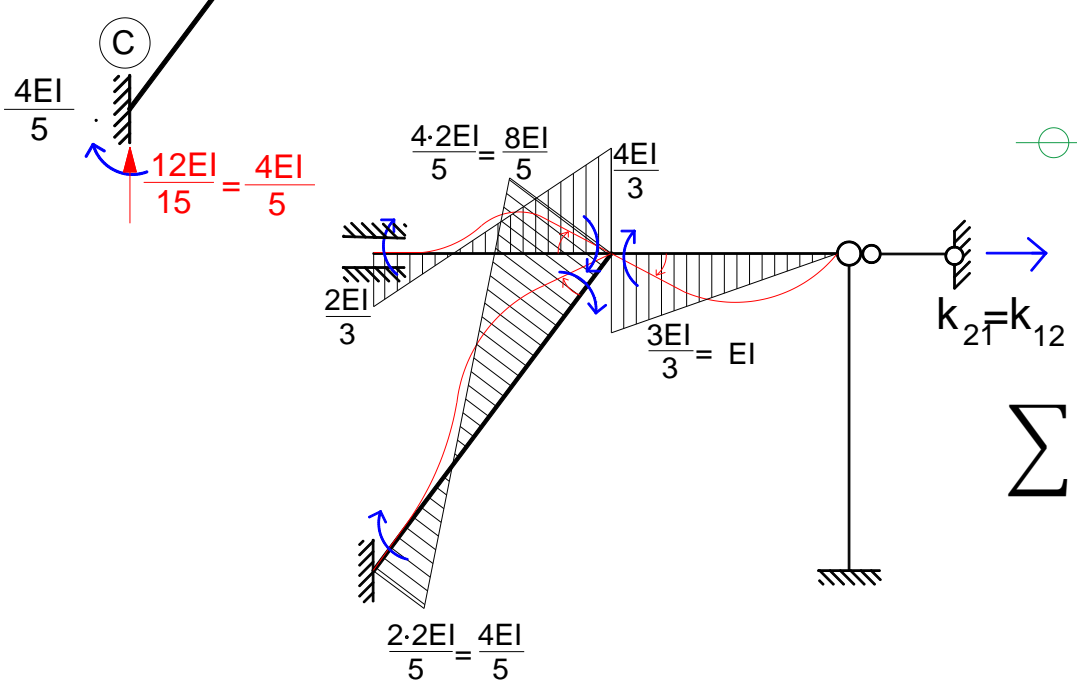
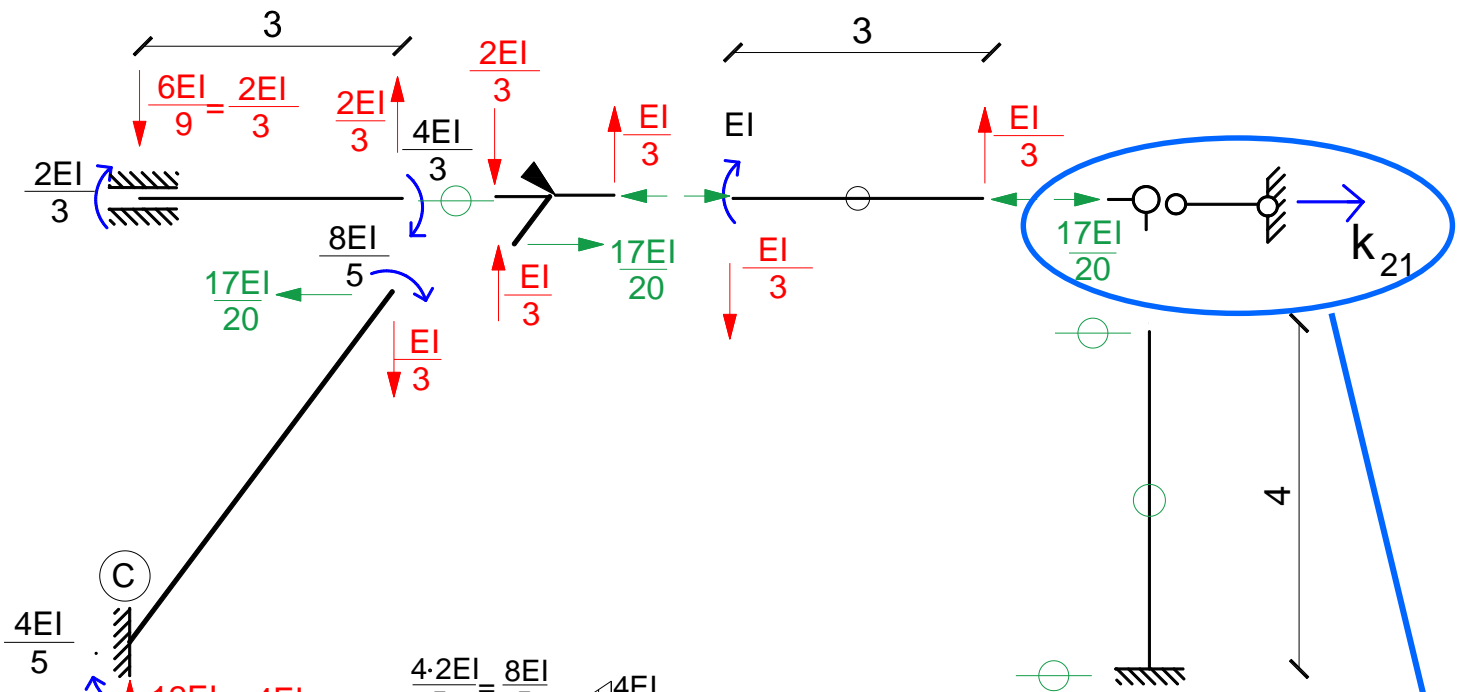
Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{21}



Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{21}

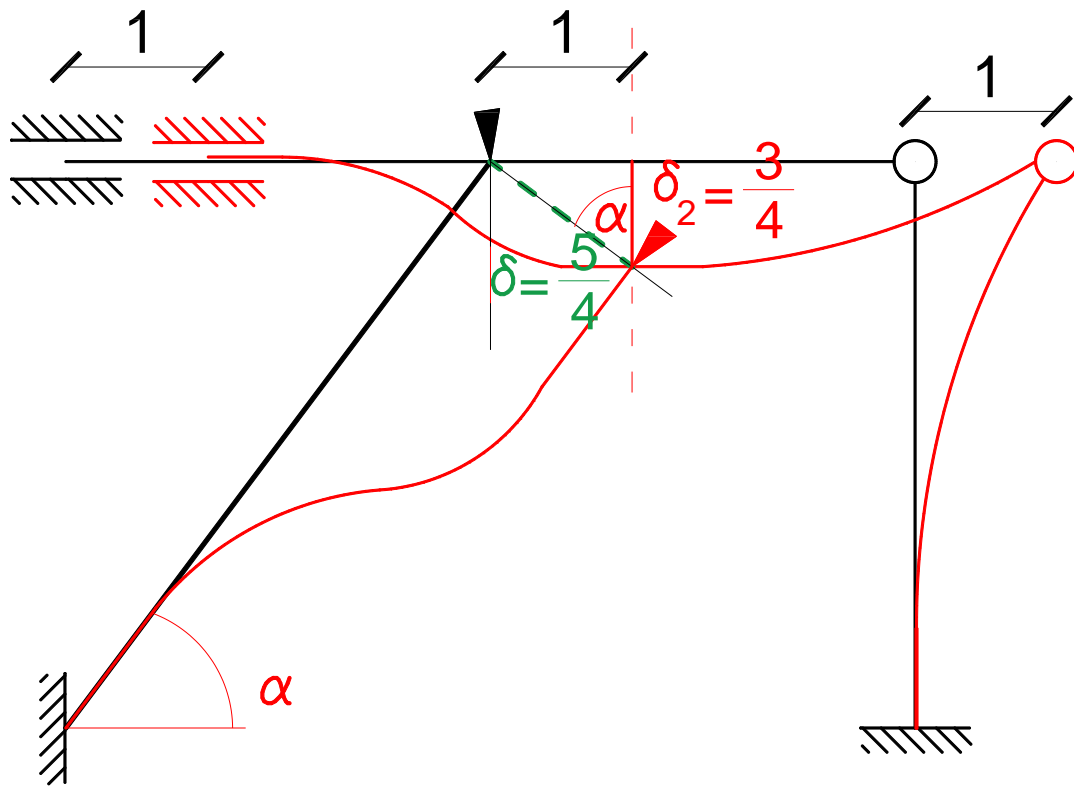


Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{21}



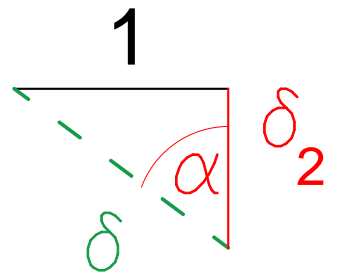
$$\sum R_x = \frac{17EI}{20} + k_{21} = 0$$

$$k_{21} = -\frac{17EI}{20}$$



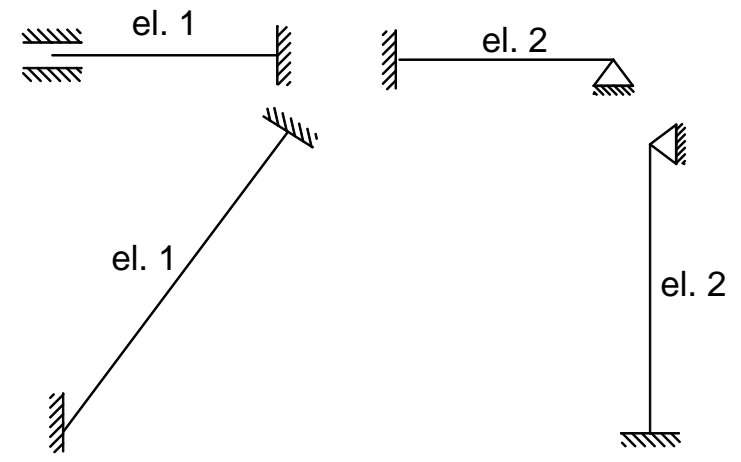
Stan $\Delta_2=1$

$\rightarrow k_{22}$

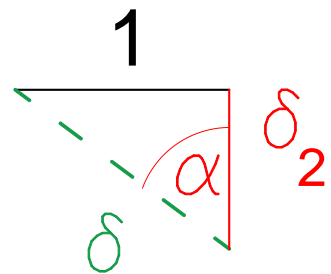
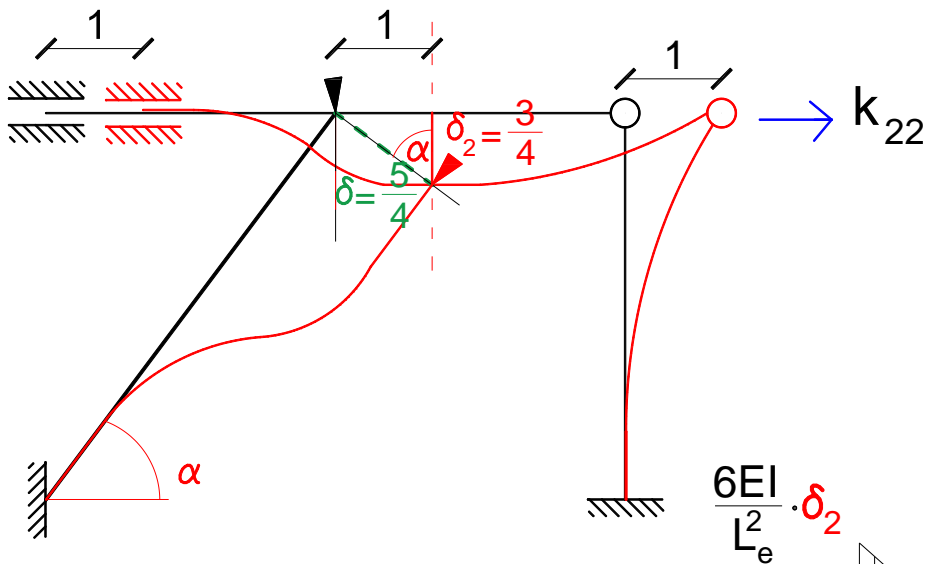


$$\frac{\delta_2}{1} = \cot \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \delta_2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\delta} = \sin \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \delta = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{5}{4}$$

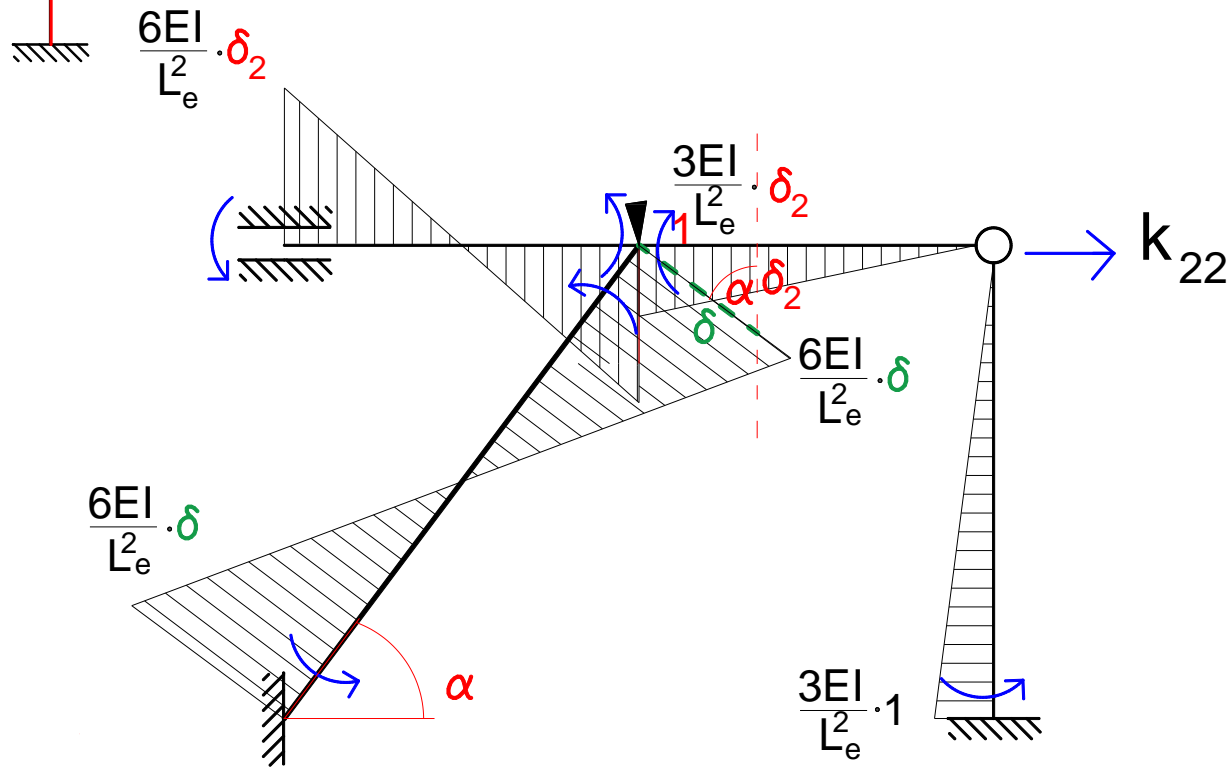


Stan $\Delta_2=1$

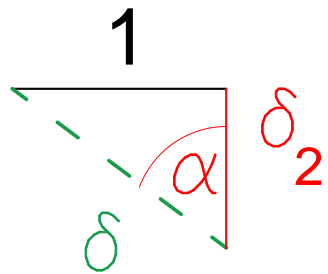
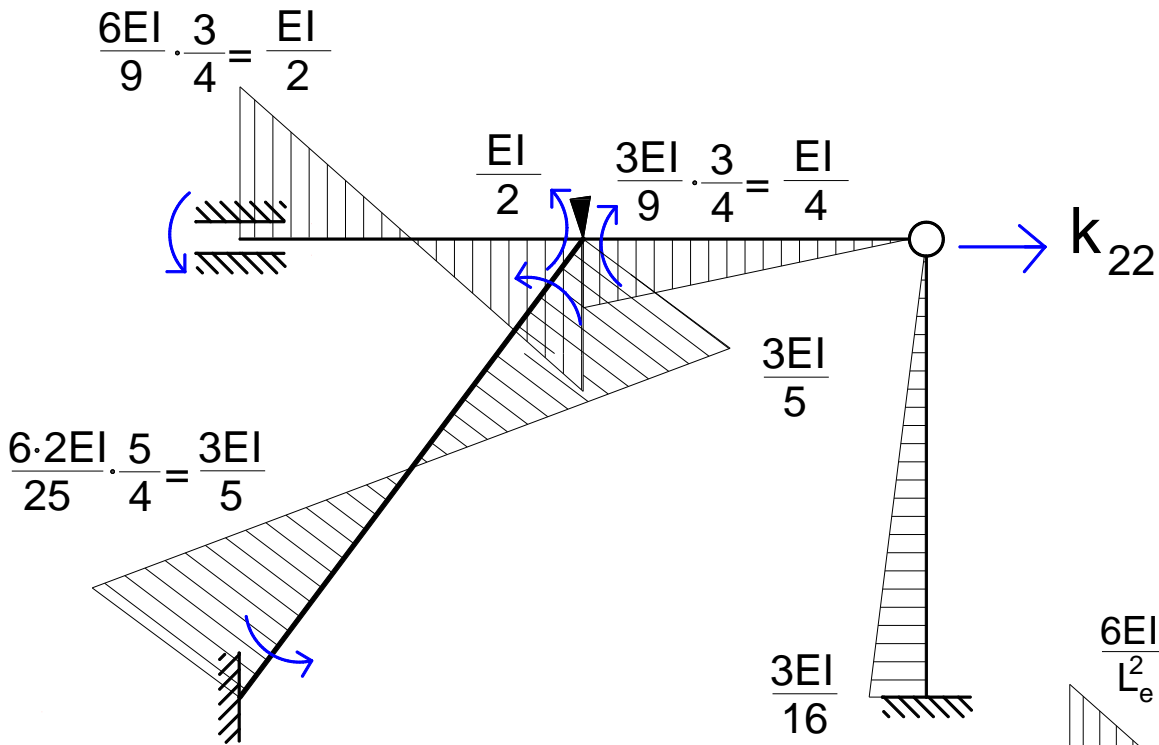


$$\frac{\delta_2}{1} = \cot \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \delta_2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\delta} = \sin \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \delta = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{5}{4}$$

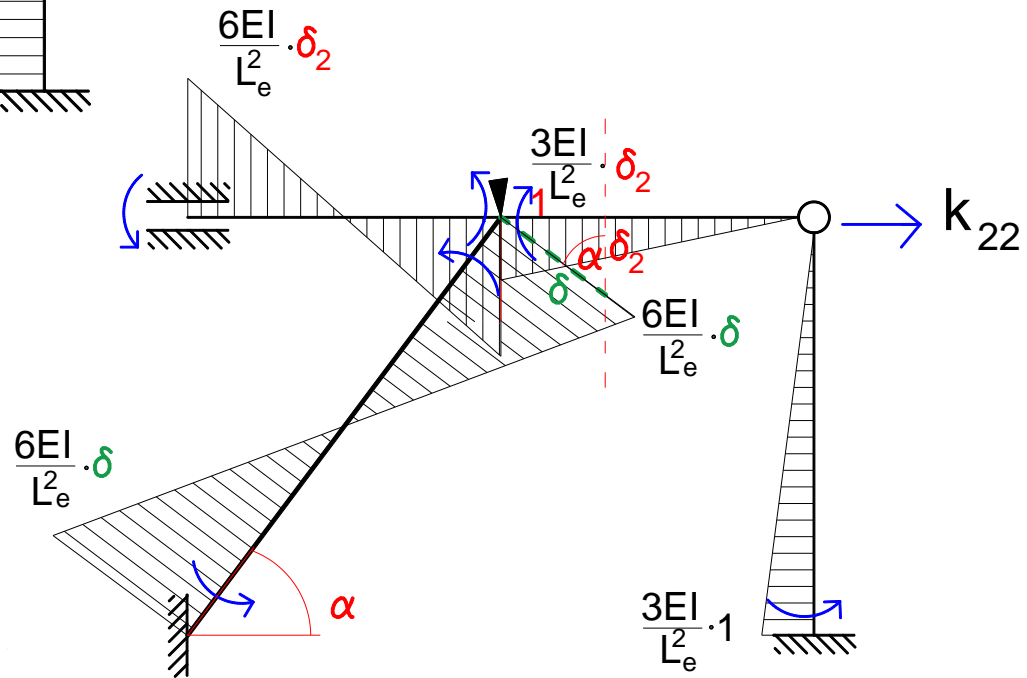


Stan $\Delta_2=1$

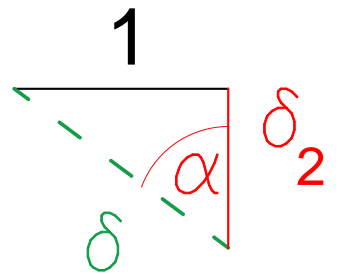
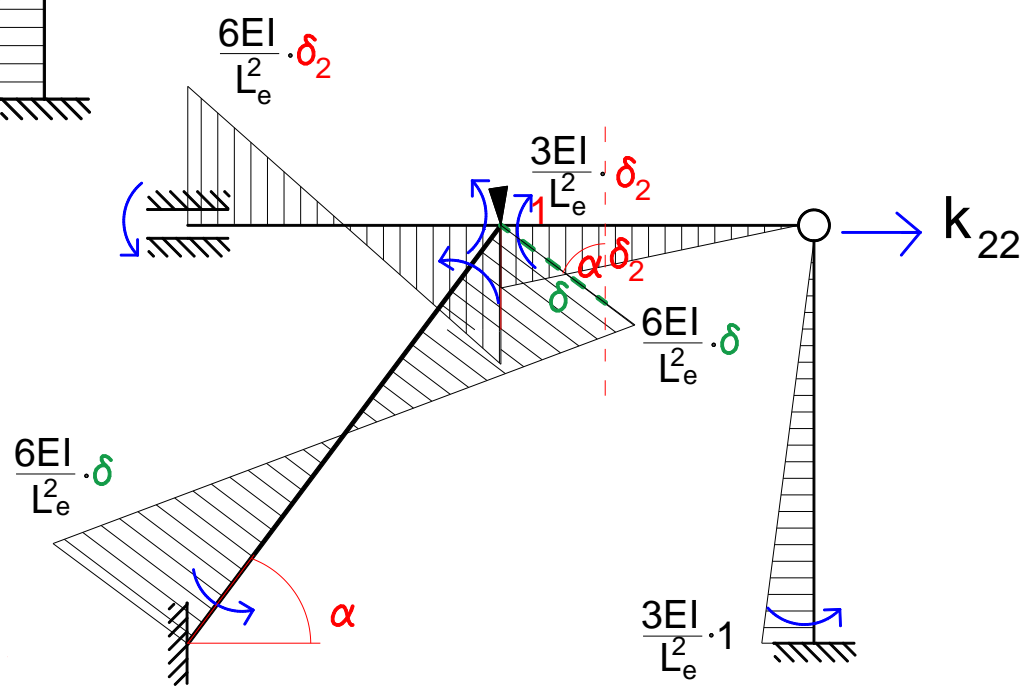
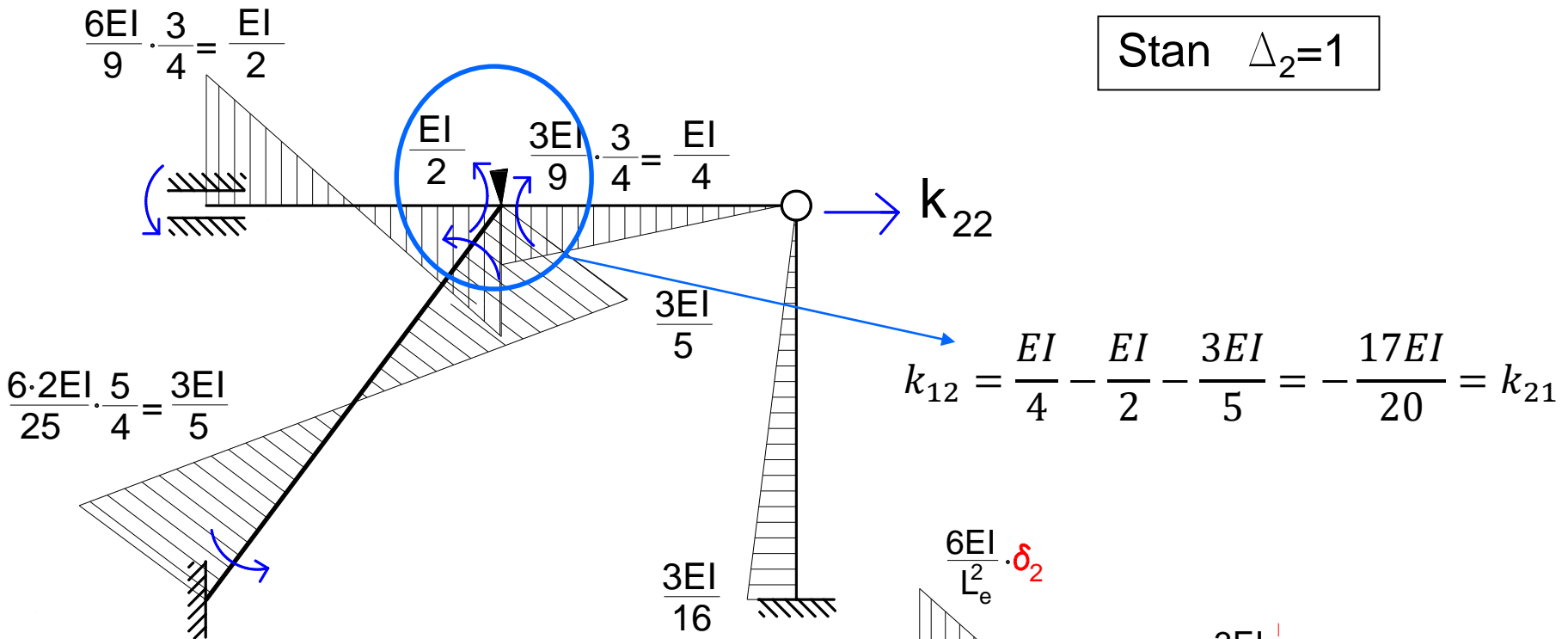


$$\frac{\delta_2}{1} = \cot \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \delta_2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\delta} = \sin \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \delta = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{5}{4}$$



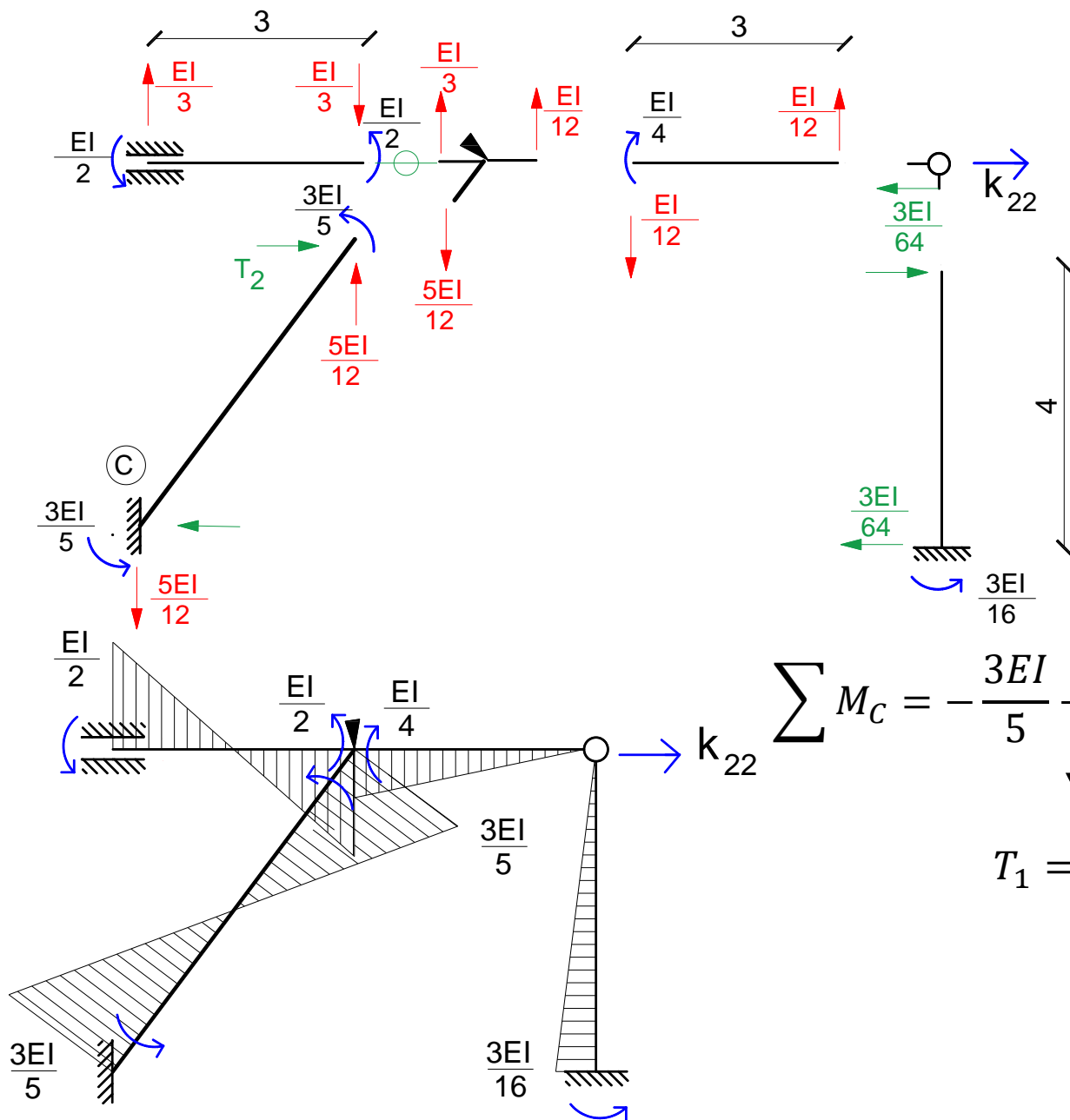
Stan $\Delta_2=1$



$$\frac{\delta_2}{1} = \cot \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \delta_2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\delta} = \sin \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \delta = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{5}{4}$$

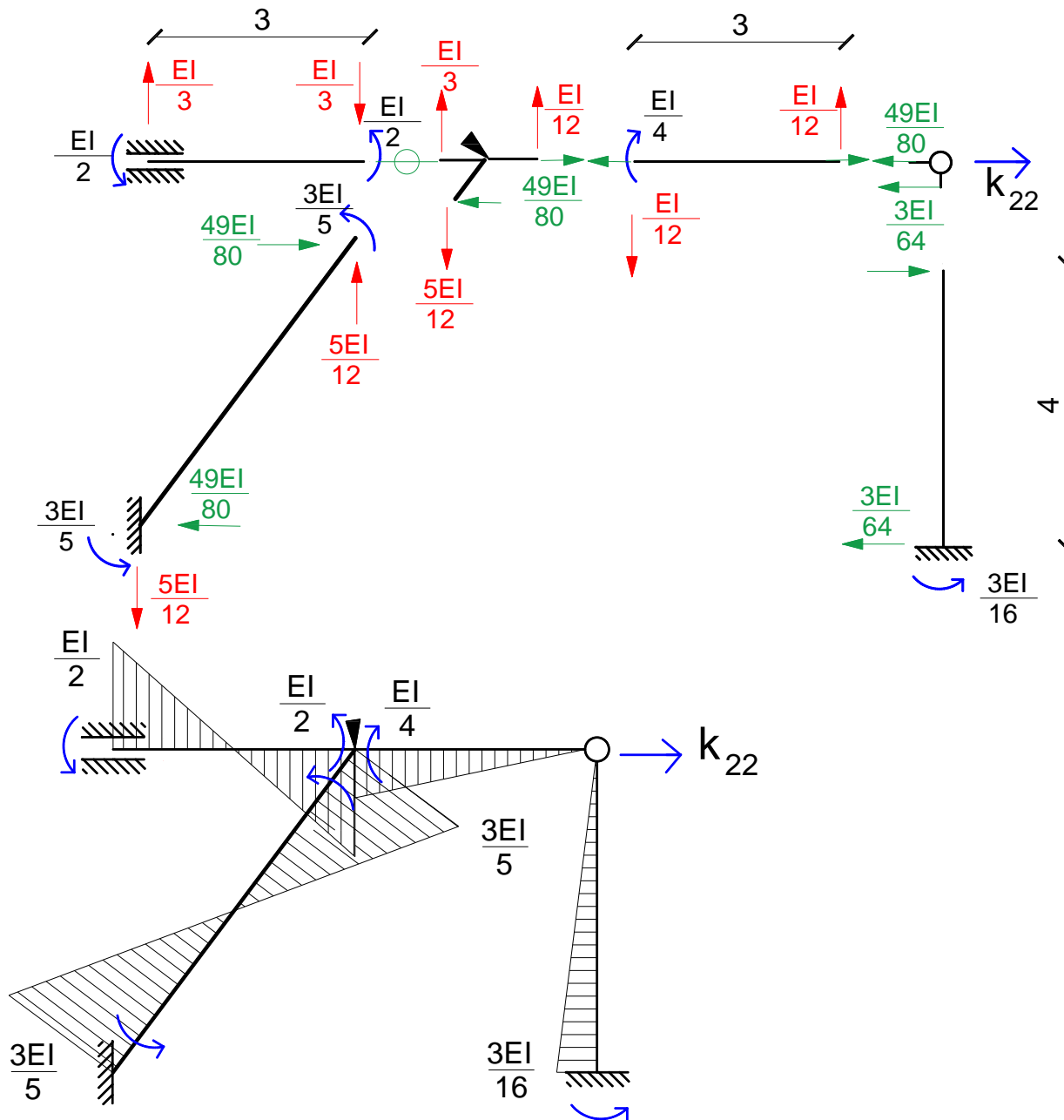
Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{22}



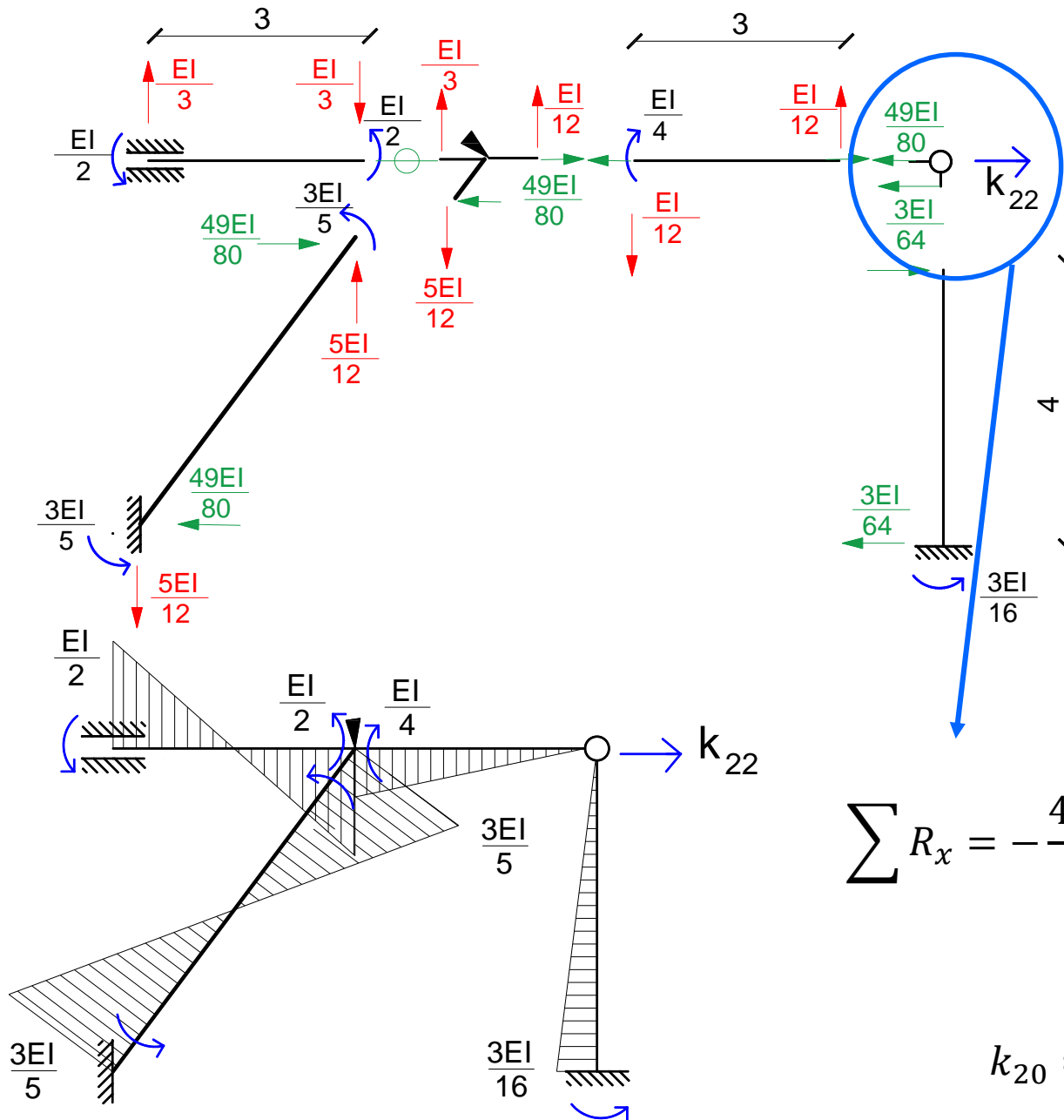
$$\sum M_C = -\frac{3EI}{5} - \frac{3EI}{5} - \frac{5EI}{12} \cdot 3 + T_2 \cdot 4 = 0$$

$$T_1 = \frac{49EI}{80}$$

Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{22}



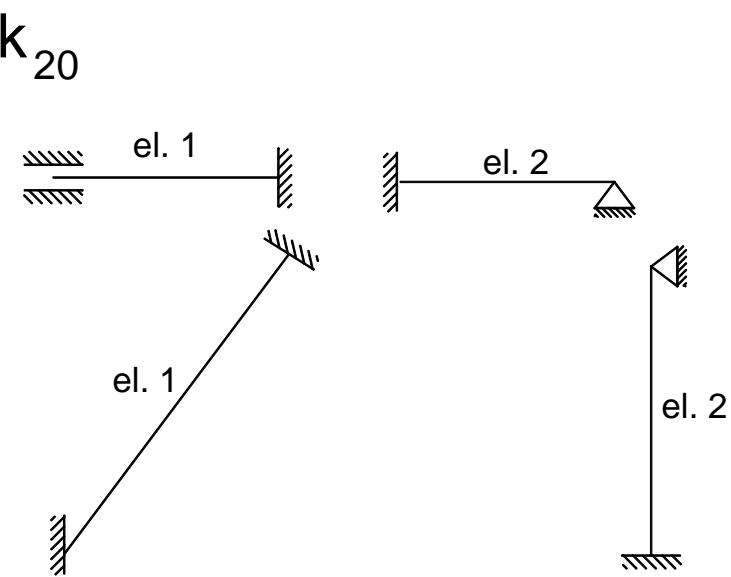
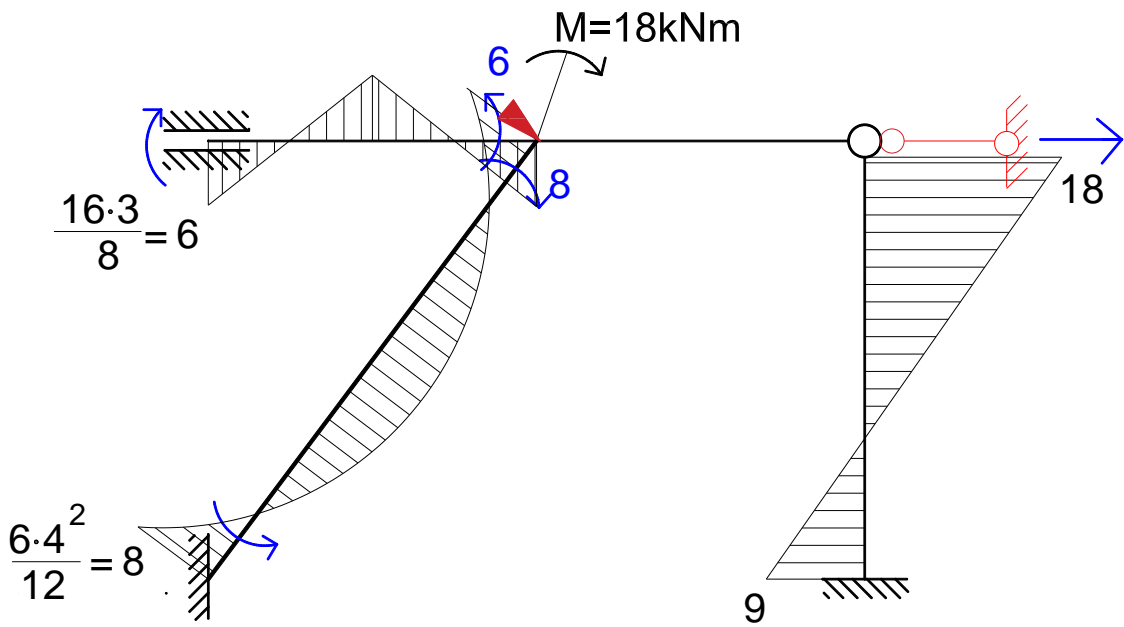
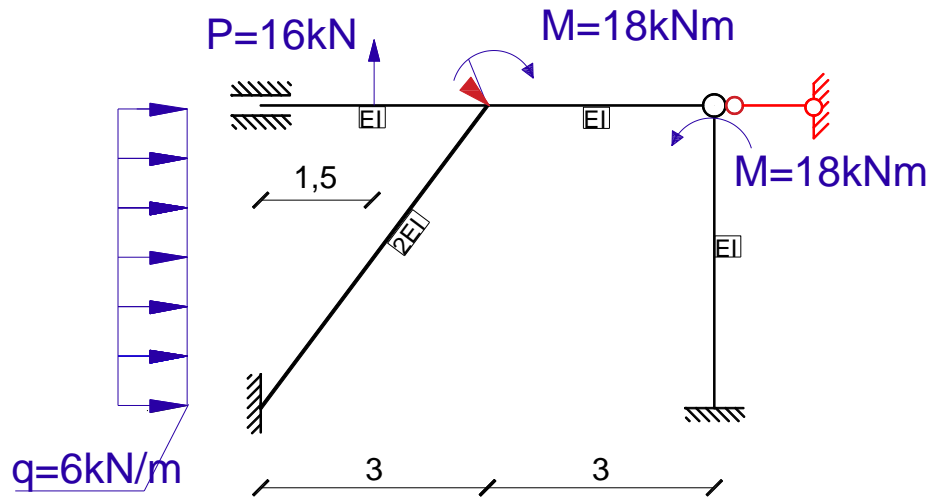
Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{22}



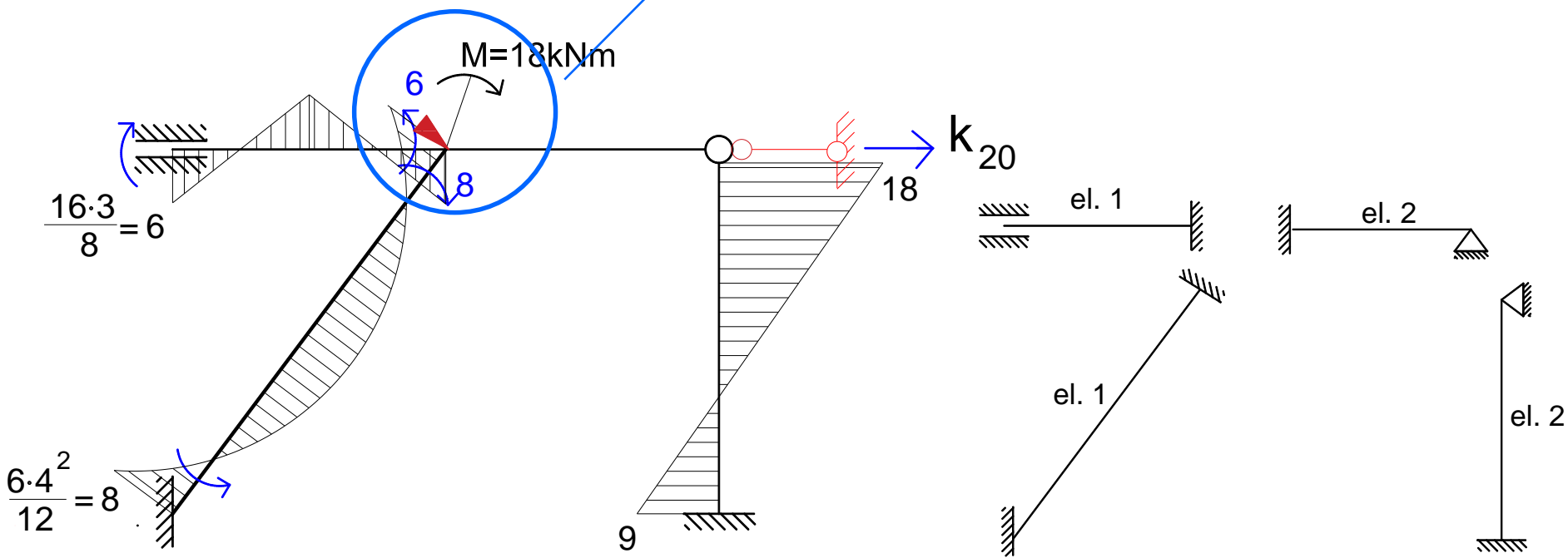
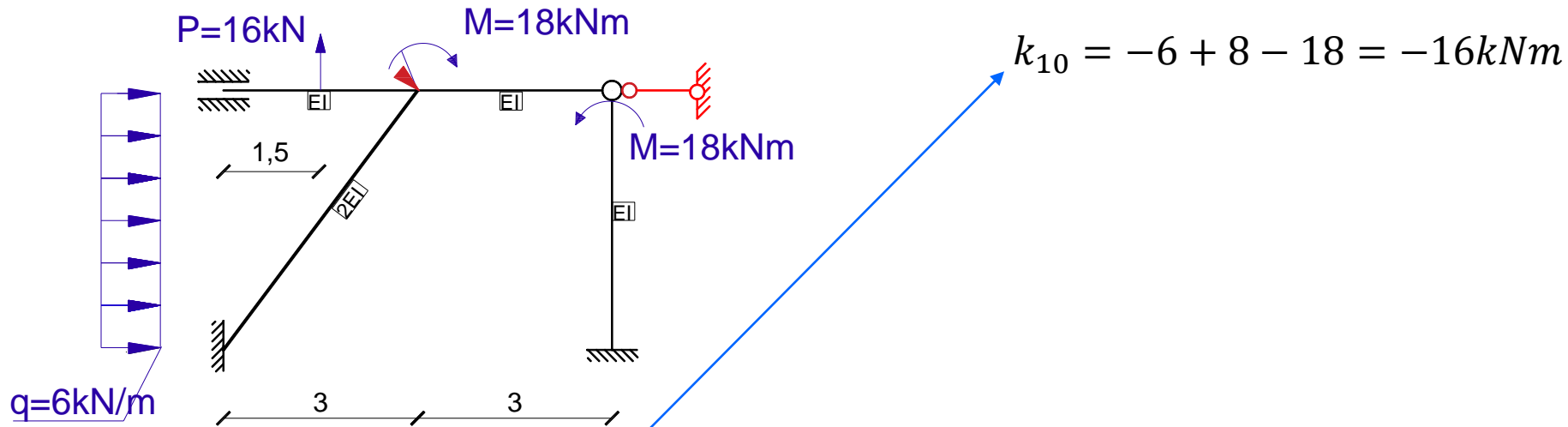
$$\sum R_x = -\frac{49EI}{80} - \frac{3EI}{64} + k_{22} = 0$$

$$k_{22} = \frac{211EI}{320} \quad \text{dr inż. Hanna Weber}$$

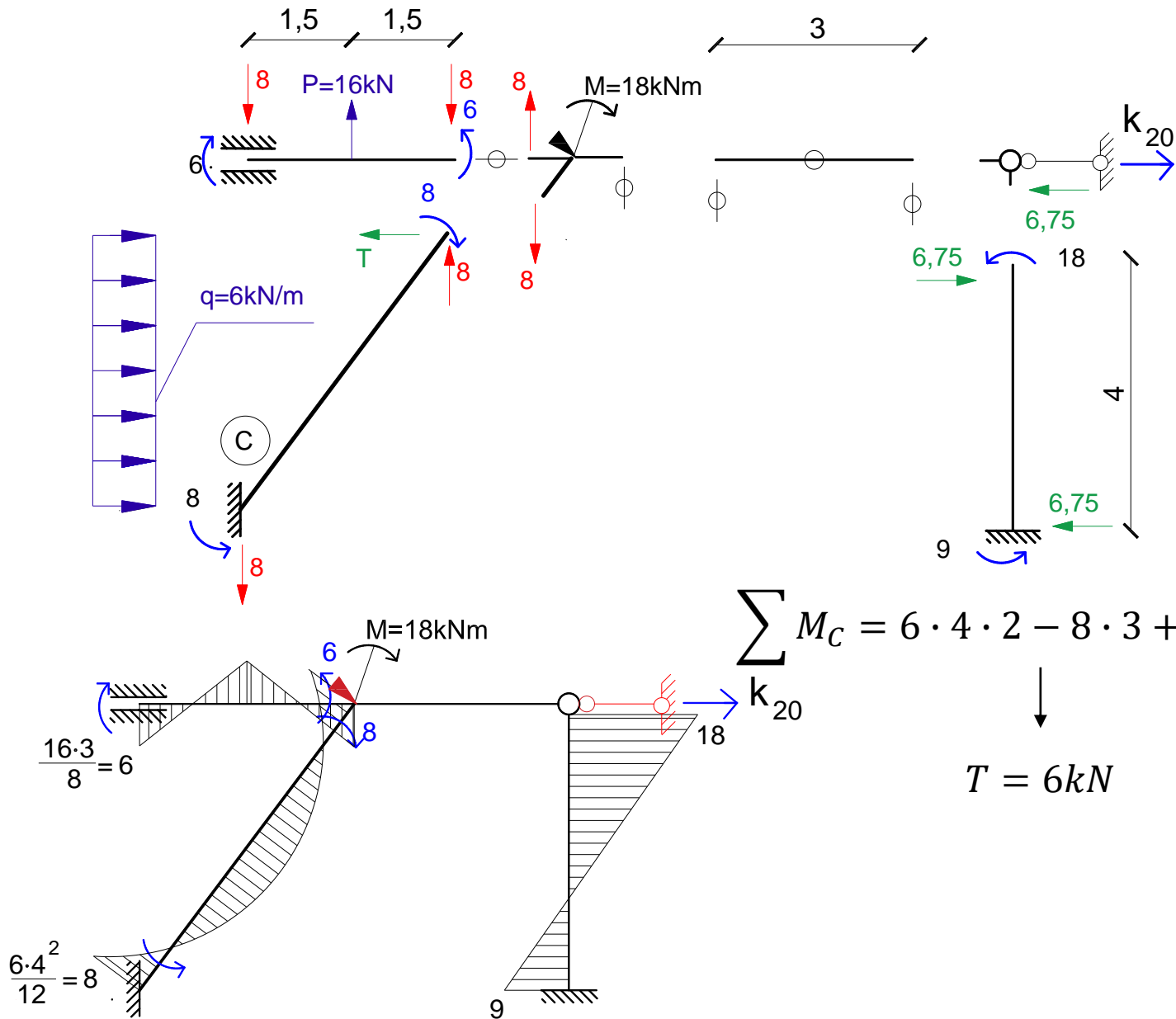
Obciążenie zewnętrzne



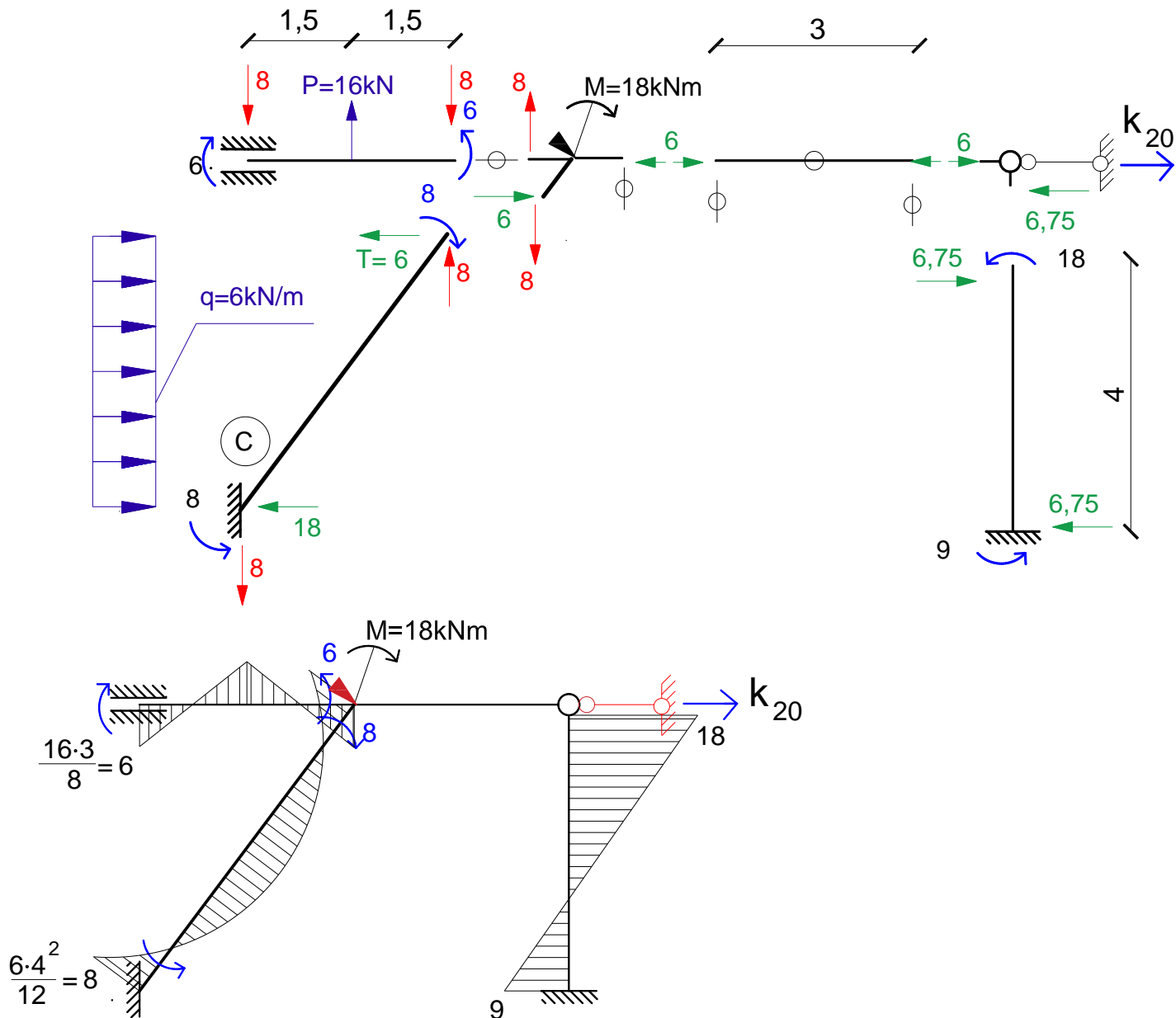
Obciążenie zewnętrzne



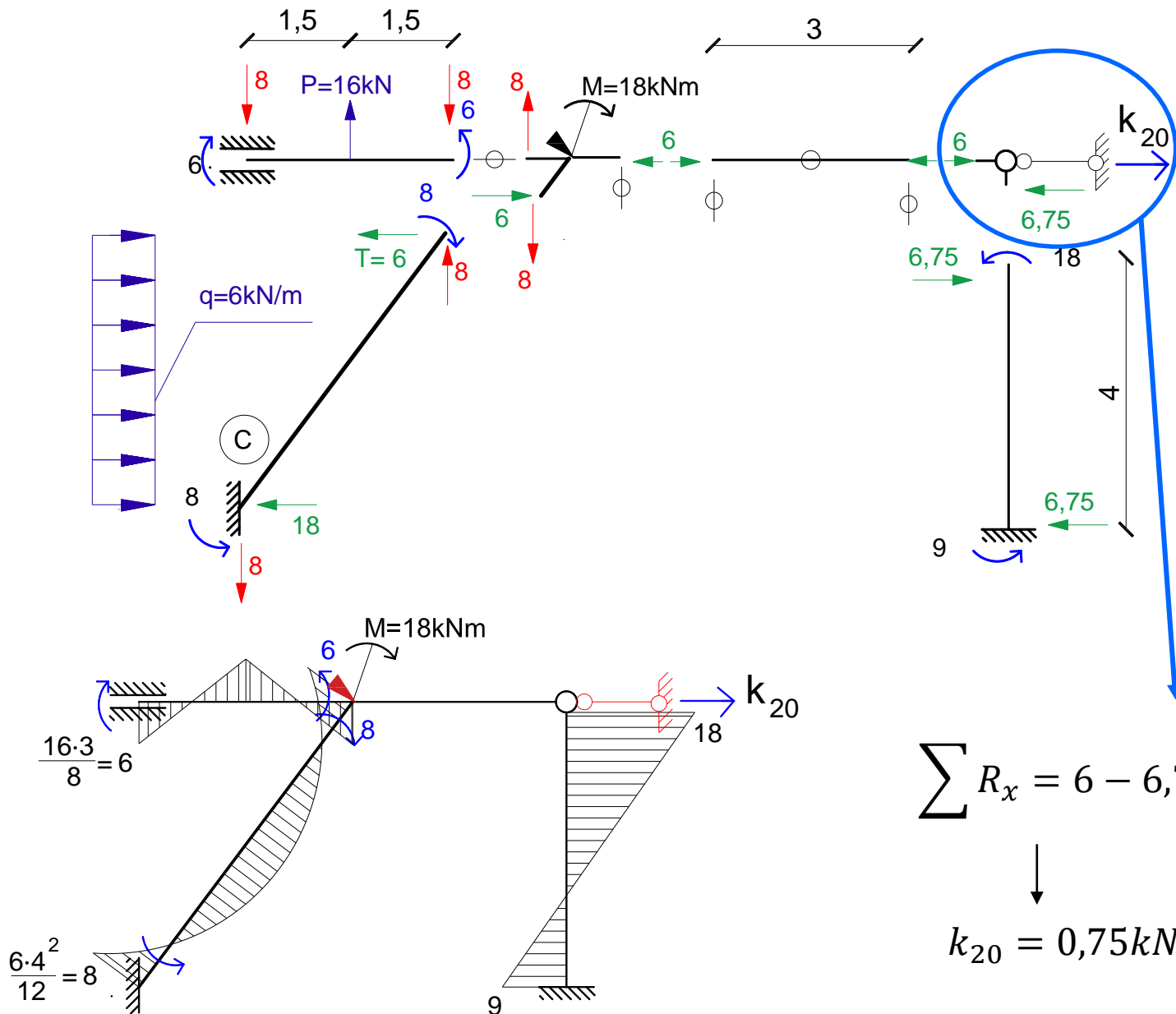
Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{20}



Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{20}



Wyznaczenie reakcji od przemieszczeń k_{20}



$$\sum R_x = 6 - 6,75 + k_{20} = 0$$

$$k_{20} = 0,75\text{kN}$$

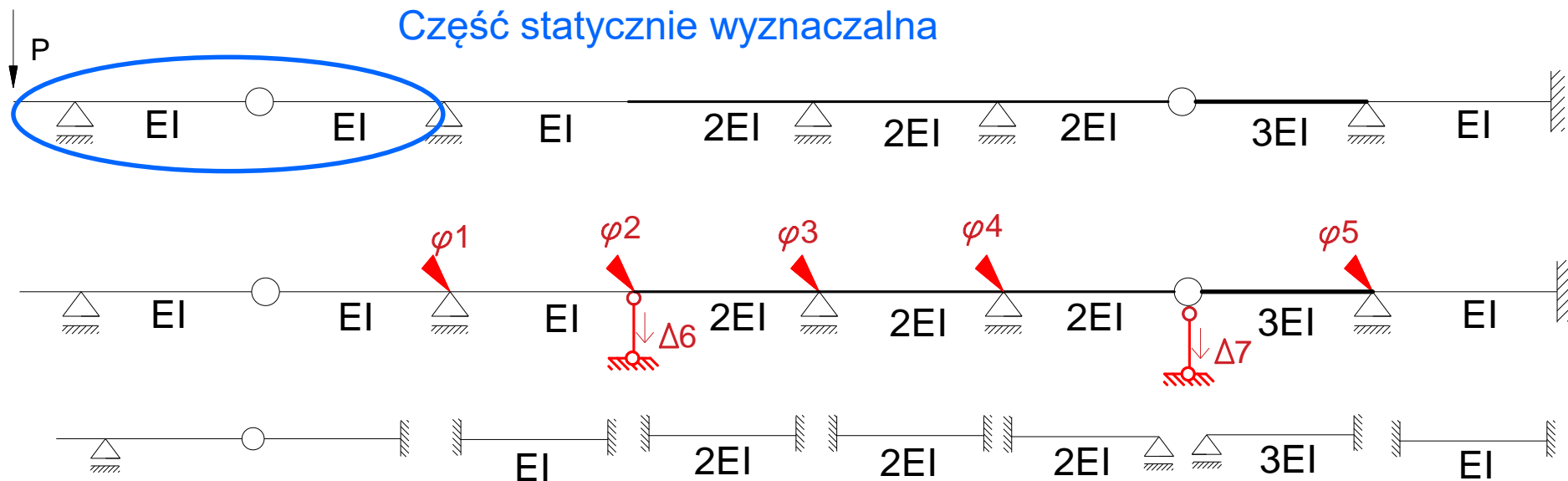
Wykład:

Liczenie przemieszczeń w belkach bezpośrednio z układu równań metody przemieszczeń

Dobór schematu podstawowego metody przemieszczeń w belkach przy wyznaczaniu wykresu M w minimalnej ilości niewiadomych:

- Znajdujemy część statycznie wyznaczalną i pozostawiamy ją bez dodatkowych blokad,
- Wszystkie środkowe podpory przegubowe blokujemy na obrót,
- Środkowe przeguby blokujemy na przesunięcie na kierunku prostopadłym do osi belki,
- Sztywnie połączone punkty skokowej zmiany sztywności blokujemy na obrót i na przesunięcie (jeżeli nie ma podpory blokującej przesuw)

Zadanie 1: Dobierz schemat podstawowy metody przemieszczeń dla poniższego układu i dokonaj podziału na elementy. Zadanie rozwiąż w minimalnej bazie niewiadomych.



Dobór schematu podstawowego metody przemieszczeń w belkach przy liczeniu przemieszczeń bezpośrednio z układu :

- Dobieramy niezbędne blokady w minimalnej ilości niewiadomych (tak jak dla wyznaczenia wykresu M)
- Przy liczeniu ugięcia na końcu wspornika wstawiamy samą blokadę na przesunięcie,
- Przy liczeniu kąta obrotu na końcu wspornika wstawiamy obie blokady (na obrót i na przesunięcie),
- Przy liczeniu dowolnego przemieszczenia na belce między podporami (w środku układu) – stawiamy obie blokady jednocześnie,
- Uzupełniamy układ brakującymi blokadami.