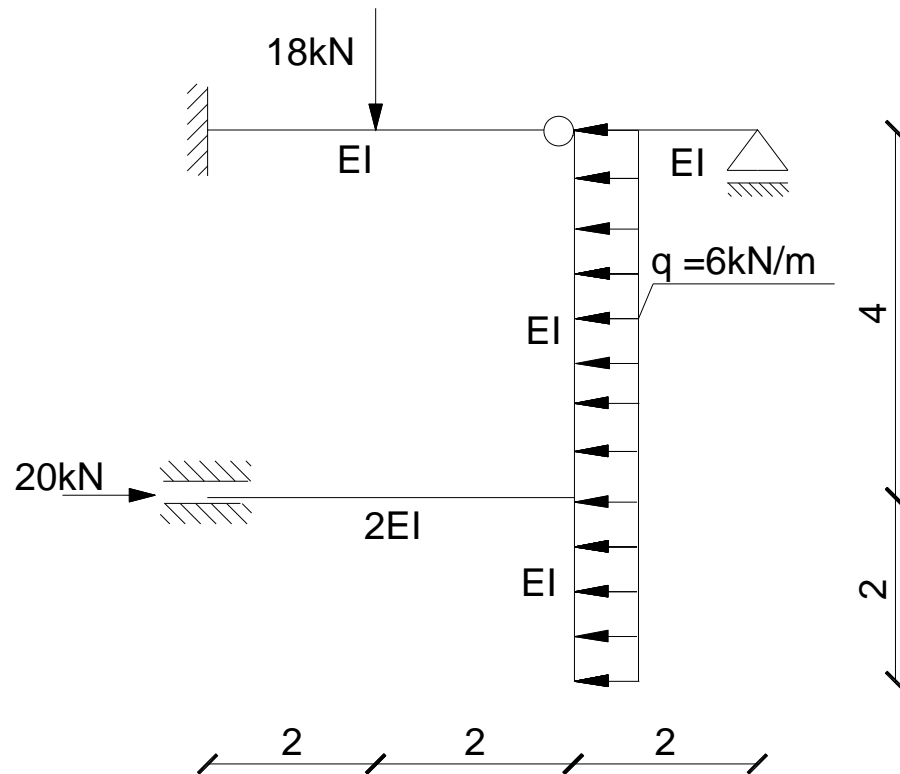
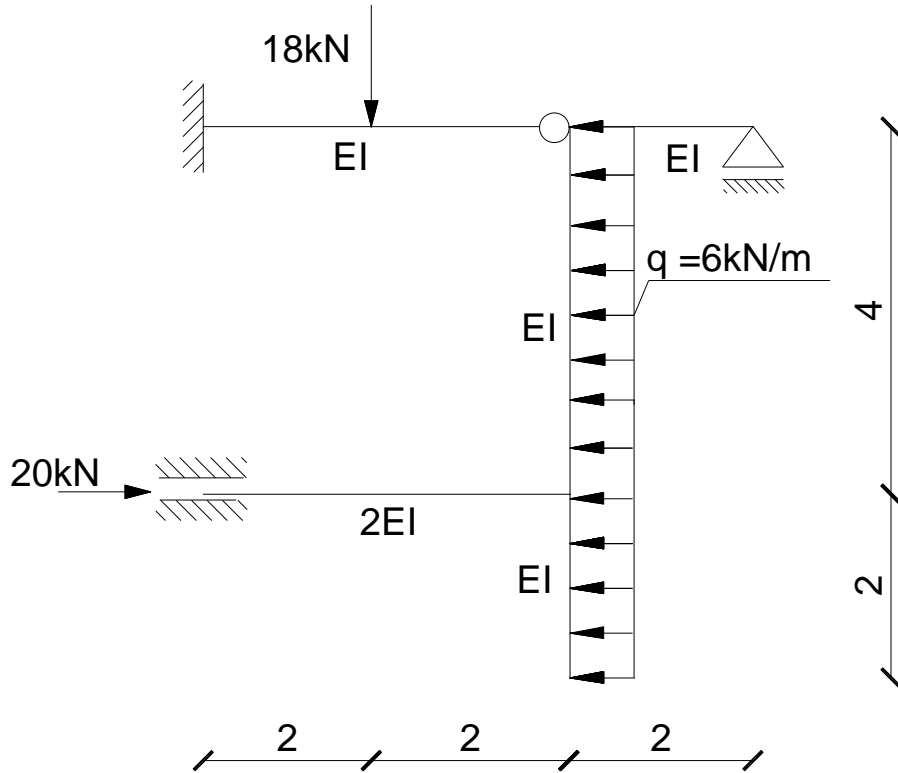


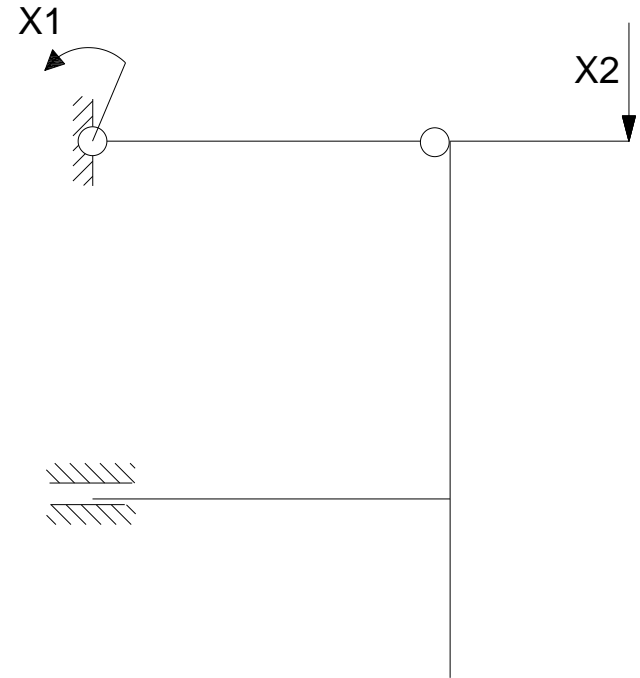
Wyznaczanie wykresów sił N,T,M dla ramy statycznie niewyznaczalnej metodą sił



Wyznaczanie wykresów sił N,T,M dla ramy statycznie niewyznaczalnej metodą sił



Schemat podstawowy:

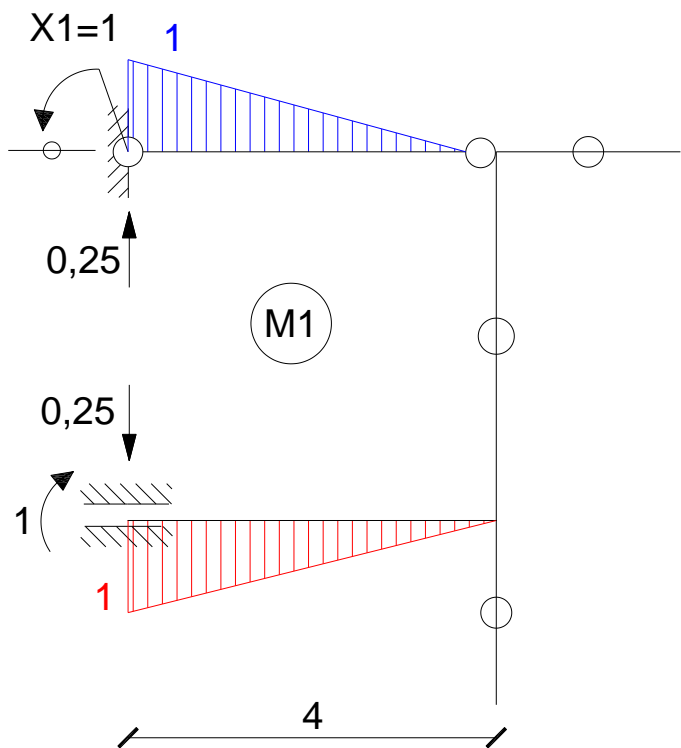


$$n_s = lr - lp - 3 = 6 - 1 \cdot 1 - 3 = 2$$

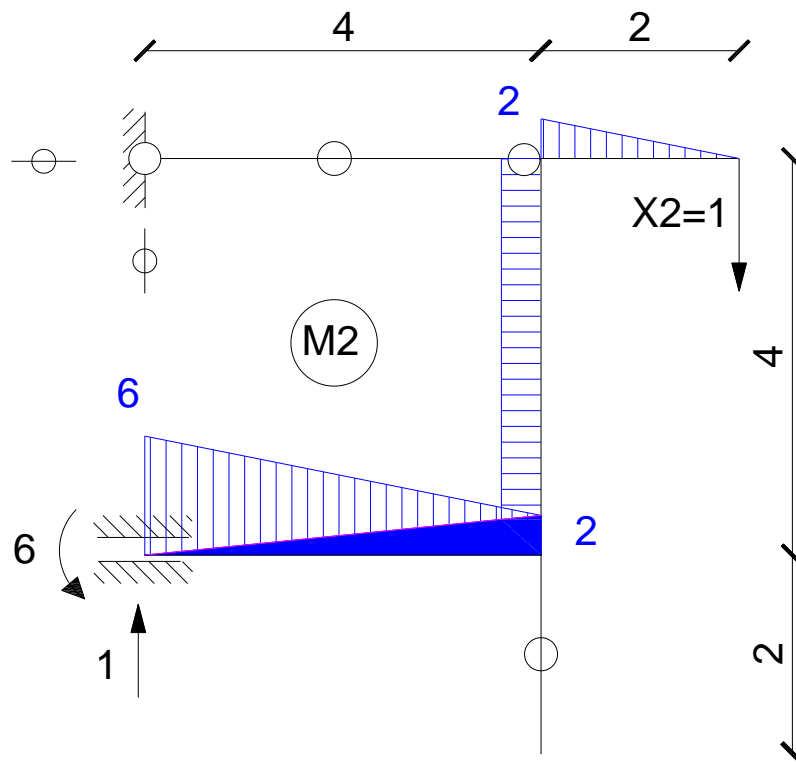
Rama dwukrotnie statycznie niewyznaczalna

Wykresy od jednostkowych nadliczbowych i współczynniki układu met. sił:

Stan $X_1=1$

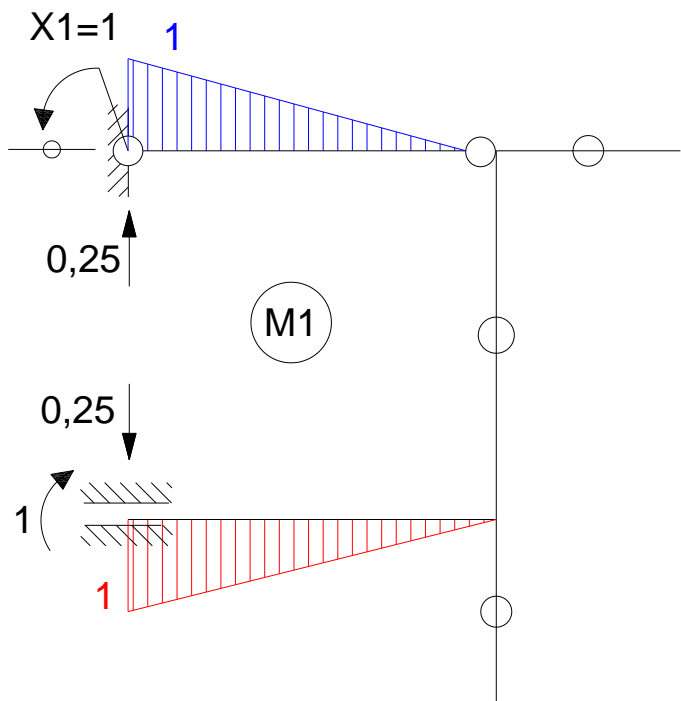


Stan $X_2=1$



Wykresy od jednostkowych nadliczbowych i współczynniki układu met. sił:

Stan X1=1

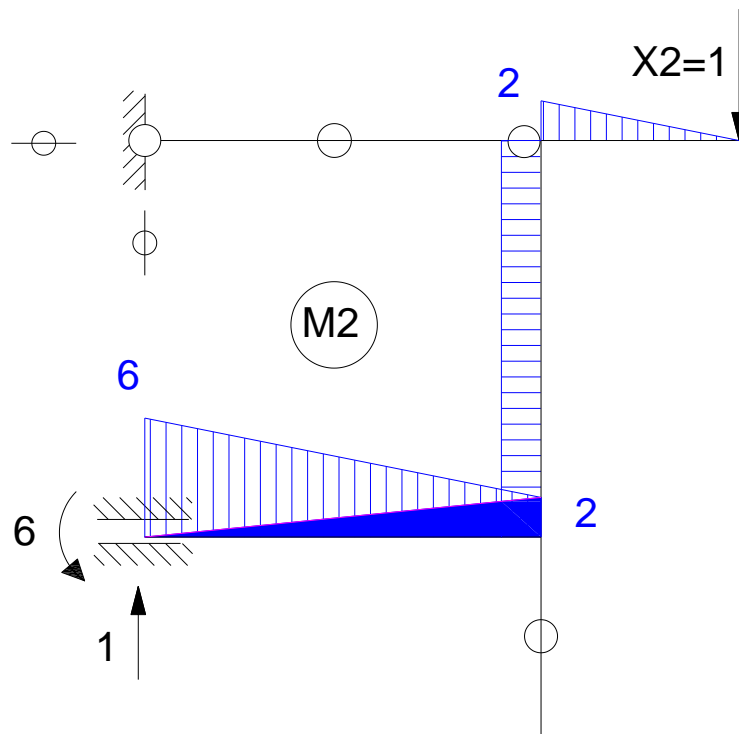


$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{14}{3EI}$$

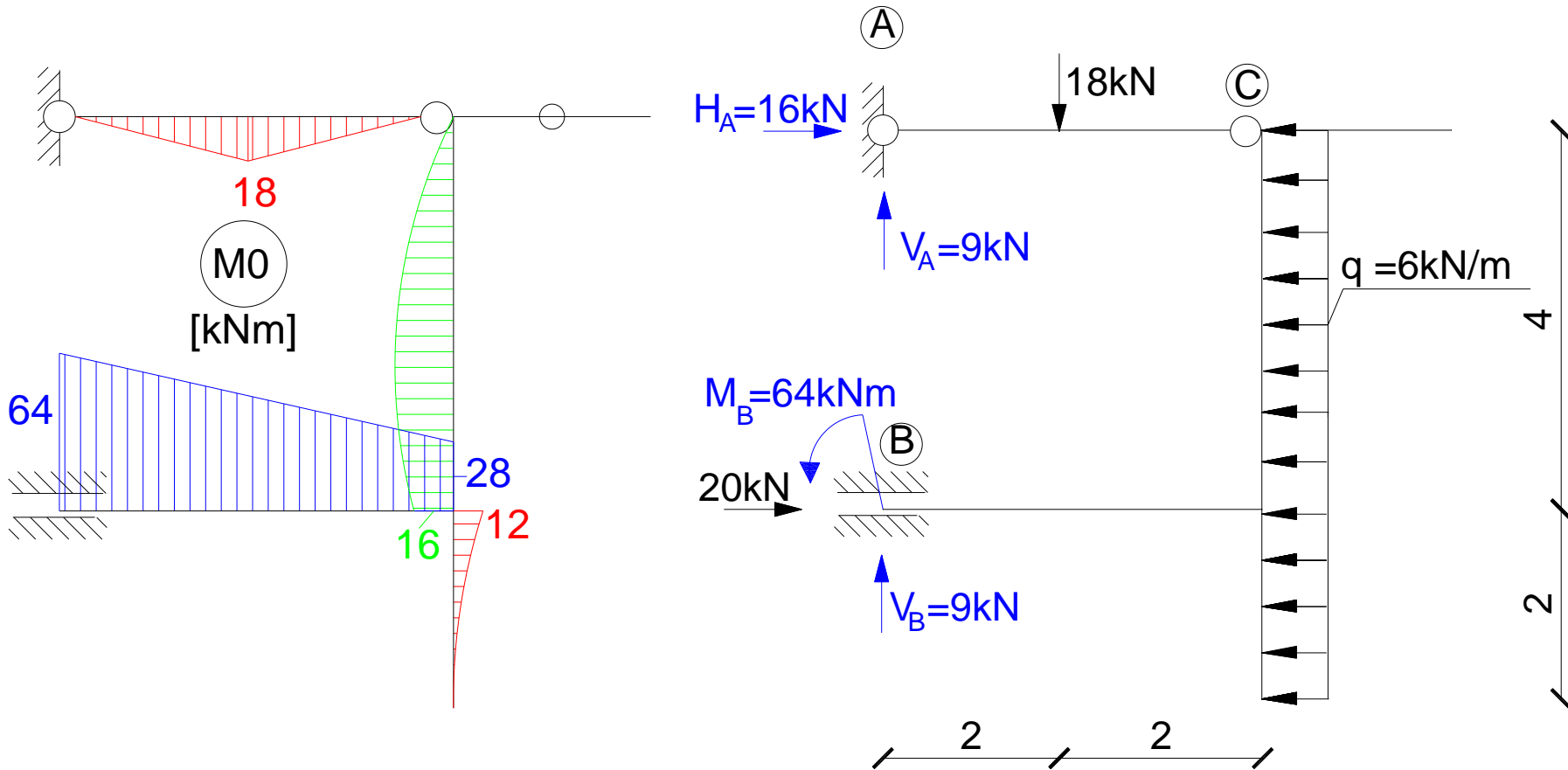
$$\delta_{22} = \frac{160}{3EI}$$

Stan X2=1



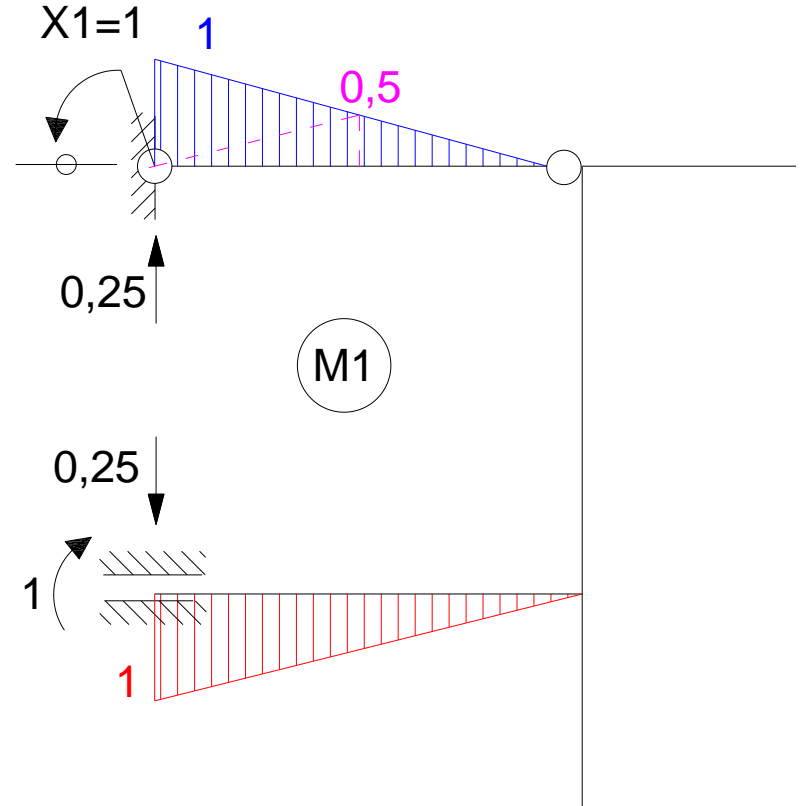
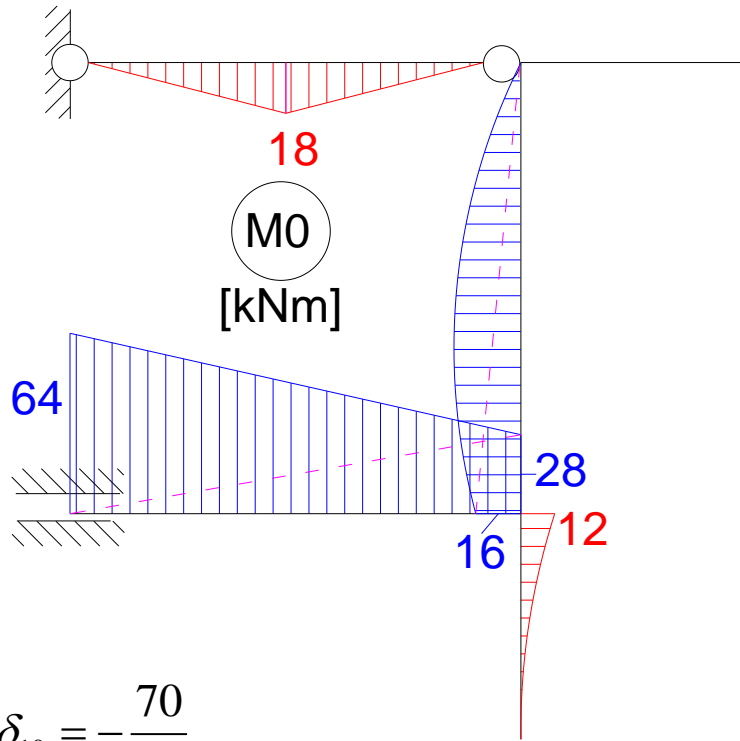
Wykres momentów od obciążenia zewnętrznego na schemacie podstawowym:

Obciążenie zewnętrzne



Wykres momentów od obciążenia zewnętrznego na schemacie podstawowym:

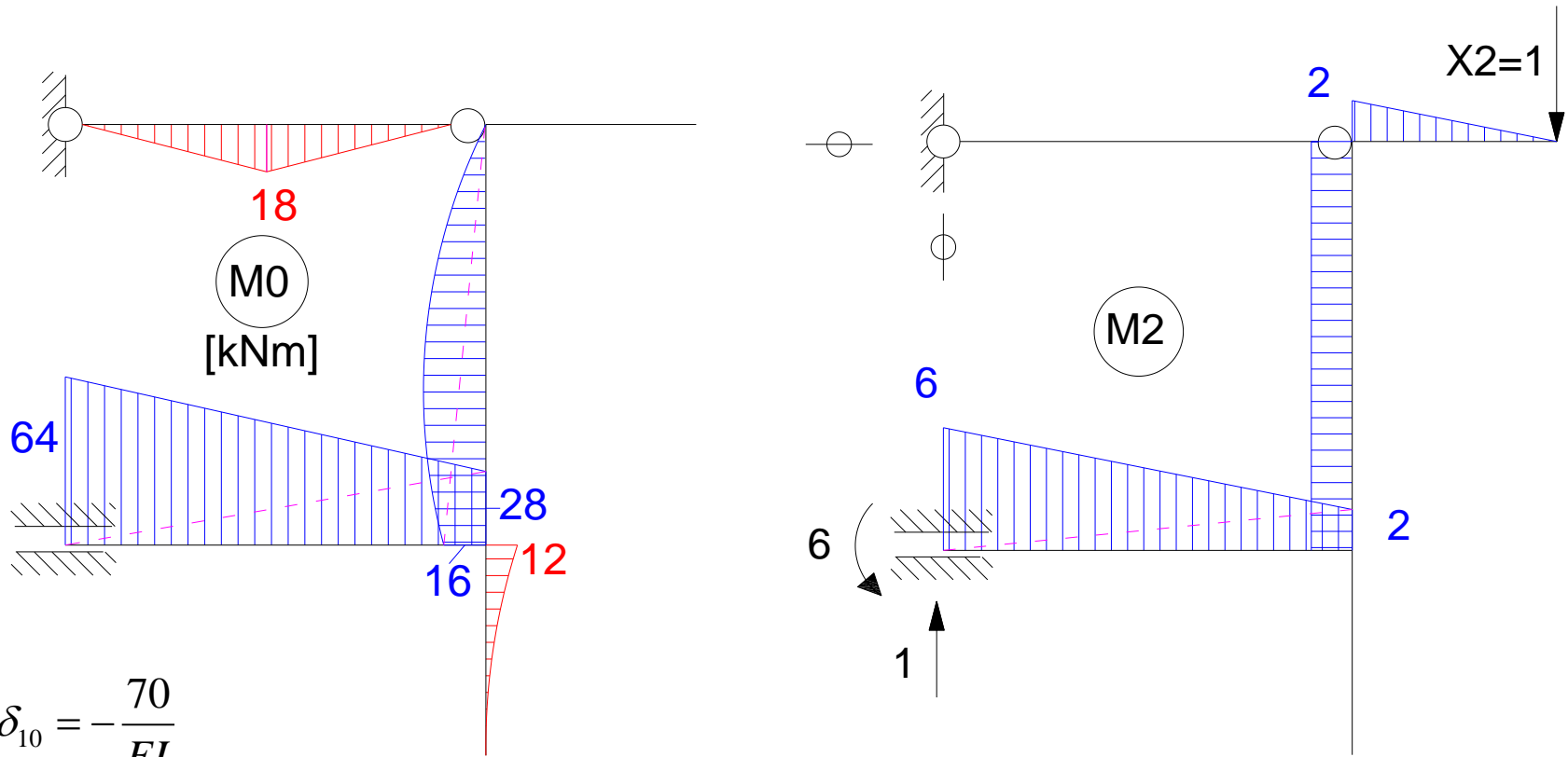
Obciążenie zewnętrzne



$$\delta_{10} = -\frac{70}{EI}$$

Wykres momentów od obciążenia zewnętrznego na schemacie podstawowym:

Obciążenie zewnętrzne



$$\delta_{10} = -\frac{70}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{520}{EI}$$

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0$$

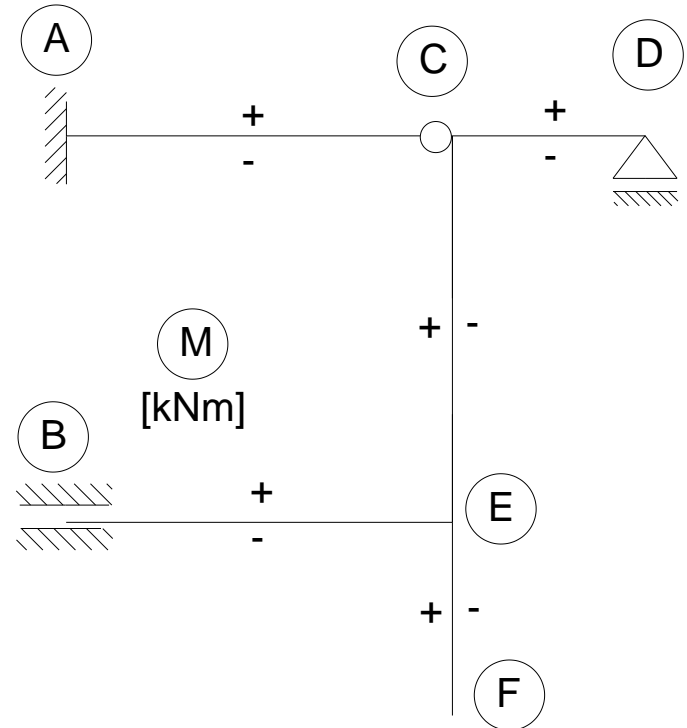
$$\frac{2}{EI} \cdot X_1 - \frac{14}{3EI} \cdot X_2 - \frac{70}{EI} = 0$$

$$-\frac{14}{3EI} \cdot X_1 + \frac{160}{3EI} \cdot X_2 + \frac{520}{EI} = 0$$



$$X_1 = 15,393 \text{ kNm}$$

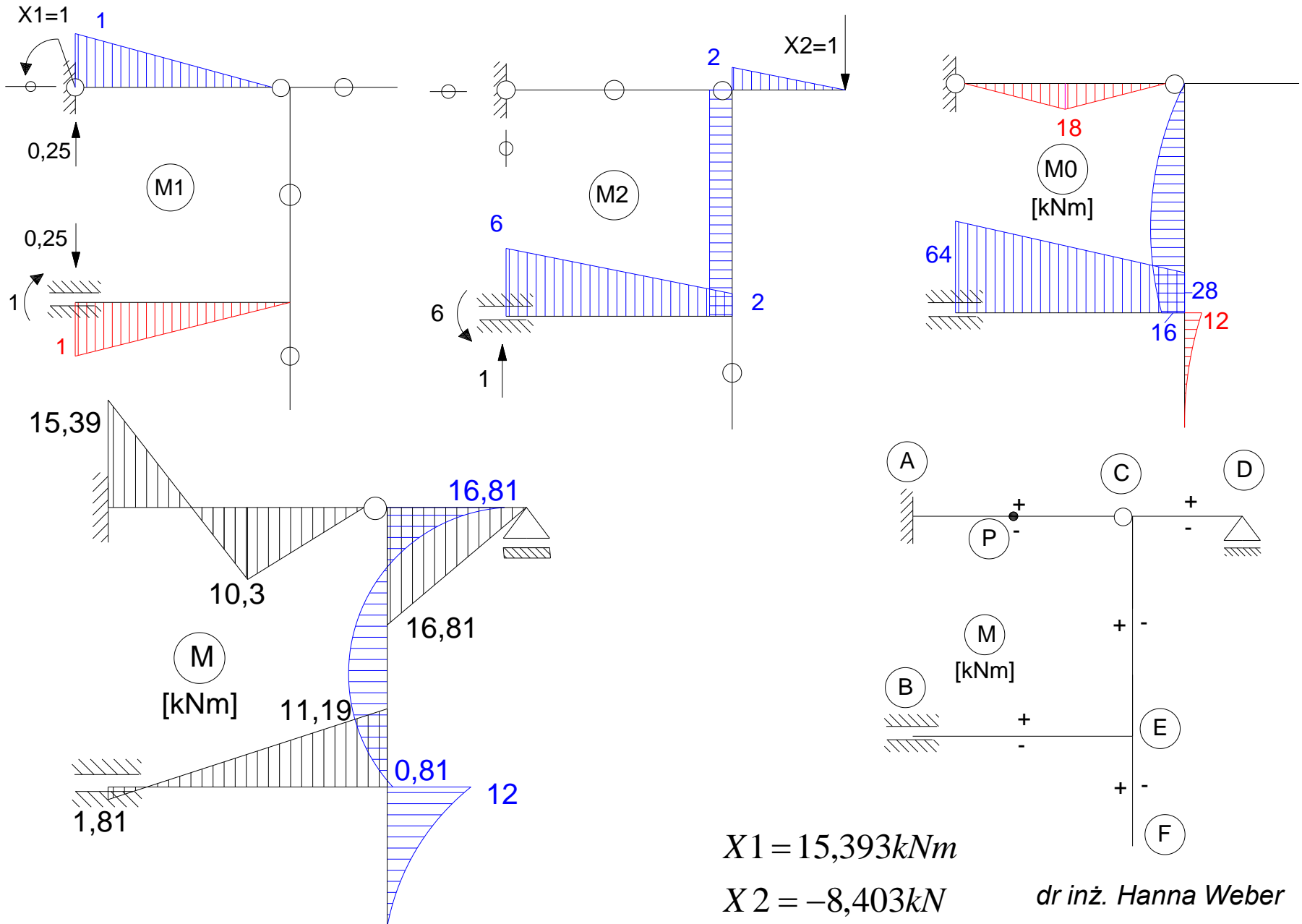
$$X_2 = -8,403 \text{ kN}$$



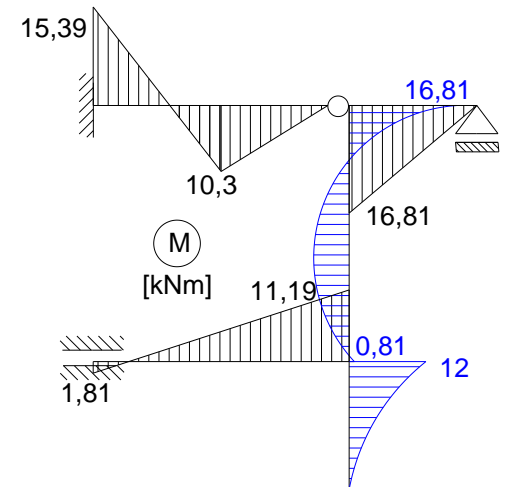
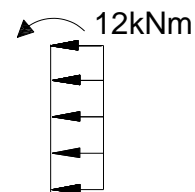
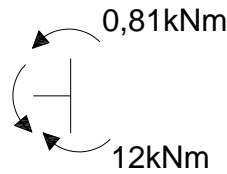
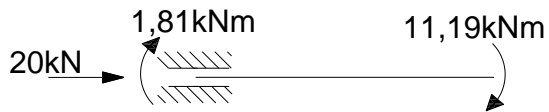
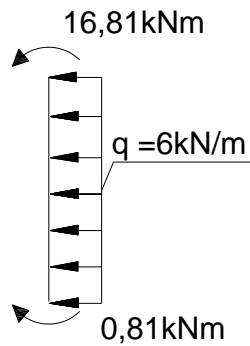
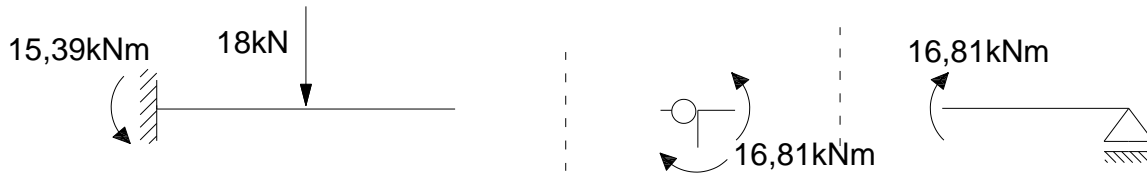
Wyznaczenie końcowego wykresu momentów:

$$M_i = M_{i1} \cdot X_1 + M_{i2} \cdot X_2 + M_0$$

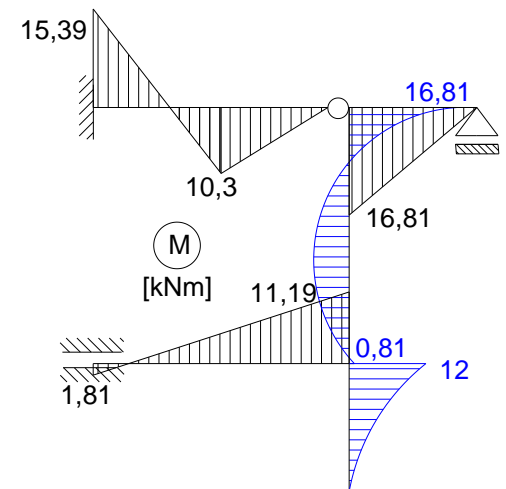
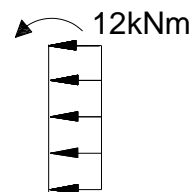
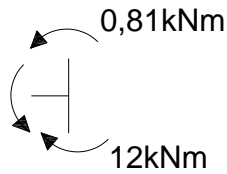
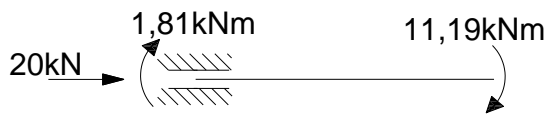
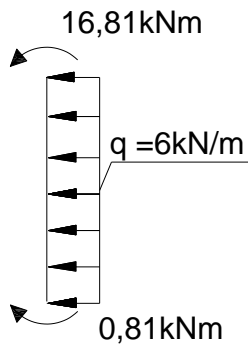
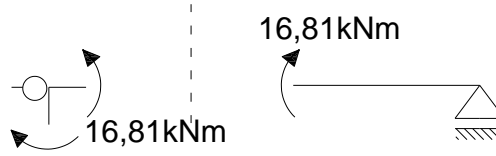
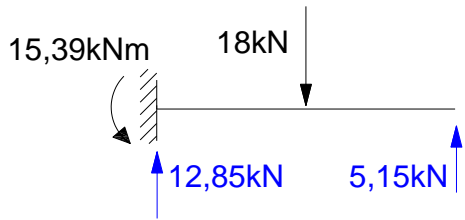
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



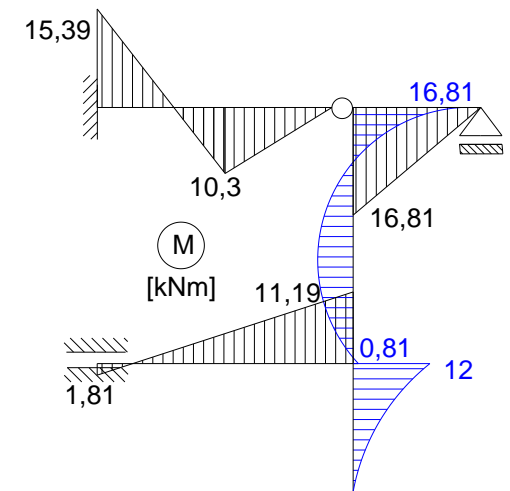
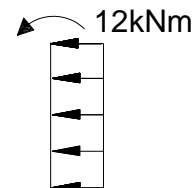
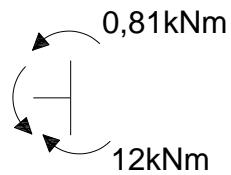
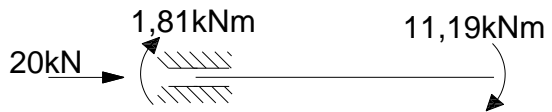
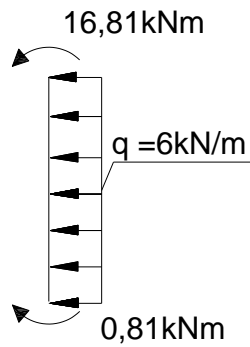
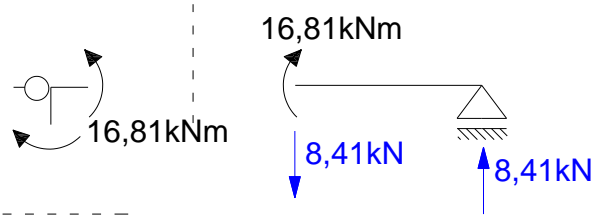
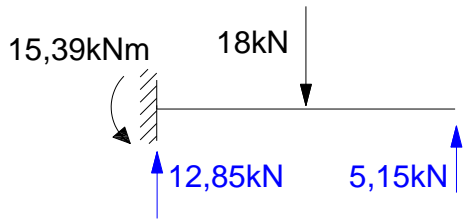
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



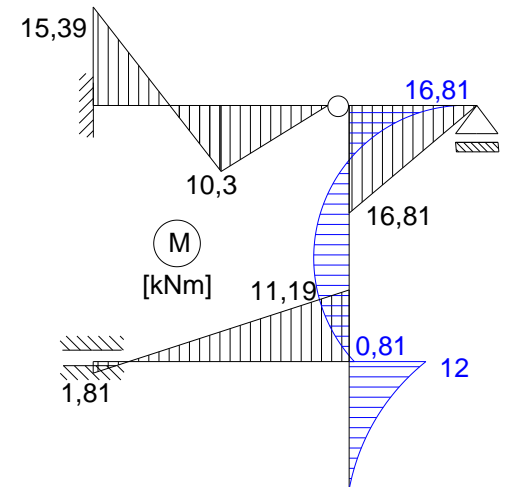
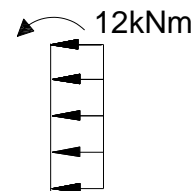
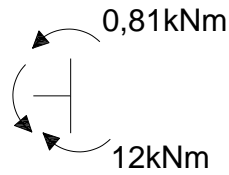
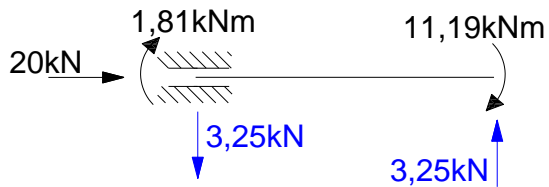
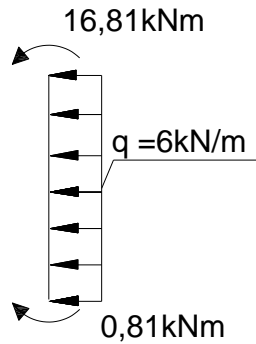
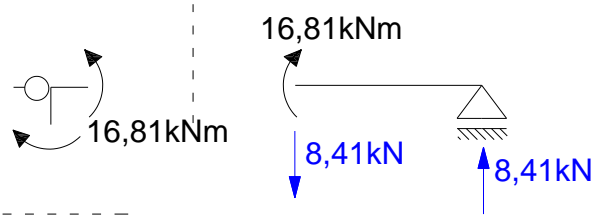
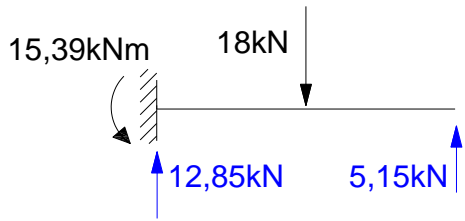
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



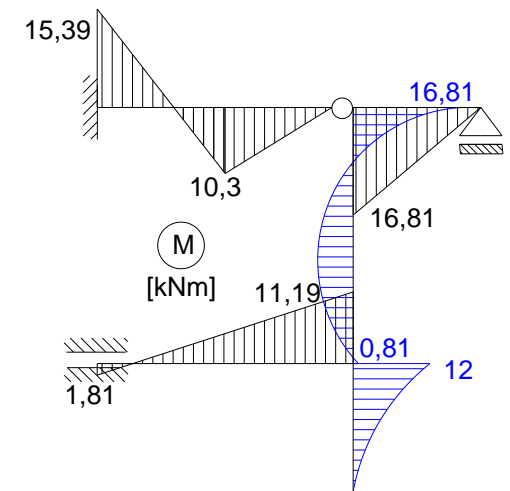
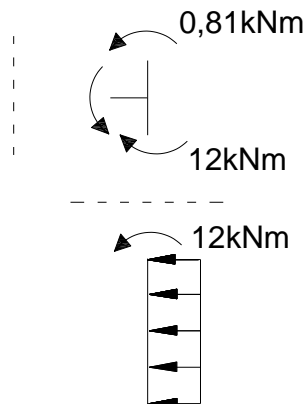
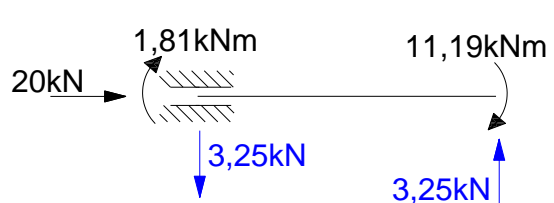
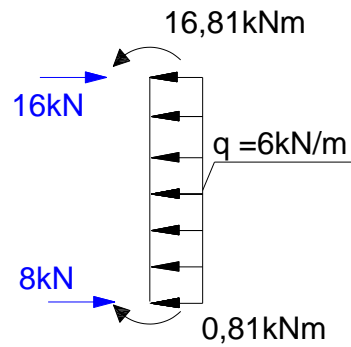
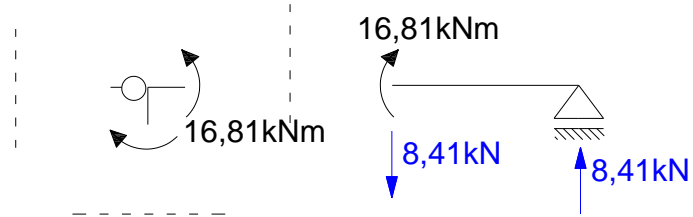
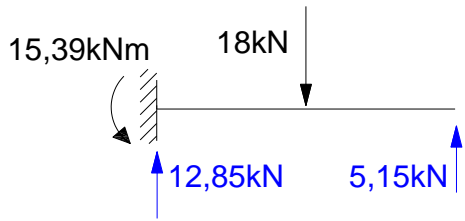
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



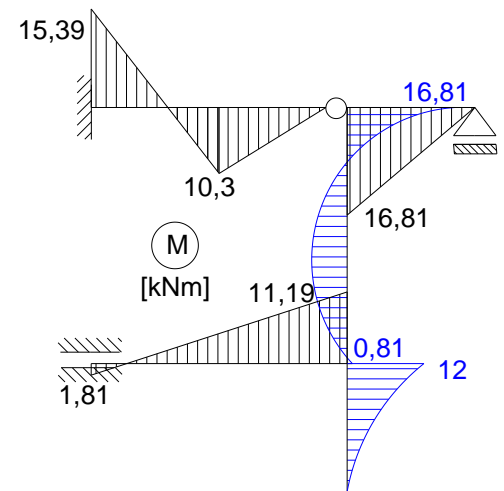
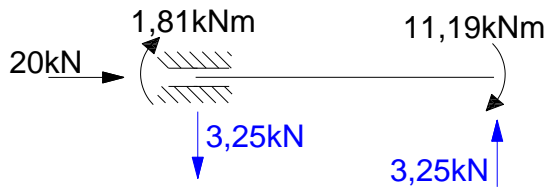
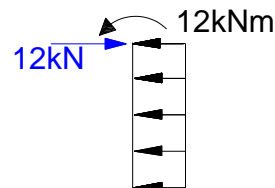
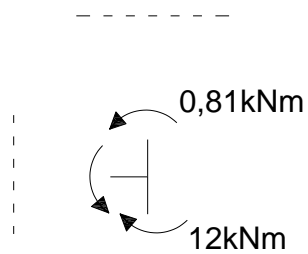
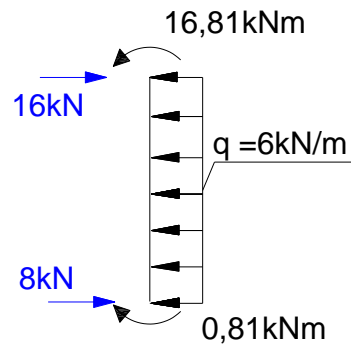
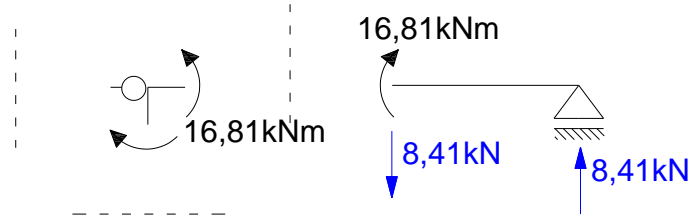
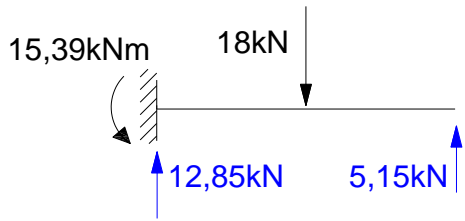
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



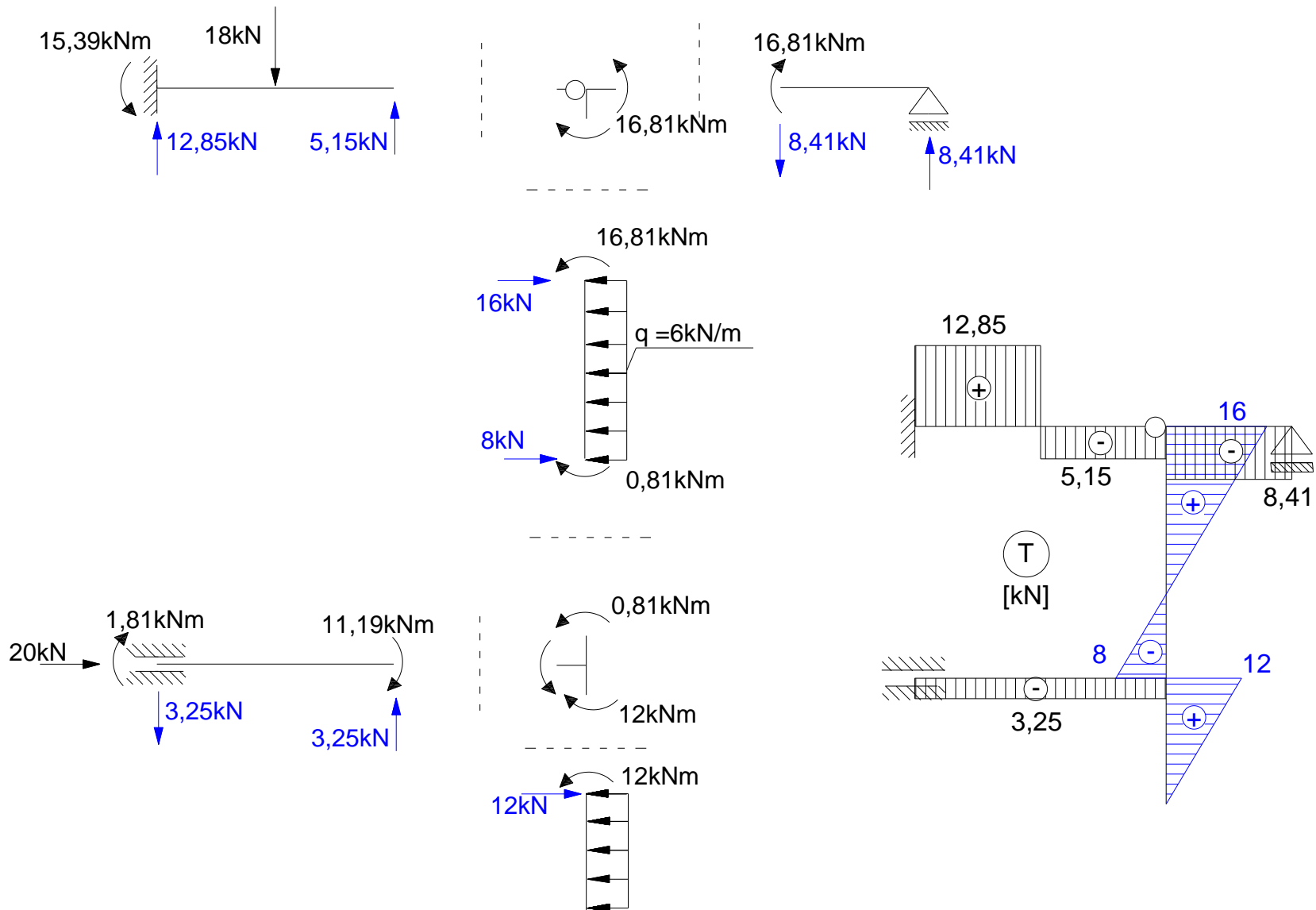
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



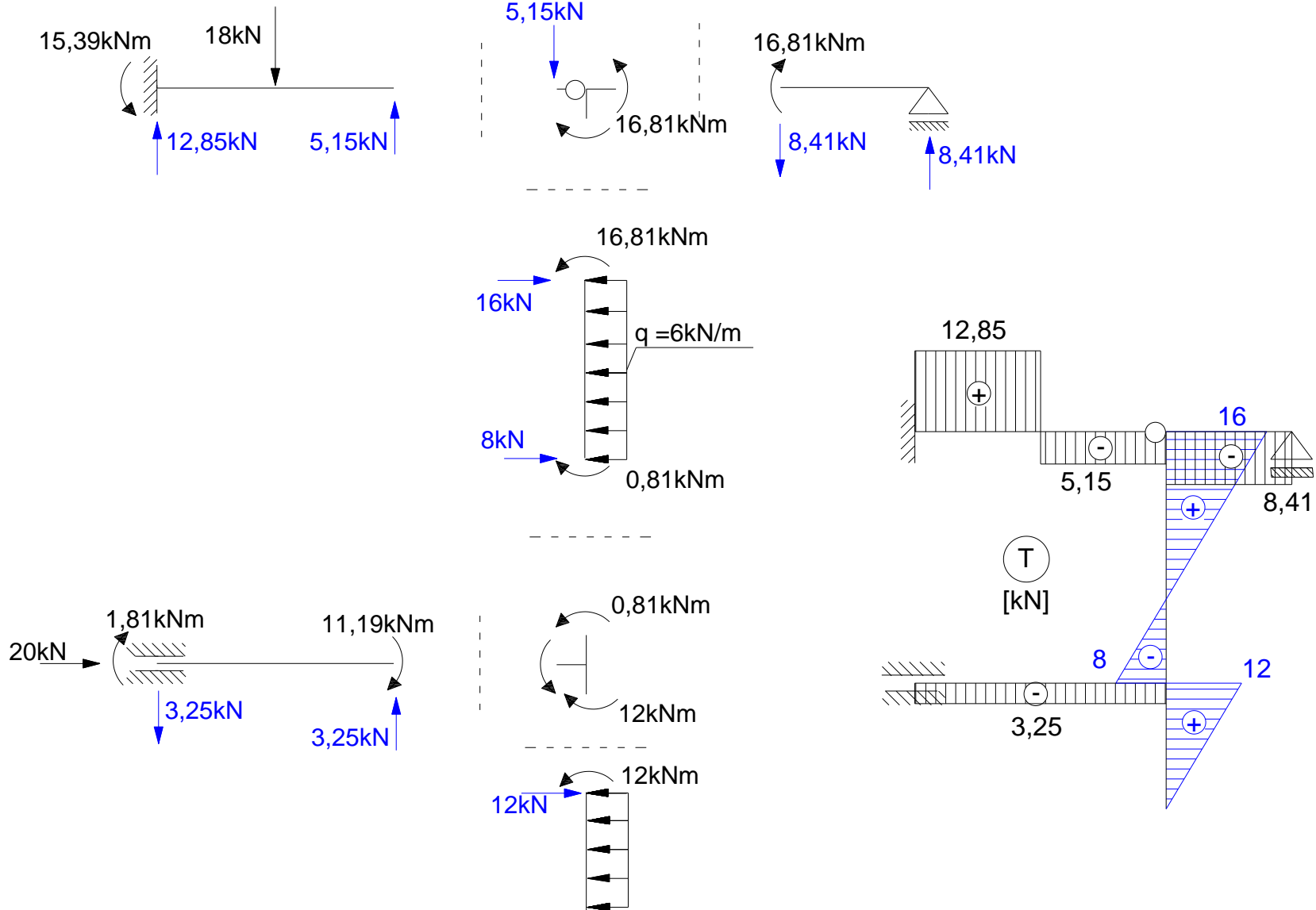
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



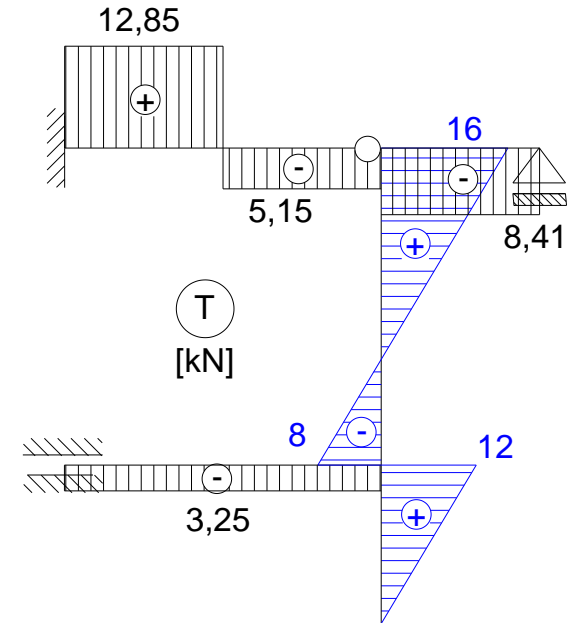
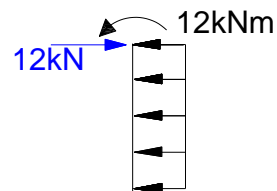
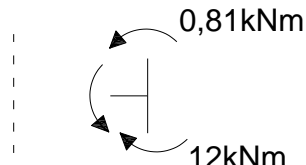
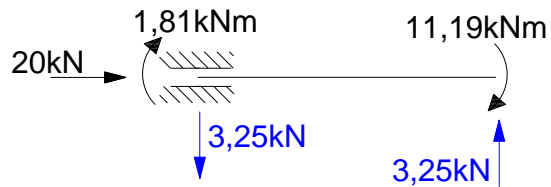
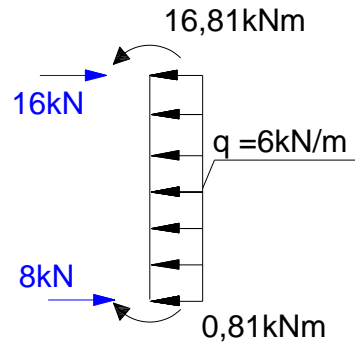
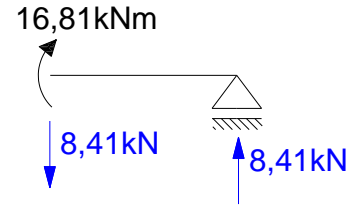
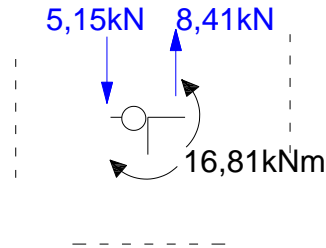
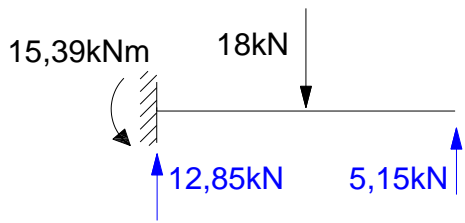
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



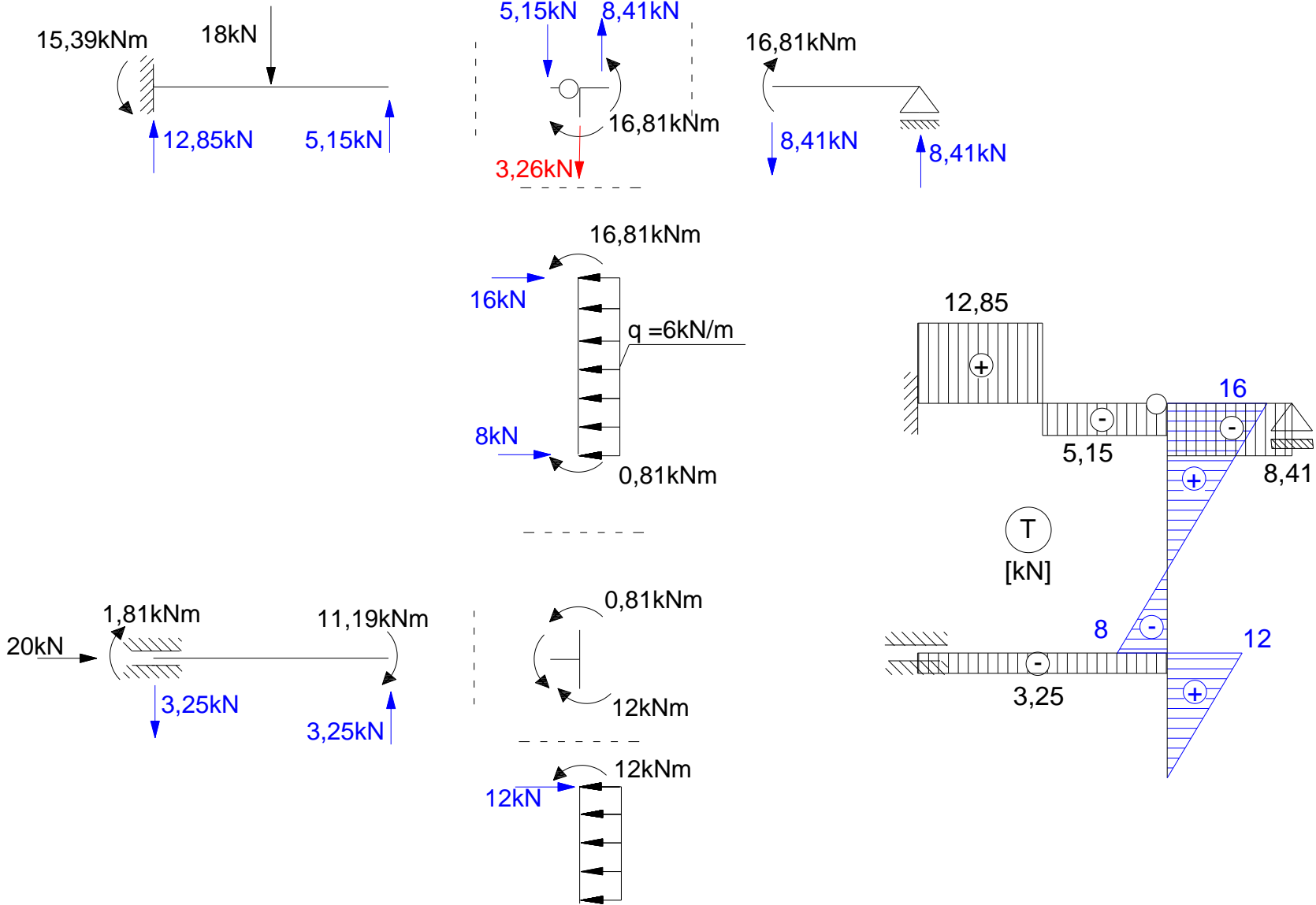
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



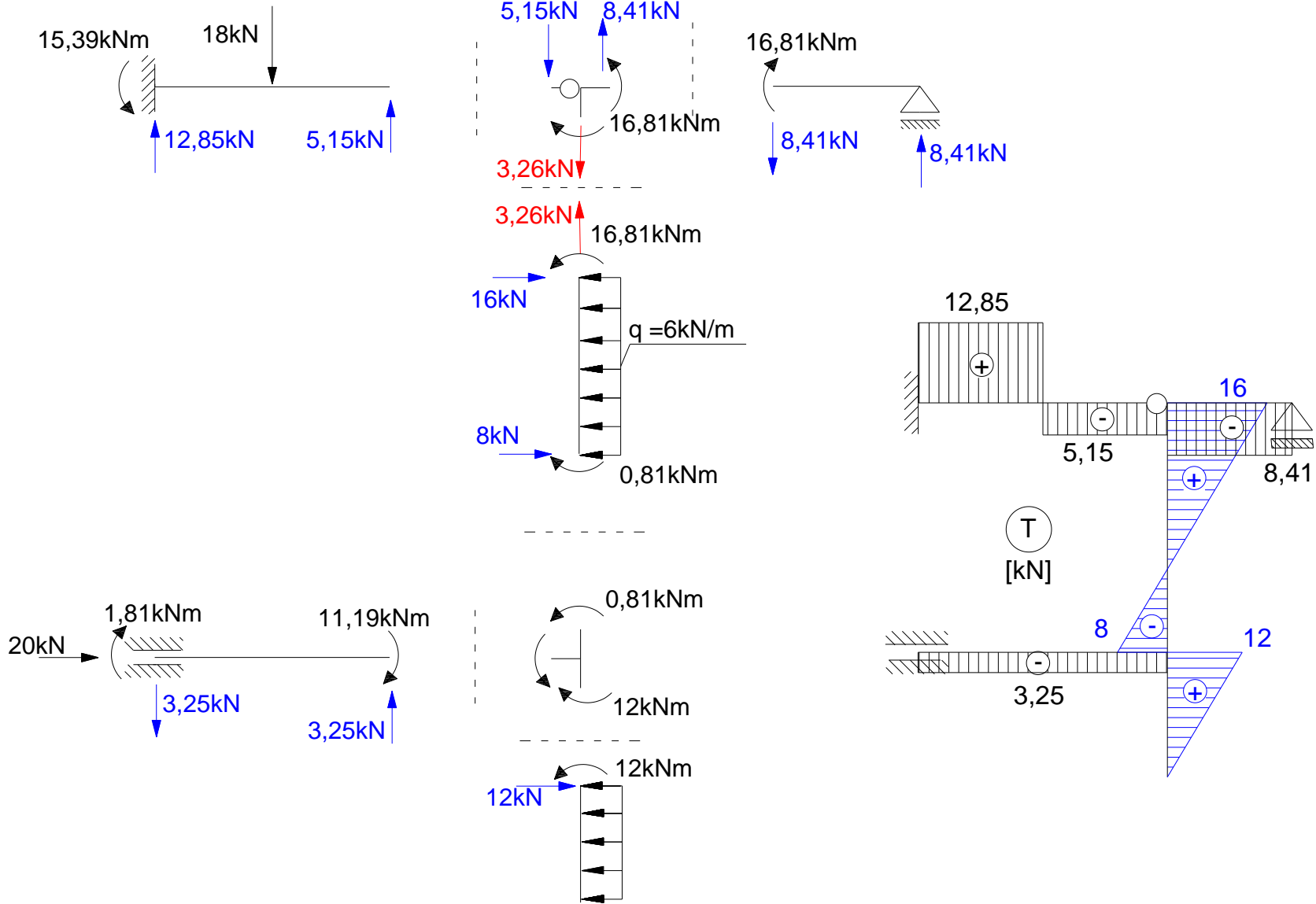
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



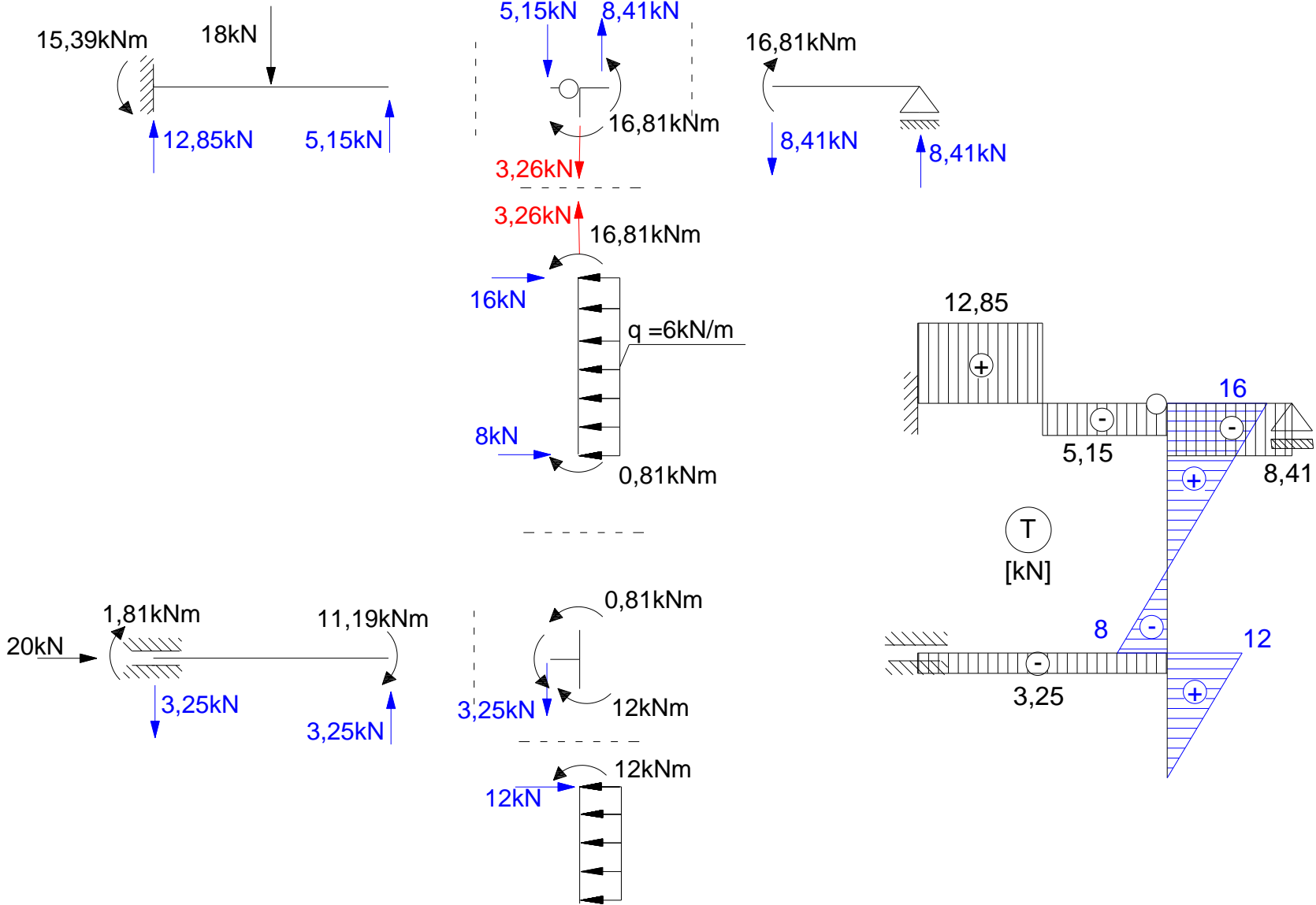
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



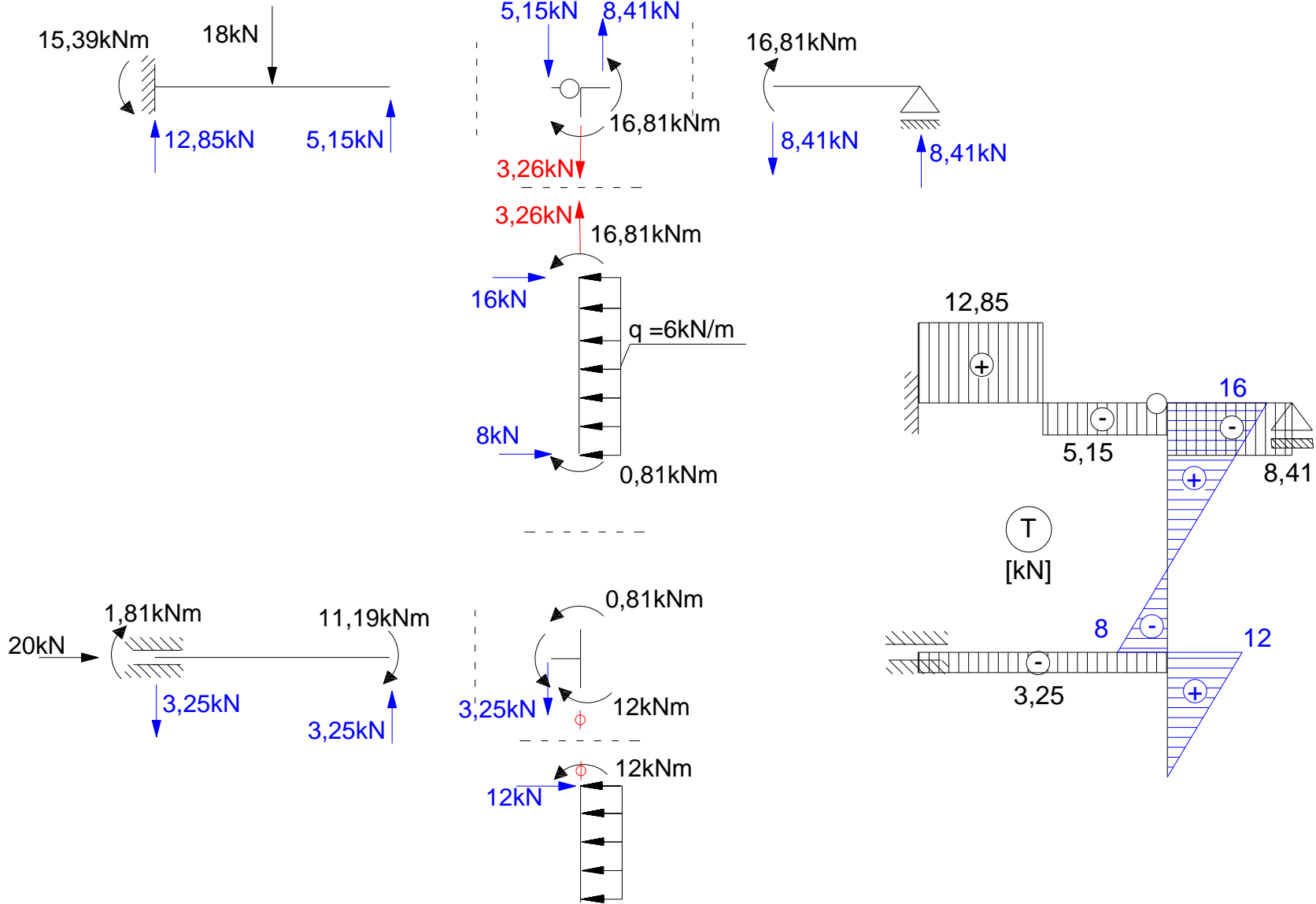
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



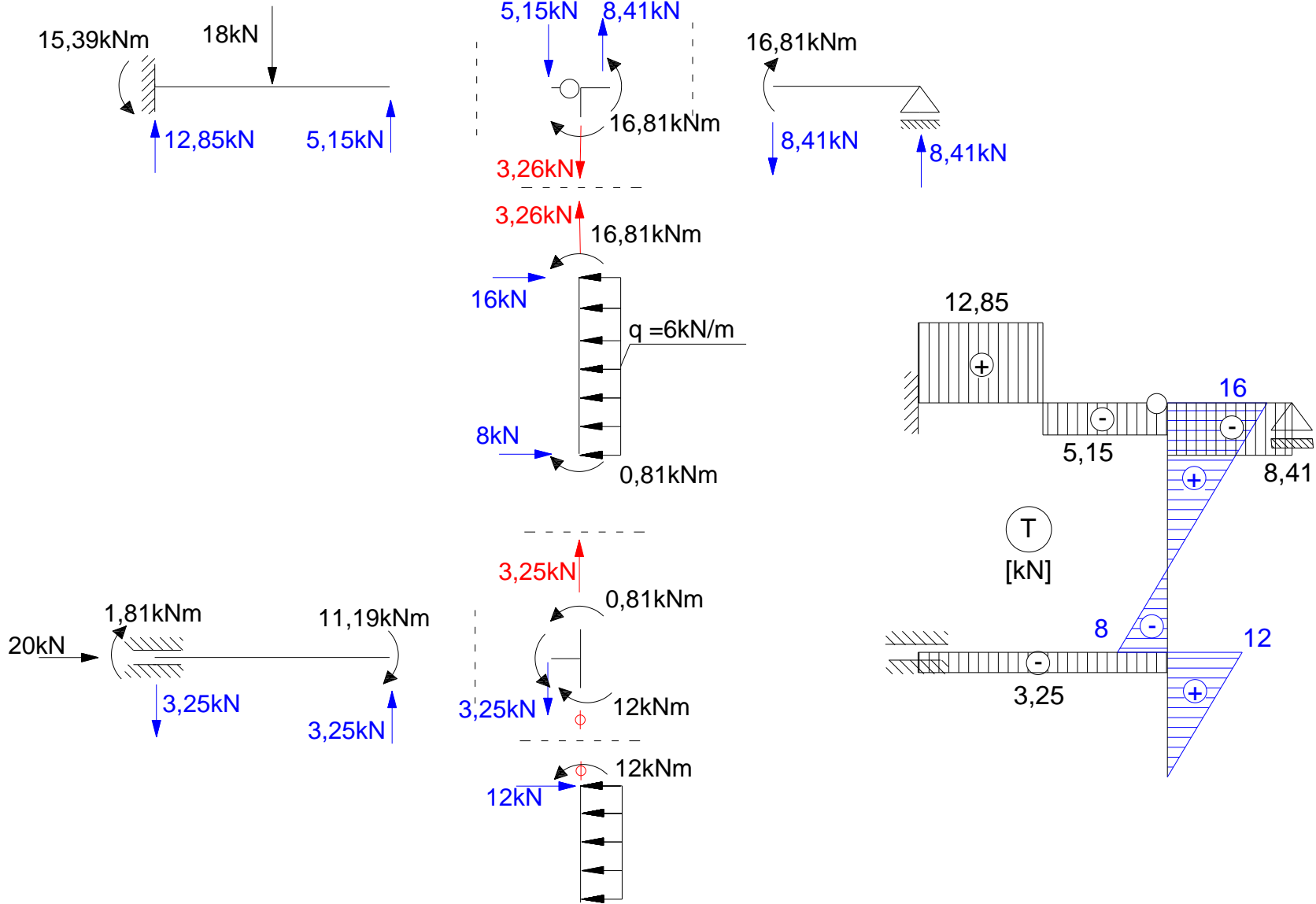
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



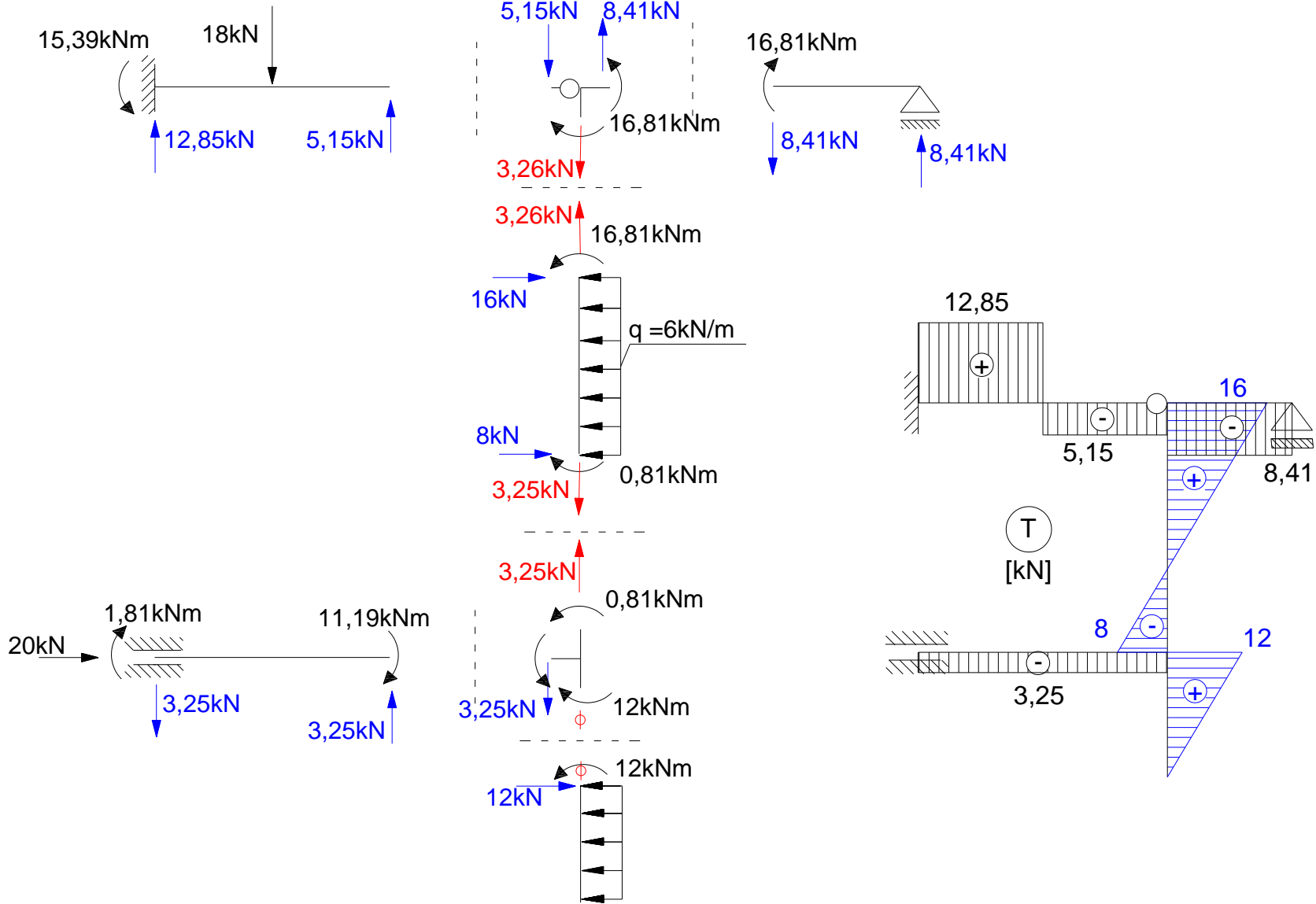
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



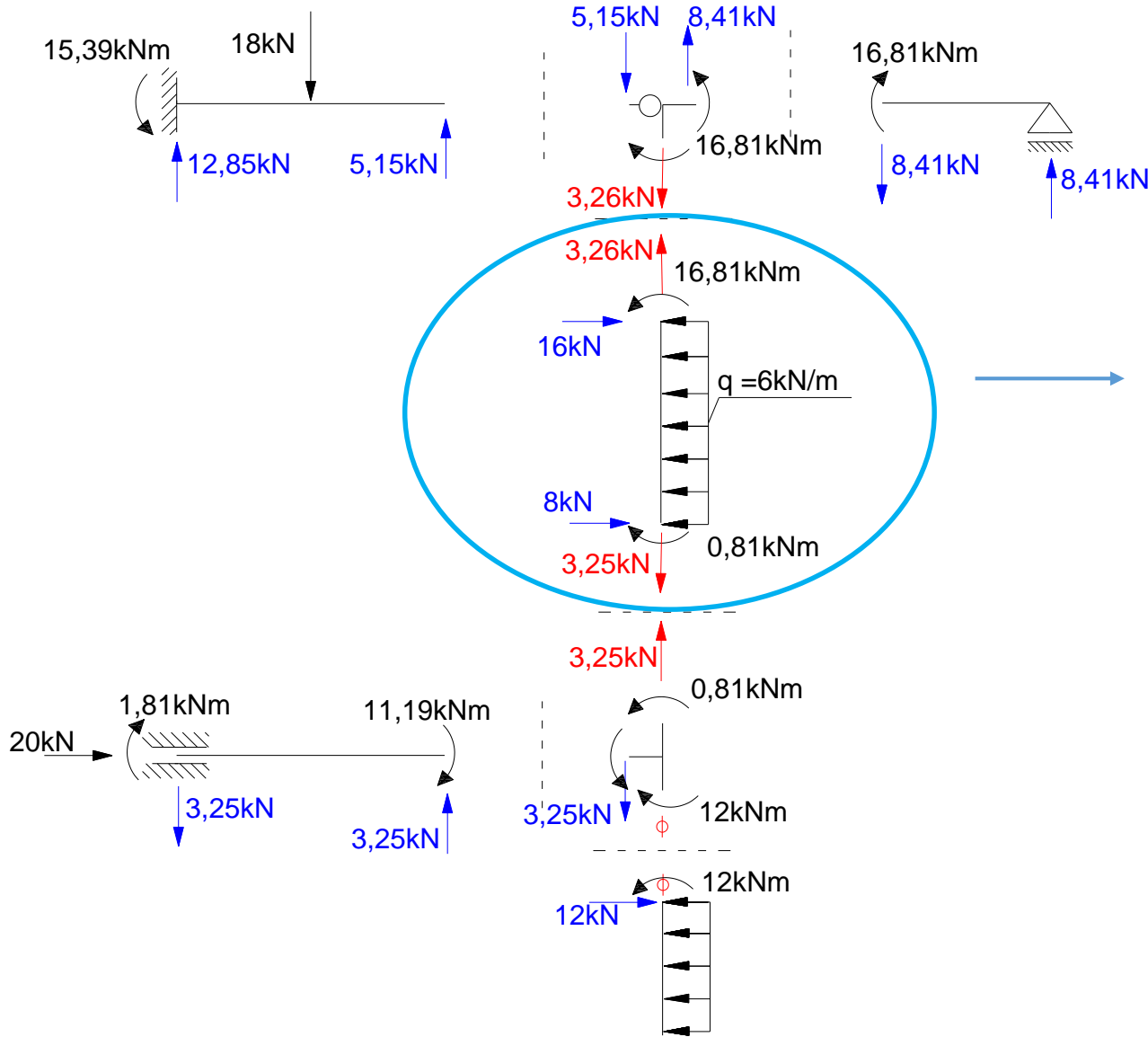
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

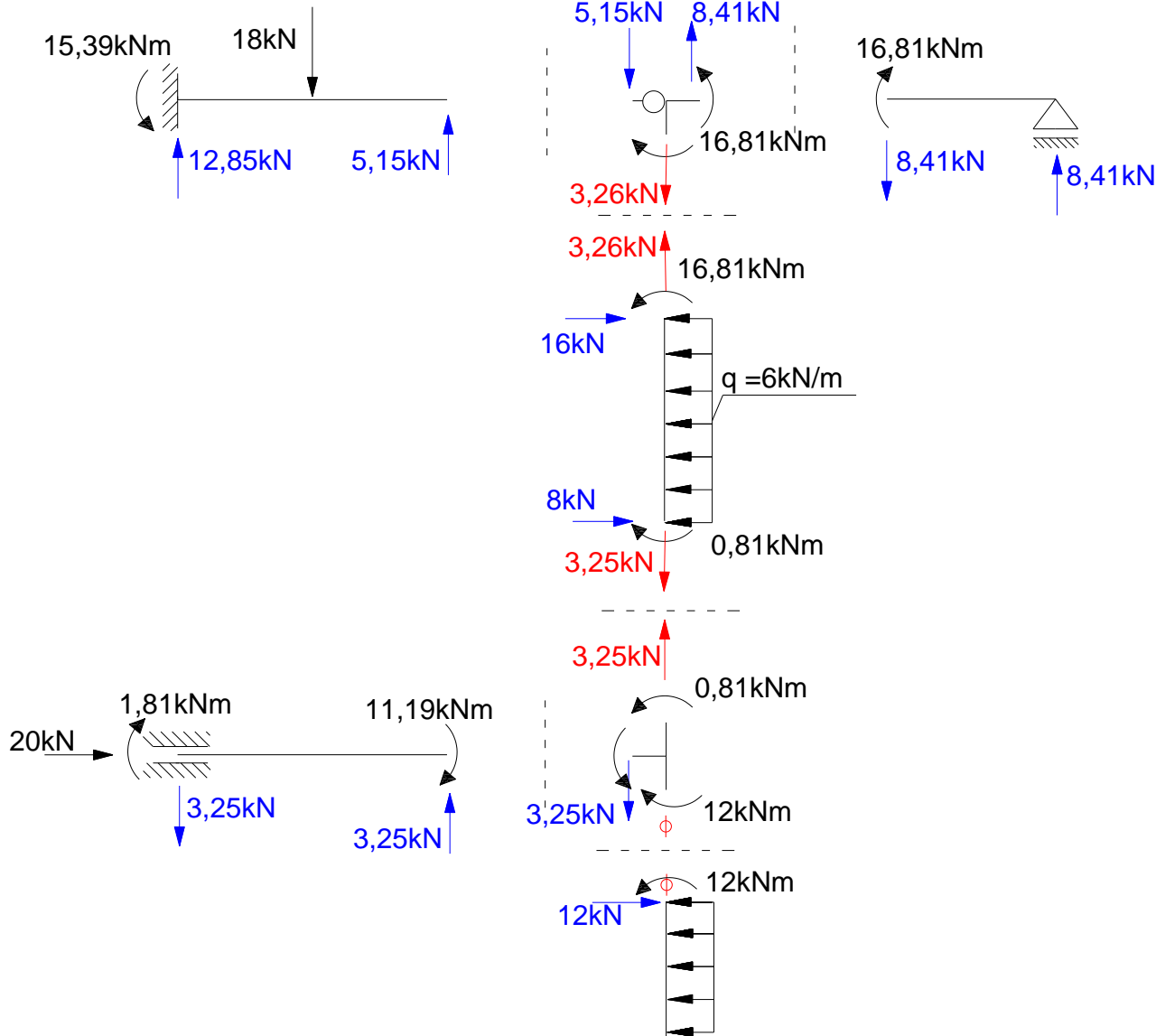


Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:

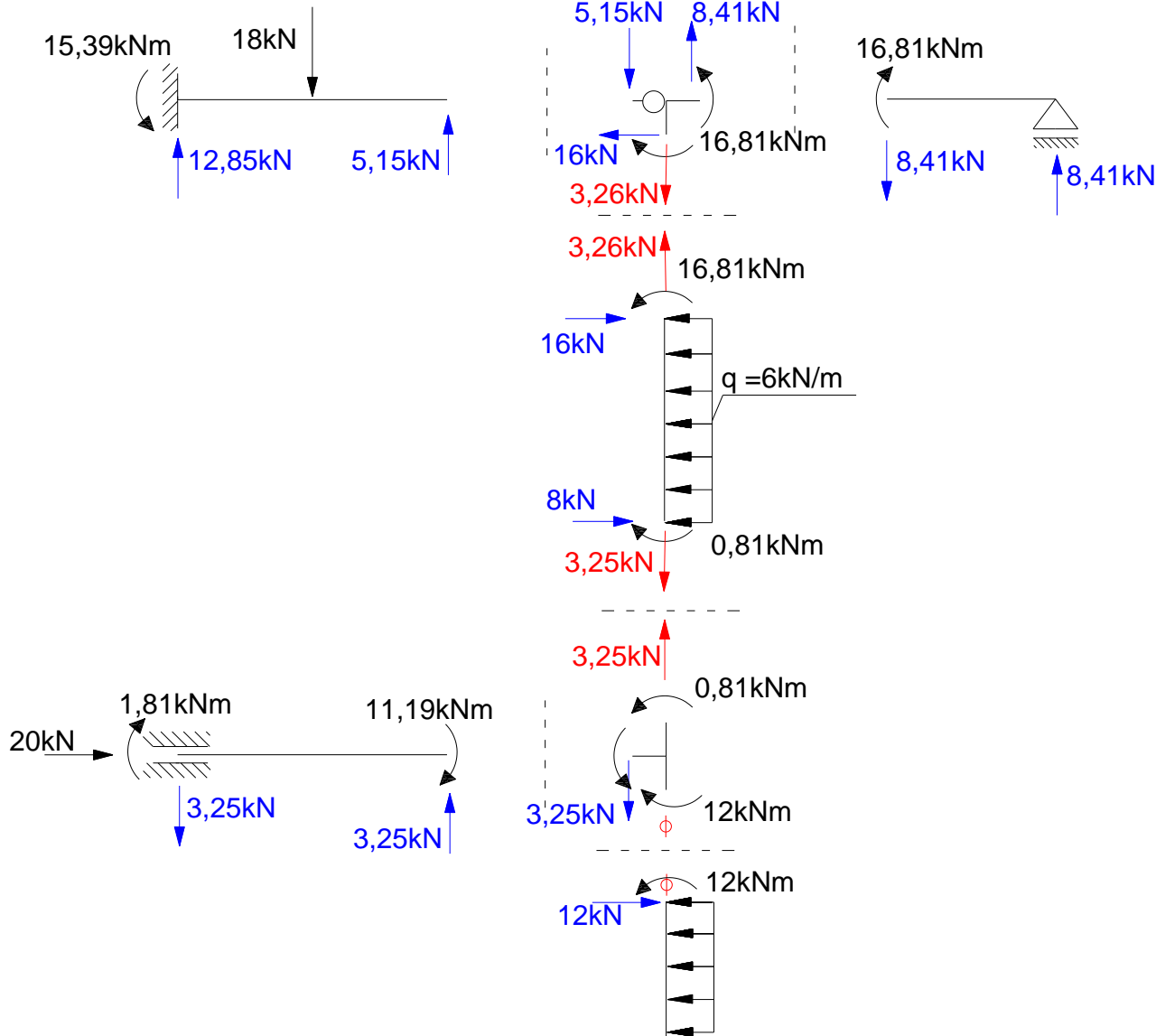


Różnica sił wynika z zaokrążeń wyników

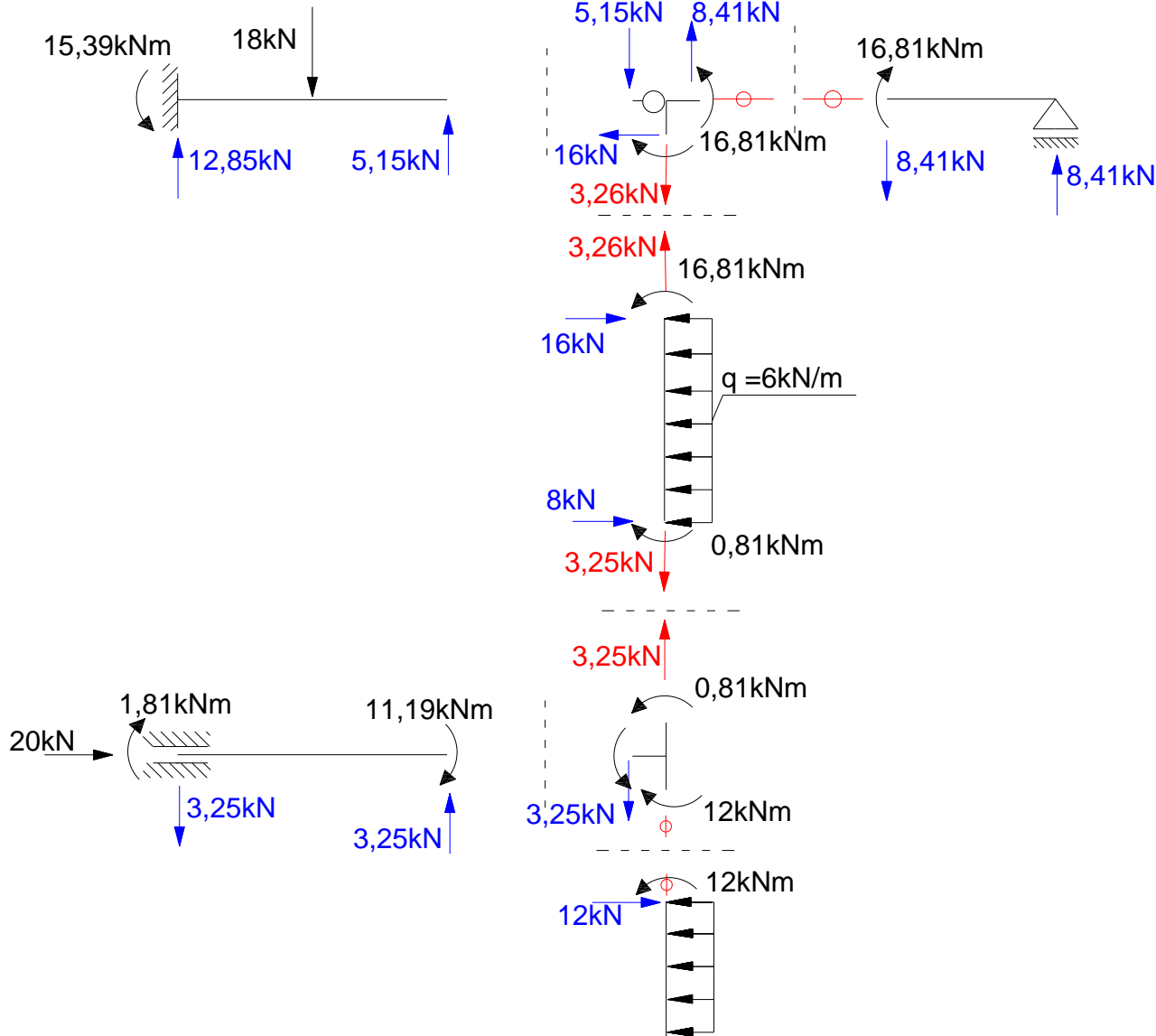
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



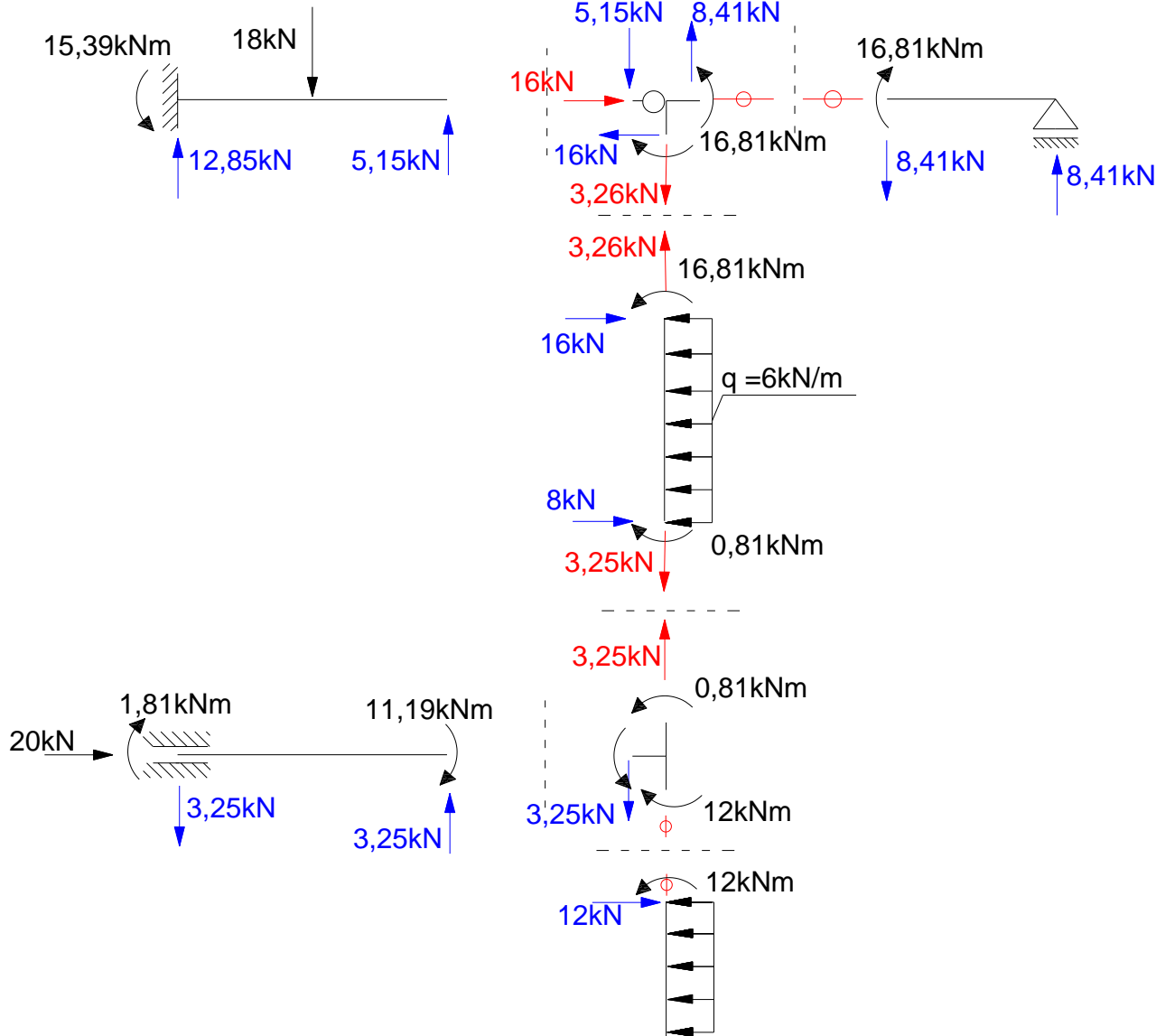
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



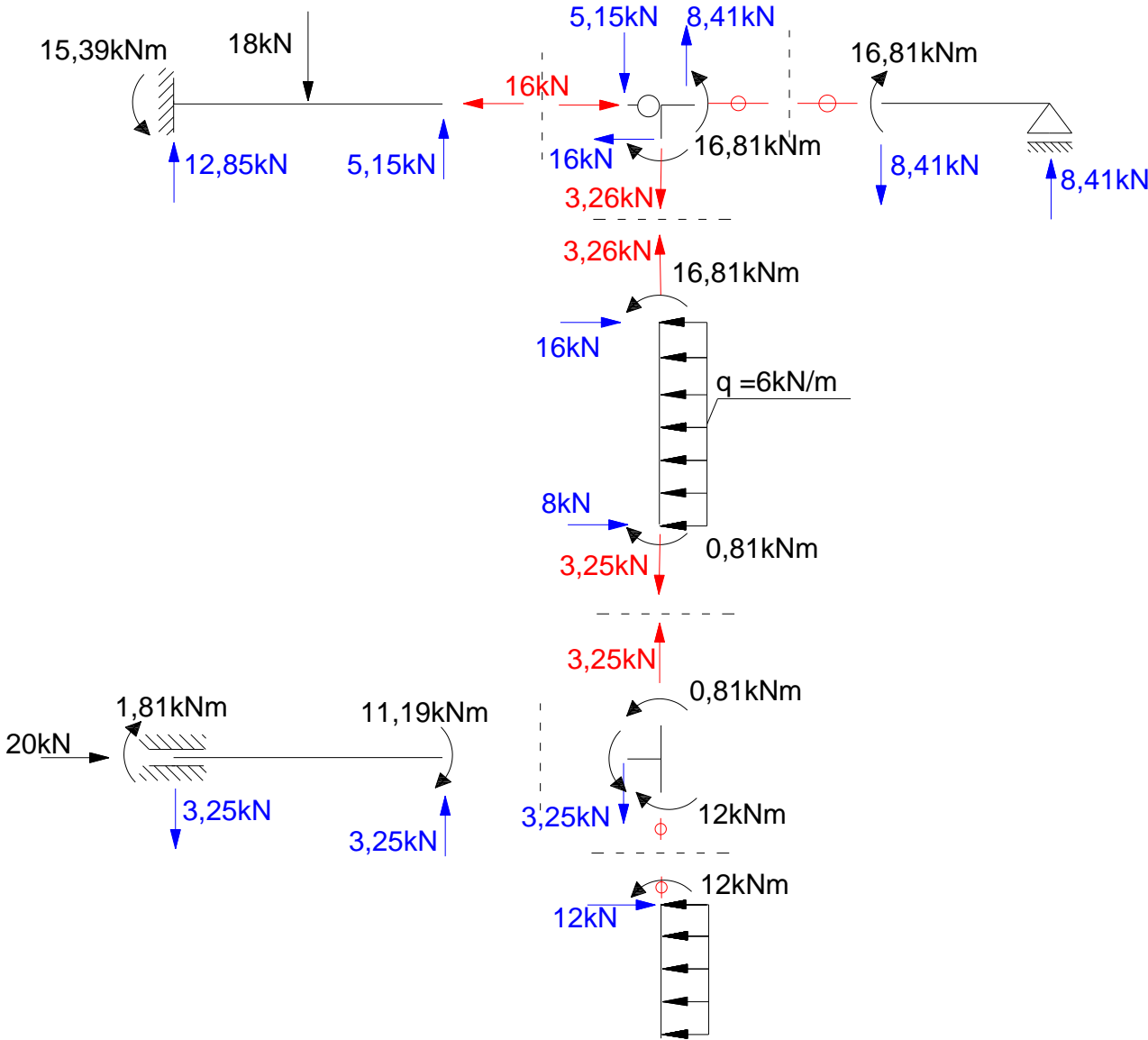
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



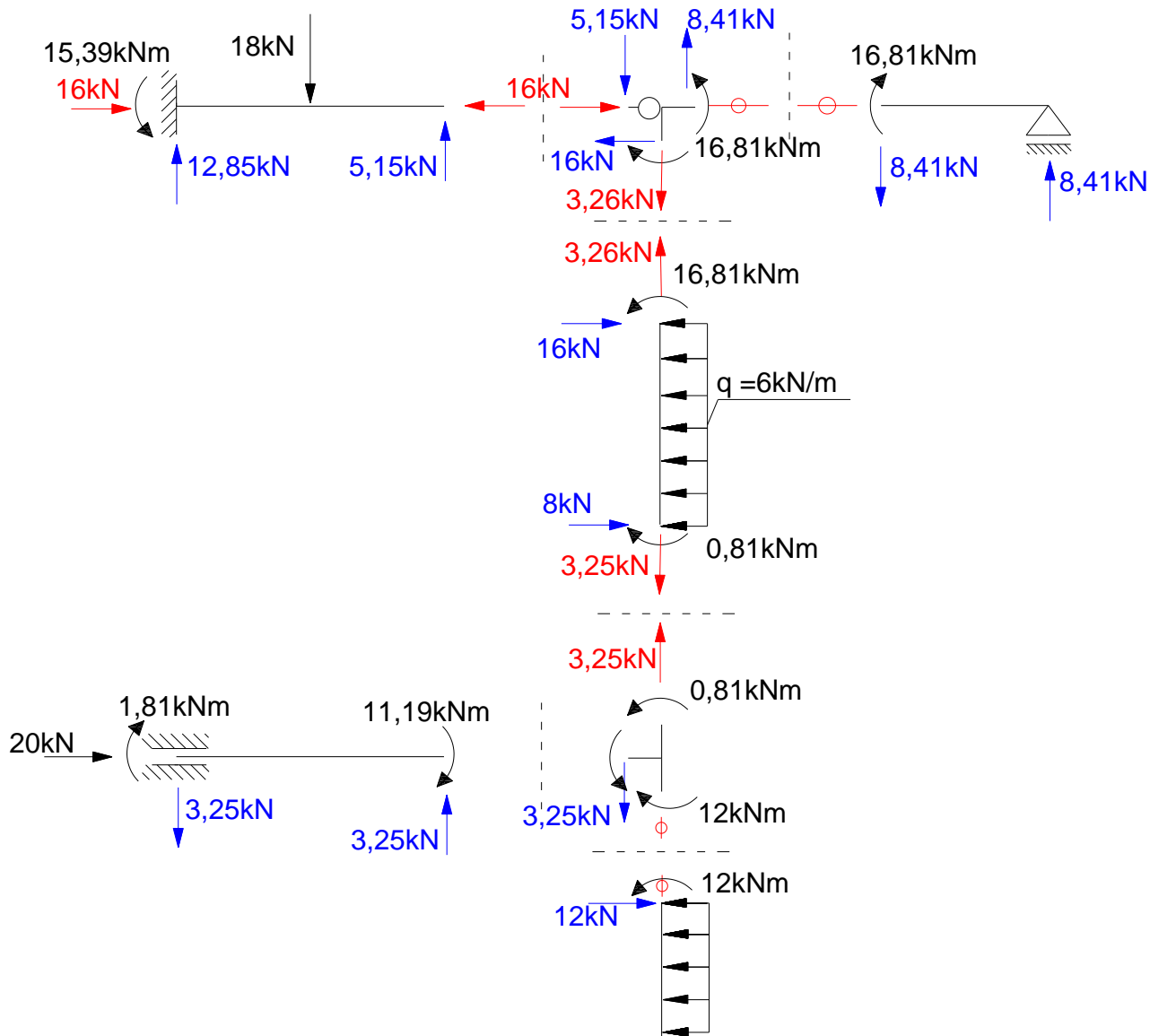
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



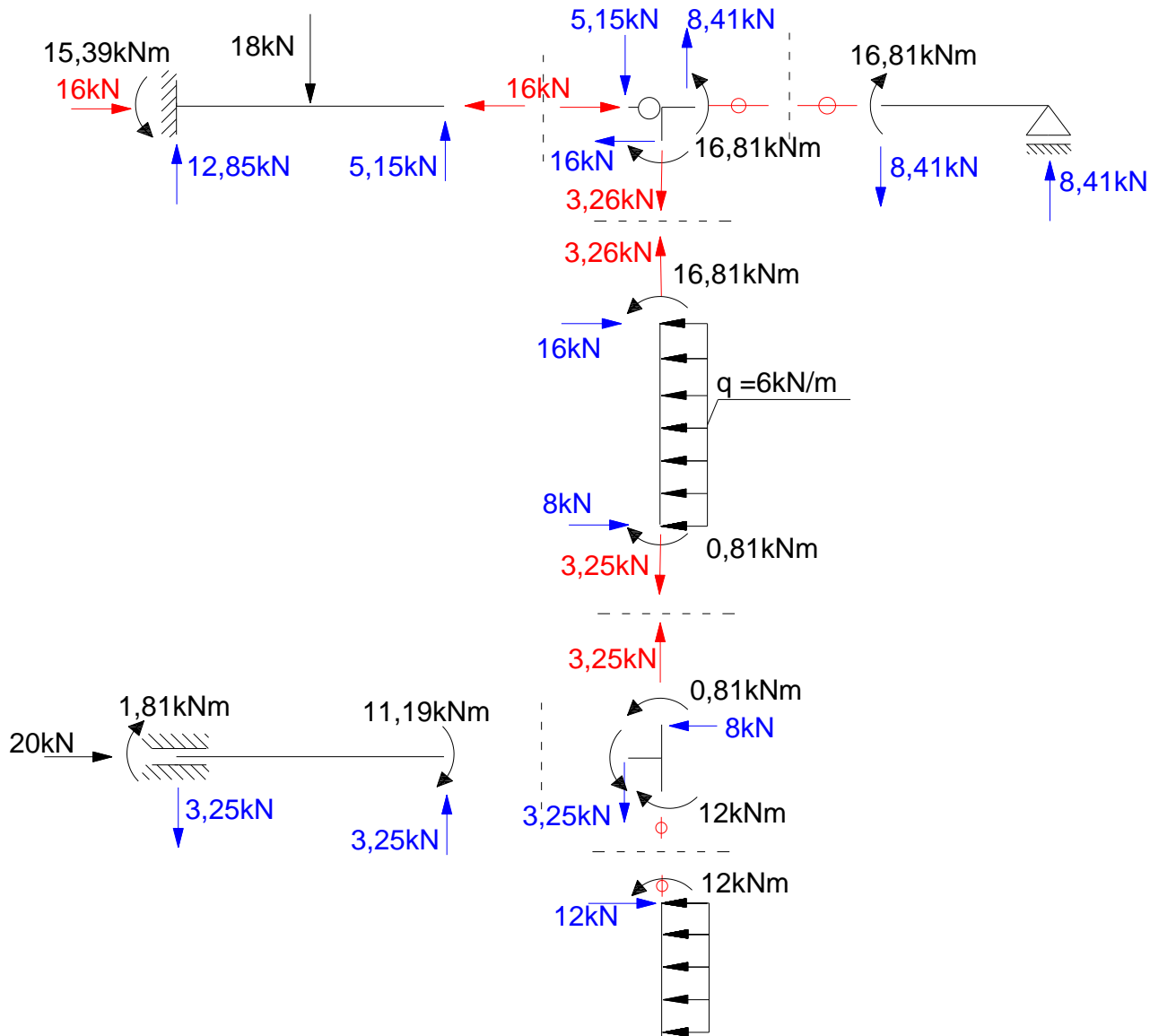
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



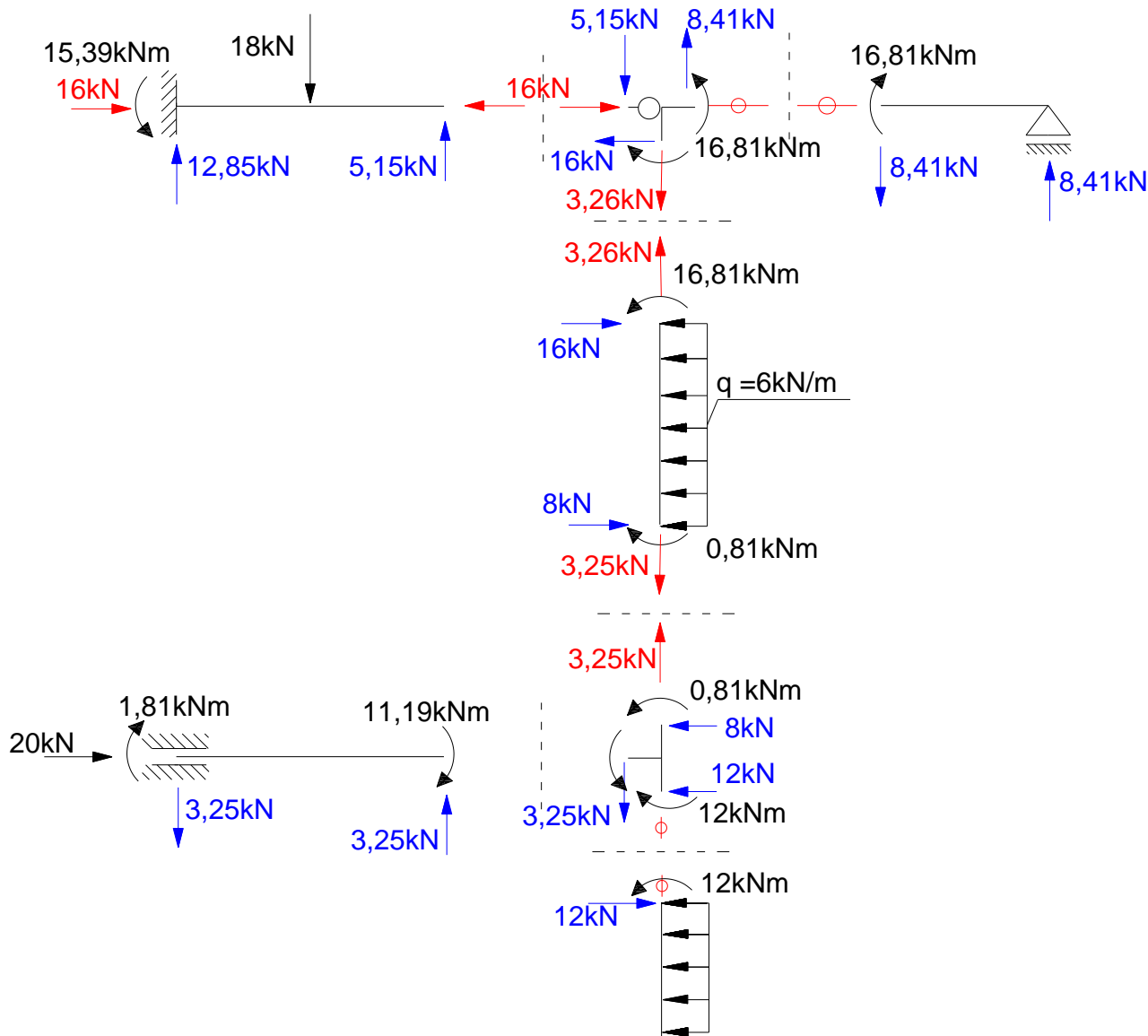
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



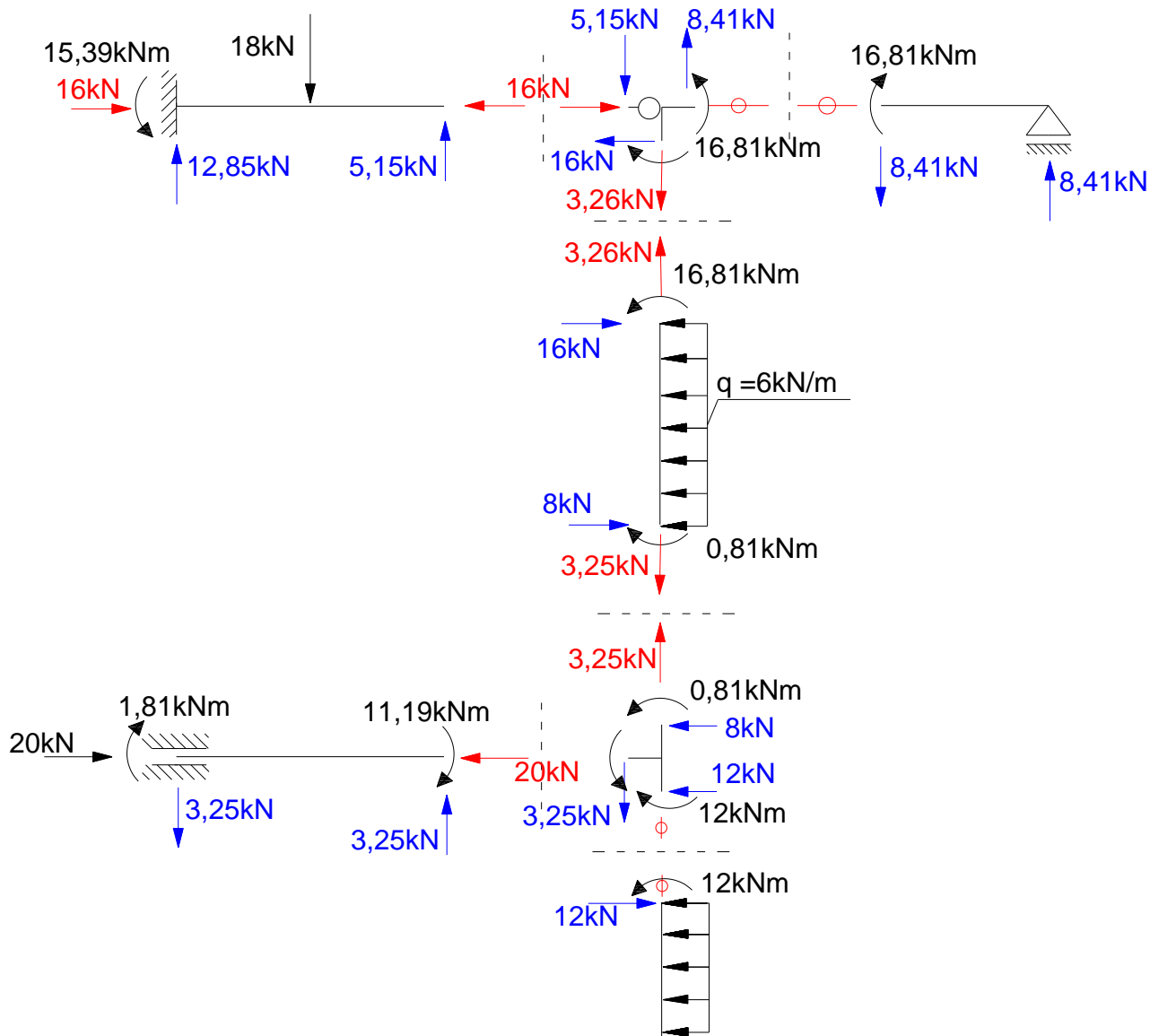
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



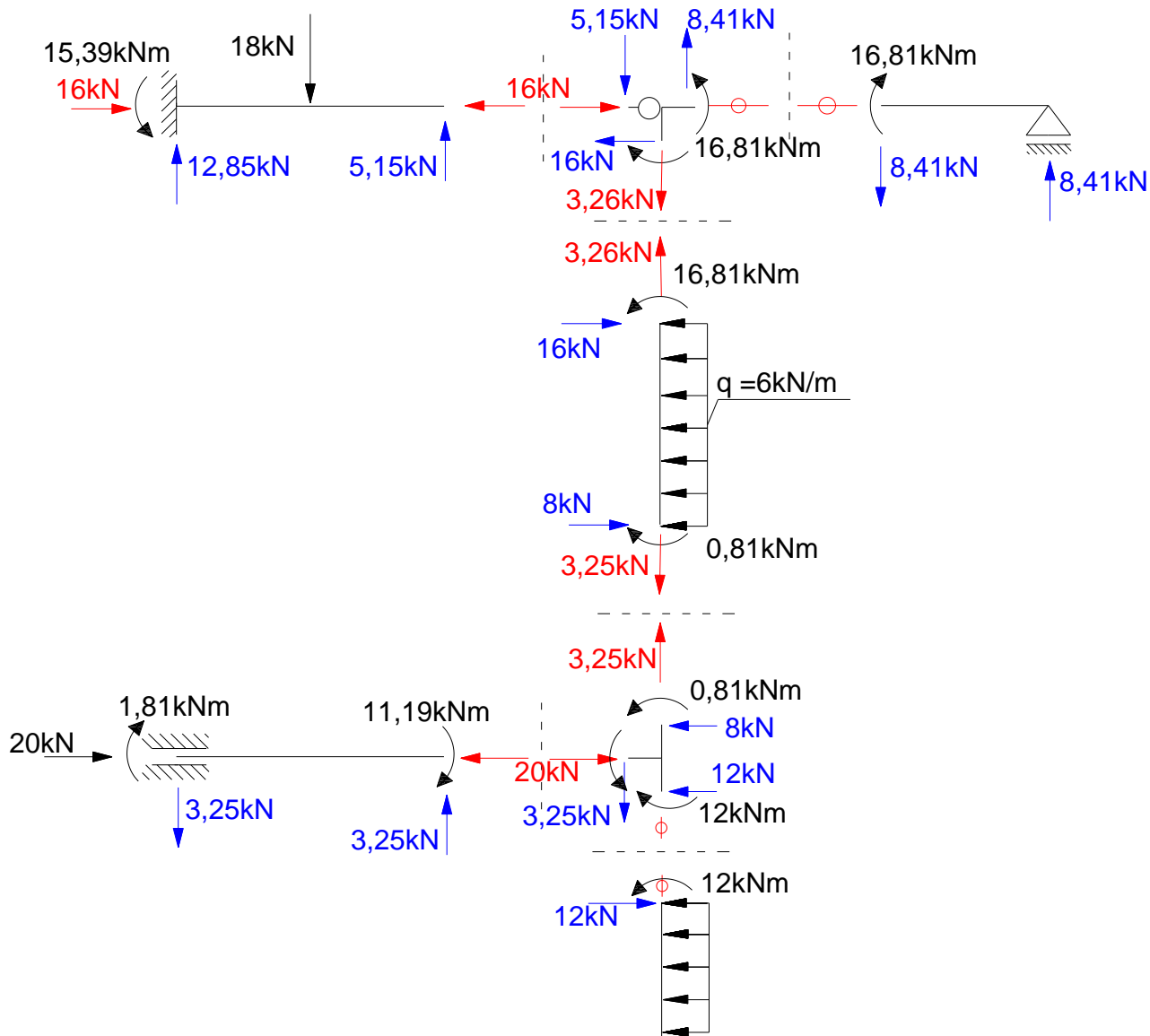
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



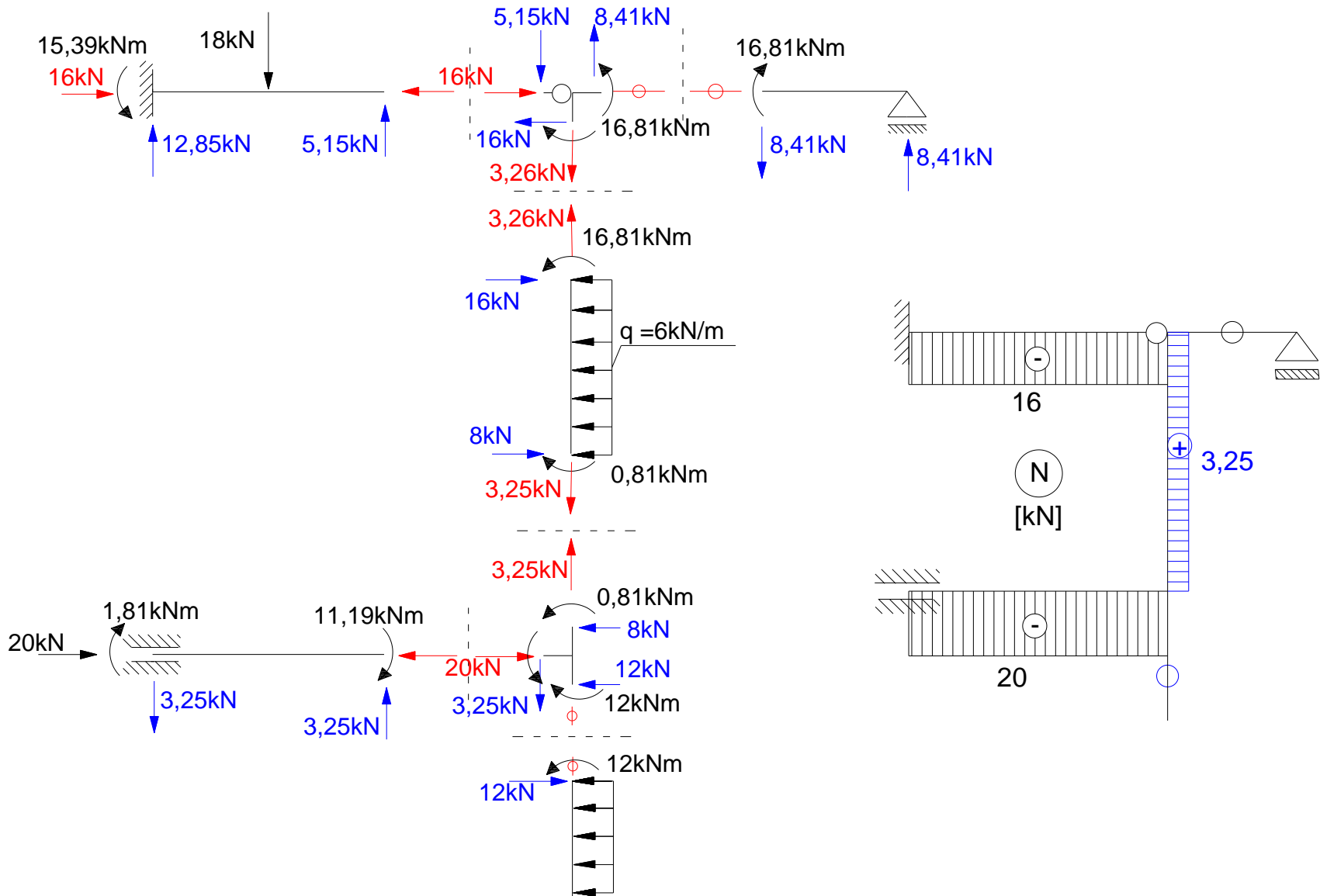
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



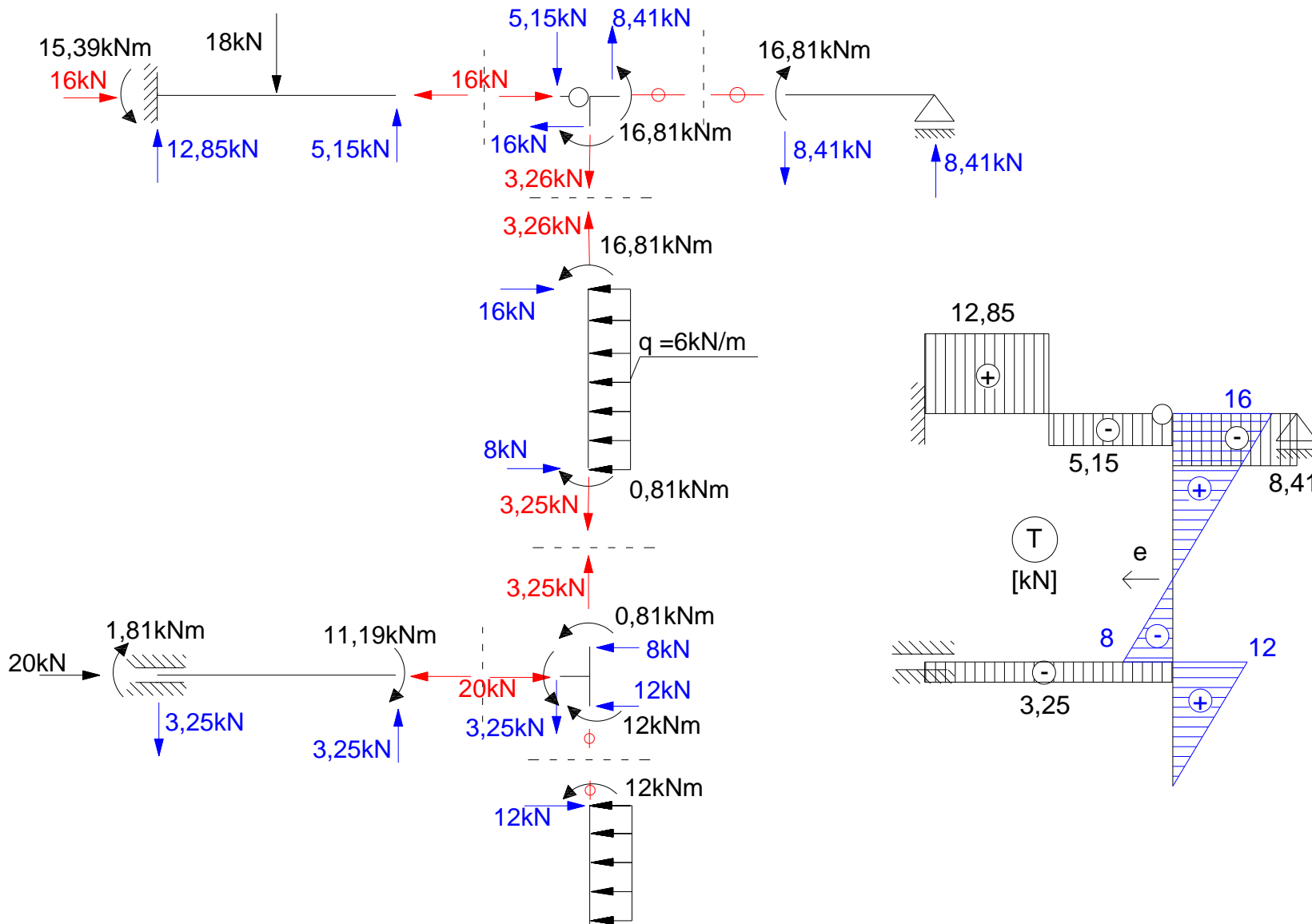
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



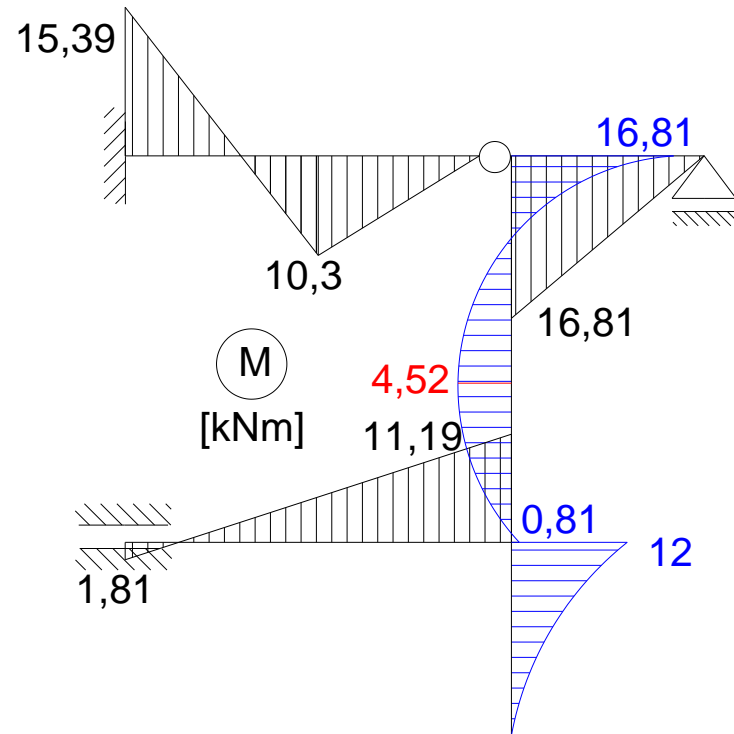
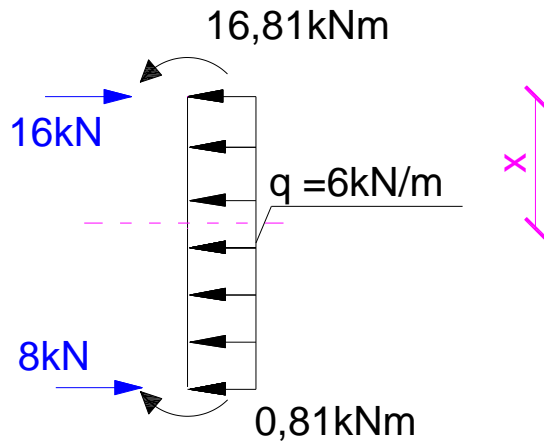
Wyznaczenie sił T i N na podstawie wykresu momentów:



Wyznaczenie ekstremum momentów:



Wyznaczenie ekstremum momentów:



$$T[x] = 16 - 6x = 0$$

↓

$$x = \frac{16}{6} = 2,67 \text{ m}$$

$$M(x = 2,677) = -16,81 + 16 \cdot 2,67 - 6 \cdot \frac{2,67^2}{2} = 4,52 \text{ kNm}$$

Twierdzenia redukcyjne:

I twierdzenie redukcyjne:

Aby obliczyć przemieszczenie w układzie statycznie niewyznaczalnym, mnożymy końcowy wykres momentów od obciążeń rzeczywistych, otrzymany dla układu statycznie niewyznaczalnego – M , przez wykres momentów od obciążenia wirtualnego postawionego na schemacie podstawowym \bar{M}_i .

$$\delta = \int_L \frac{M\bar{M}_i}{EI} dL$$

Zastosowanie:

- Sprawdzanie poprawności wykresu momentów dla ramy statycznie niewyznaczalnej,
- liczenie przemieszczeń, gdy w treści zadania należy wykonać końcowy wykres momentów.

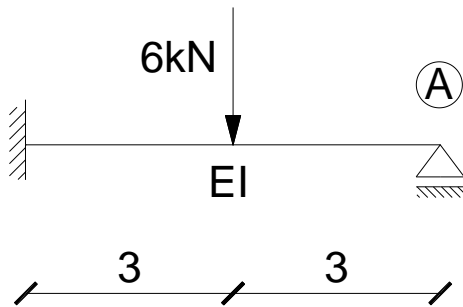
Twierdzenia redukcyjne:

I twierdzenie redukcyjne – tok postępowania przy liczeniu przemieszczeń:

- liczymy stopień statycznej niewyznaczalności układu,
- dobieramy schemat podstawowy statycznie wyznaczalny,
- rysujemy wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych i od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego,
- liczymy współczynniki układu równań metody sił,
- rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy końcowy wykres momentów M
- rysujemy wykres momentów od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego \bar{M}_i ,
- liczymy wartość przemieszczenia:

$$\delta = \int_L \frac{M\bar{M}_i}{EI} dL$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.



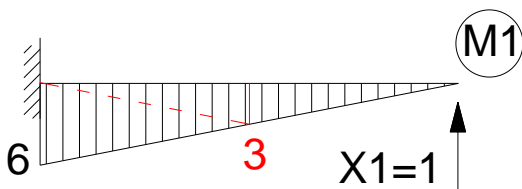
Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$n_s = 4 - 0 - 3 = 1$$

Schemat podstawowy statycznie wyznaczalny:

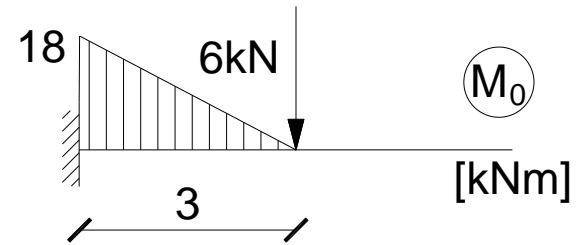


Wykres jednostkowy od nadliczbowej:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

Wykres od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego:



$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = -\frac{135}{EI}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

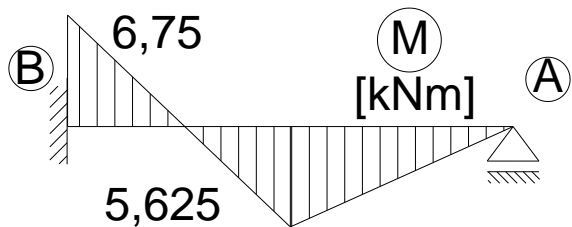
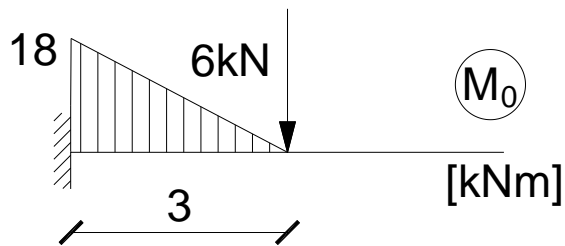
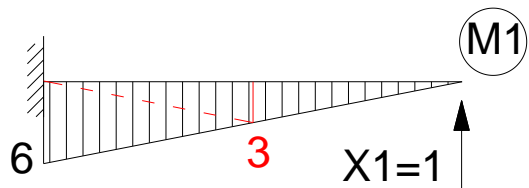
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Rozwiązanie równania metody sił:

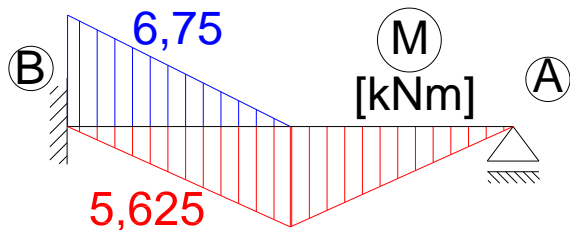
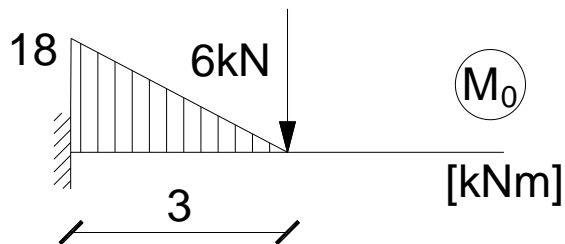
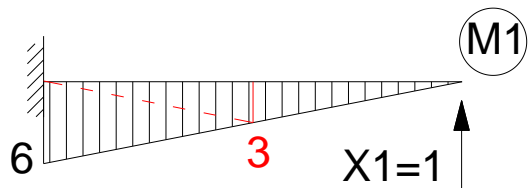
$$\delta_{11} \cdot X1 + \delta_{10} = 0$$

$$\frac{72}{EI} \cdot X1 - \frac{135}{EI} = 0$$

$$X1 = 1,875 \text{ kN}$$

Zadanie. Wyznaczyć kąt obrotu na podporze A z pierwszego twierdzenia redukcyjnego.

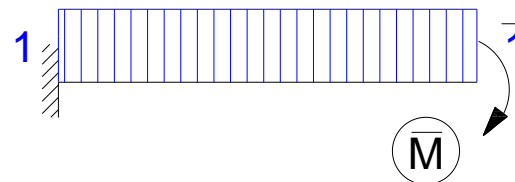
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Wykres od obciążenia wirtualnego na schemacie podstawowym:



Kąt obrotu na podporze A:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,75 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,625 \cdot 1 \right) = -\frac{6,75}{EI}$$

Twierdzenia redukcyjne:

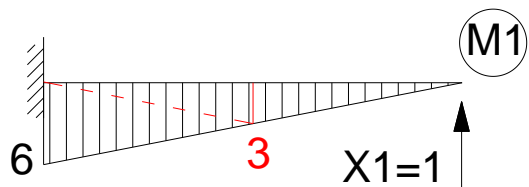
I twierdzenie redukcyjne – tok postępowania przy sprawdzaniu wykresu momentów:

- liczymy stopień statycznej niewyznaczalności układu,
- dobieramy schemat podstawowy statycznie wyznaczalny,
- rysujemy wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych X_1, X_2, \dots, X_n i od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego,
- liczymy współczynniki układu równań metody sił,
- rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy końcowy wykres momentów M
- Całkujemy końcowy wykres momentów otrzymany dla układu statycznie niewyznaczalnego M przez kolejne wykresy od jednostkowych nadliczbowych i sprawdzamy warunki poprawności wykresów:

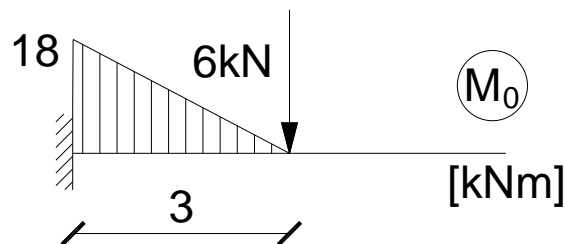
$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = 0, \quad \int_L \frac{MM_2}{EI} dL = 0, \dots, \int_L \frac{MM_n}{EI} dL = 0$$

Zadanie 2 . Sprawdzenie poprawności wykresu momentów z I twierdzenia redukcyjnego.

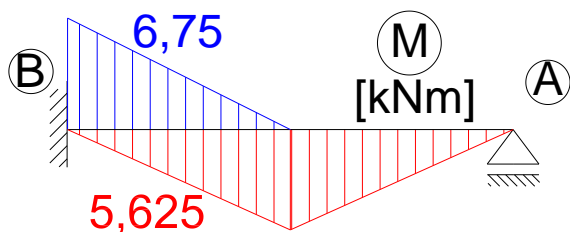
Końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego:



Sprawdzenie z I twierdzenia redukcyjnego:



$$\int_L \frac{MM_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 6,75 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) \right) = 0$$

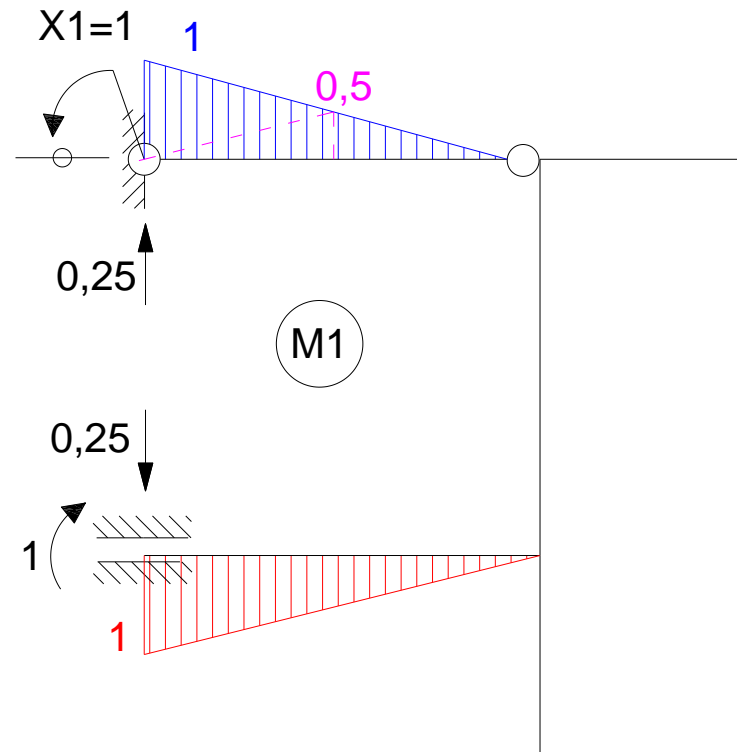
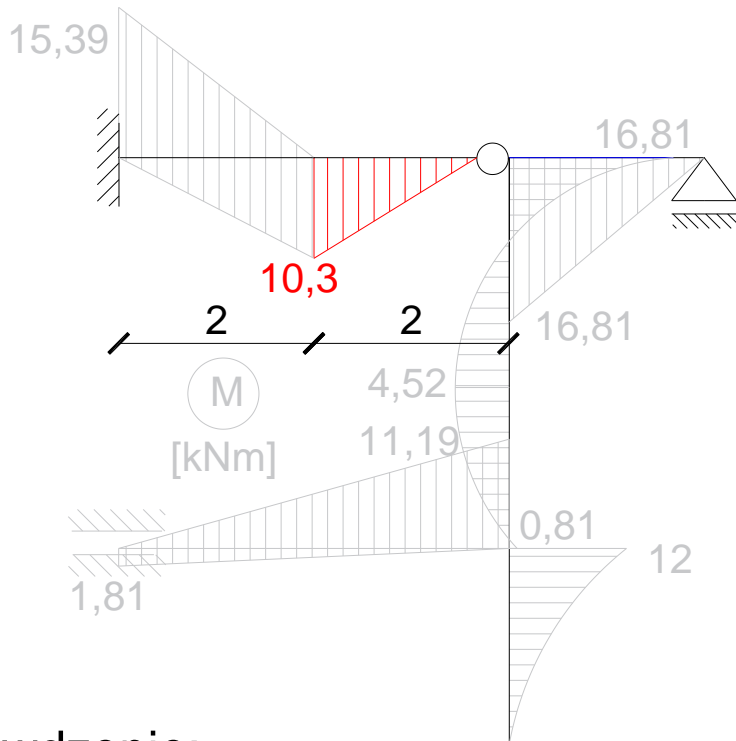


$$M_B = 6 \cdot 1,875 - 18 = -6,75 \text{ kNm}$$

$$M_P = 3 \cdot 1,875 = 5,625 \text{ kNm}$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

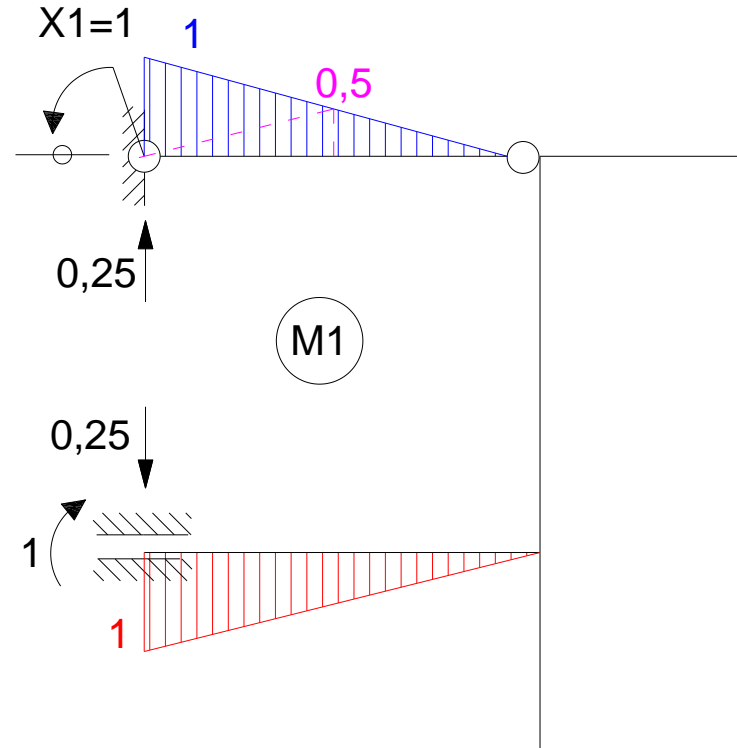
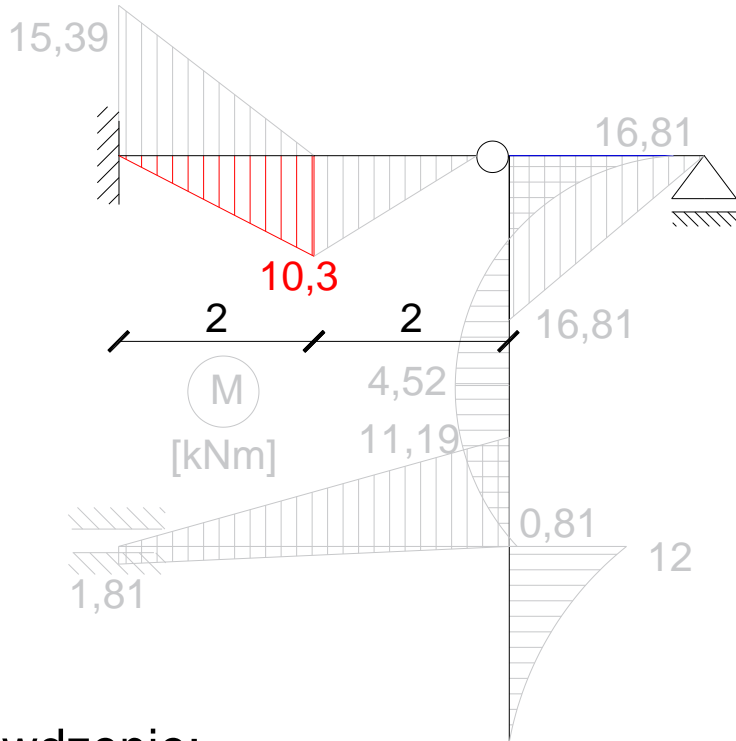


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

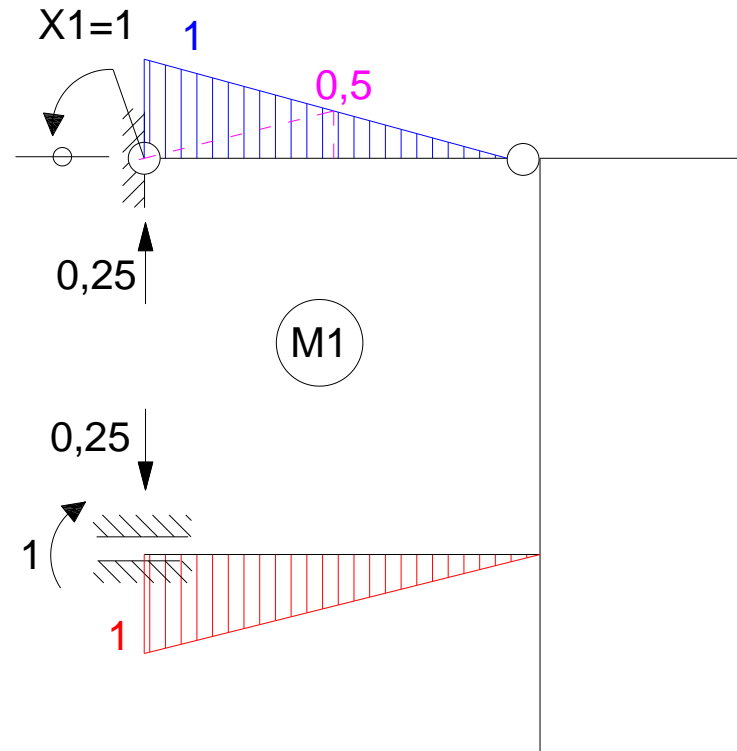
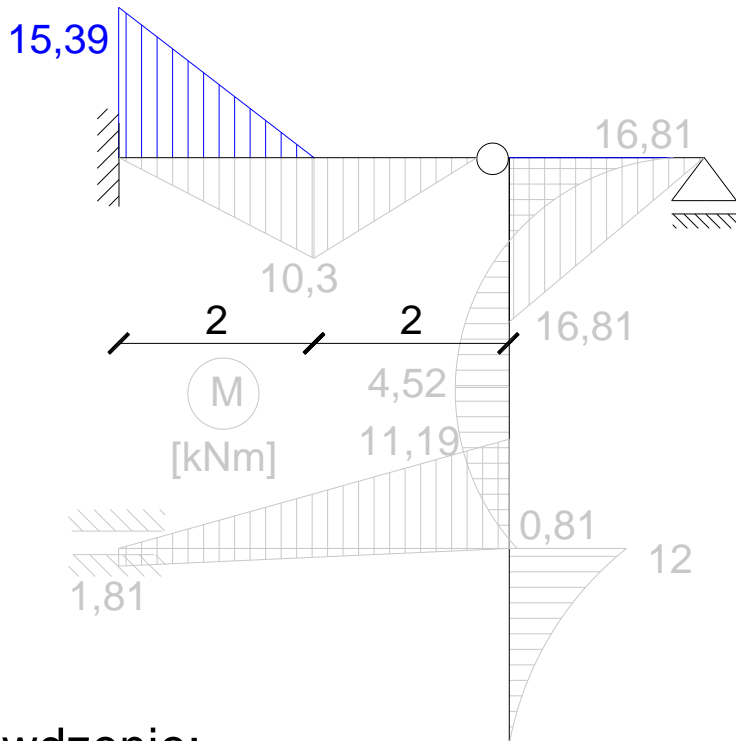


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



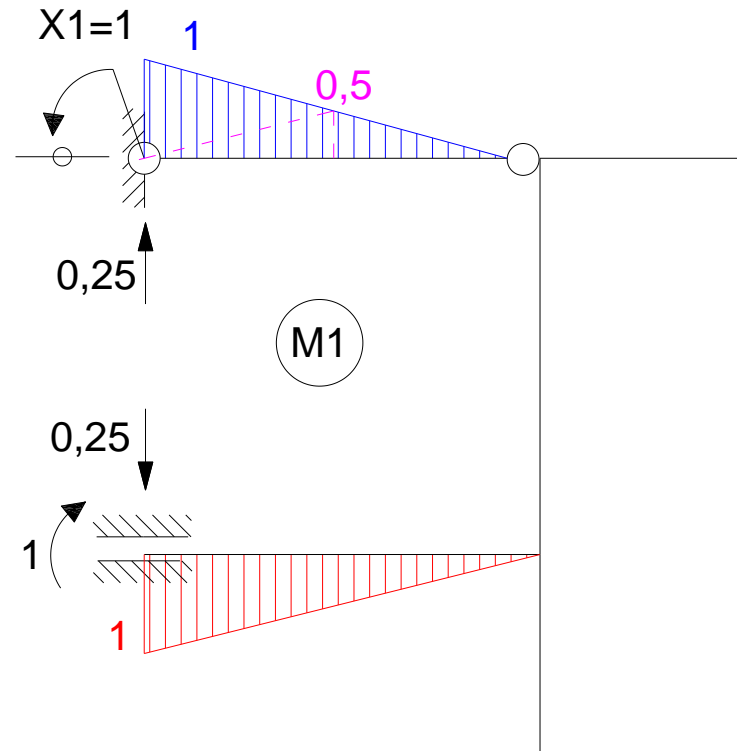
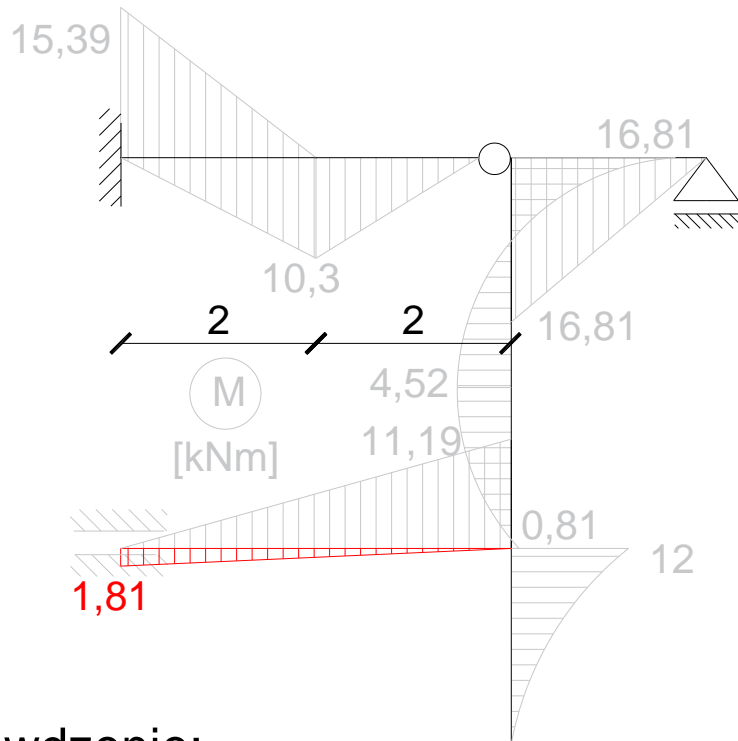
Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 15,39 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) \right)$$

+

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

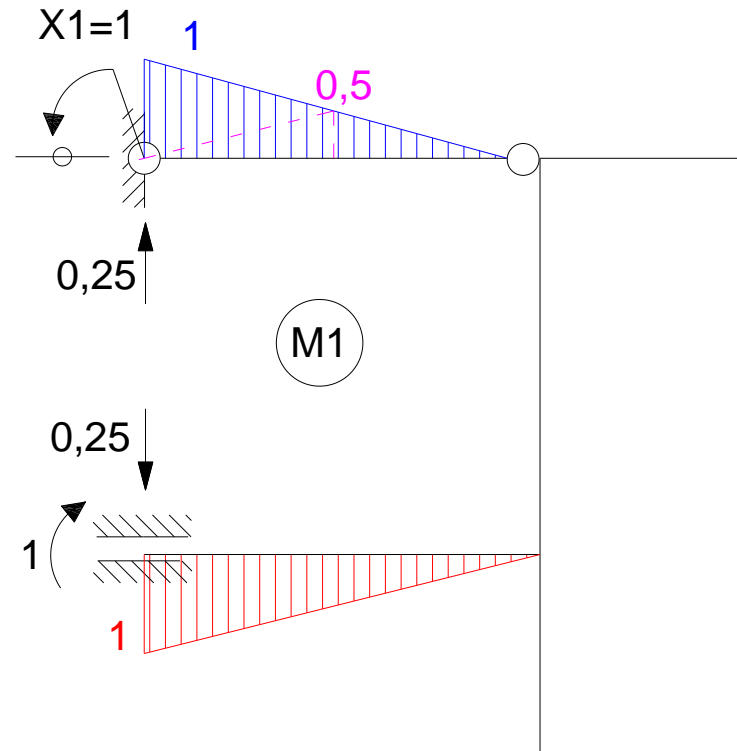
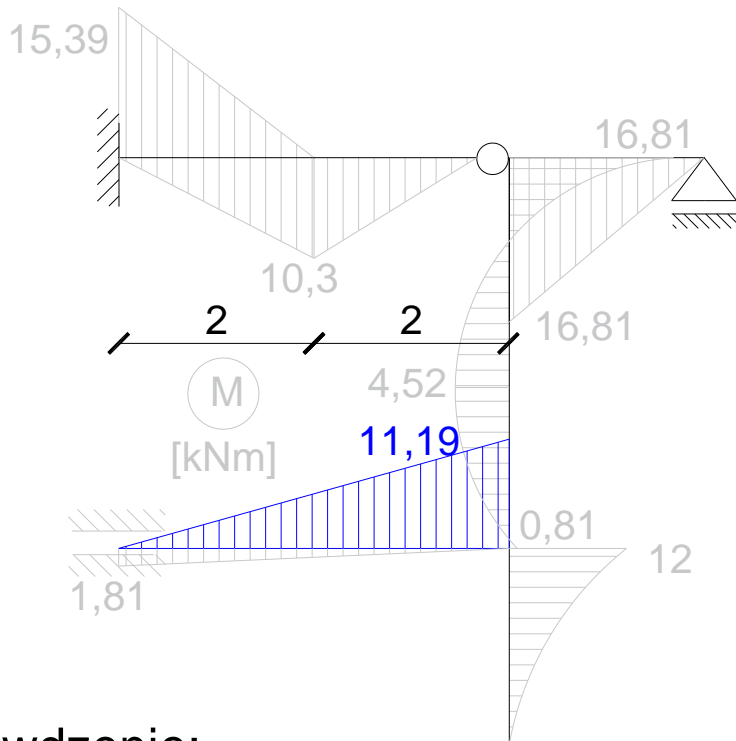


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 15,39 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,81 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

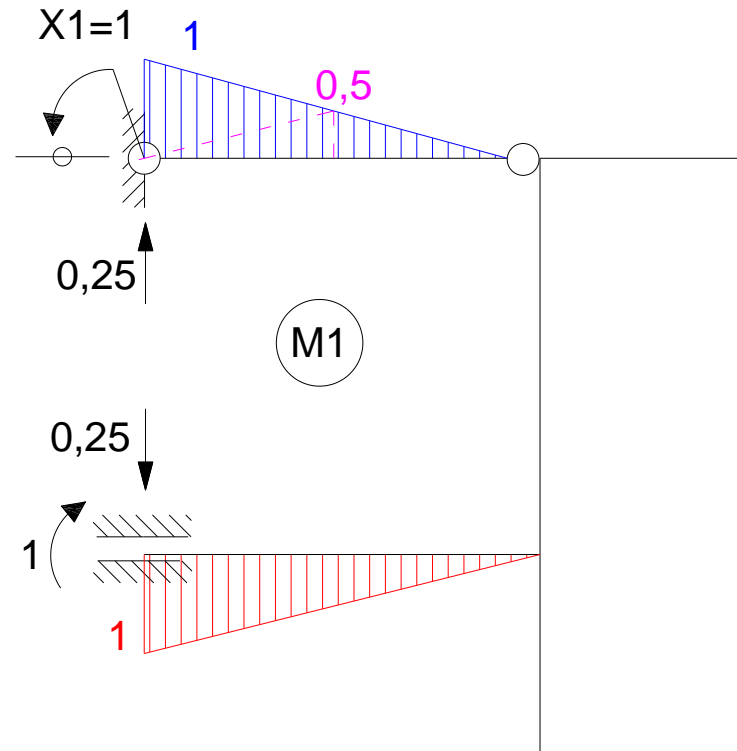
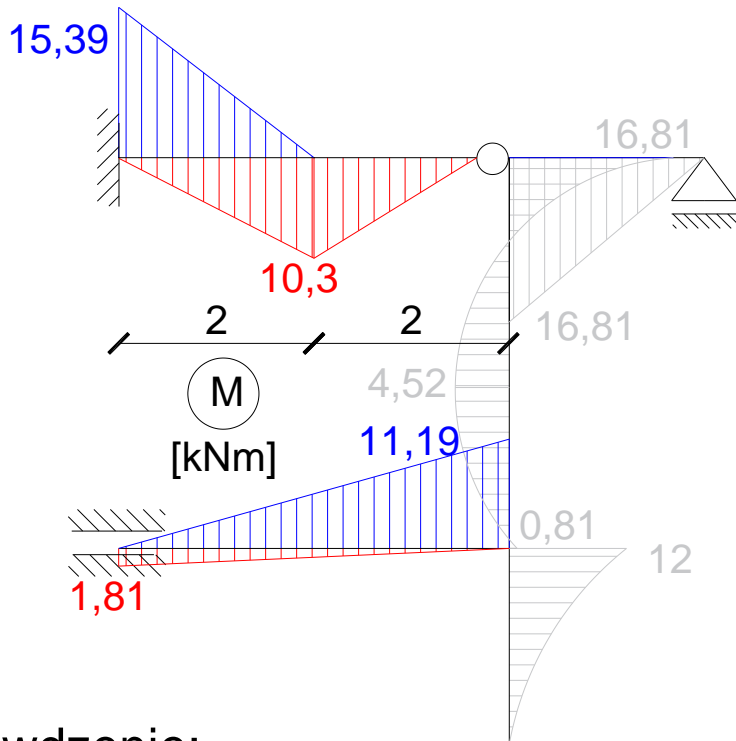


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 15,39 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,81 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 11,19 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

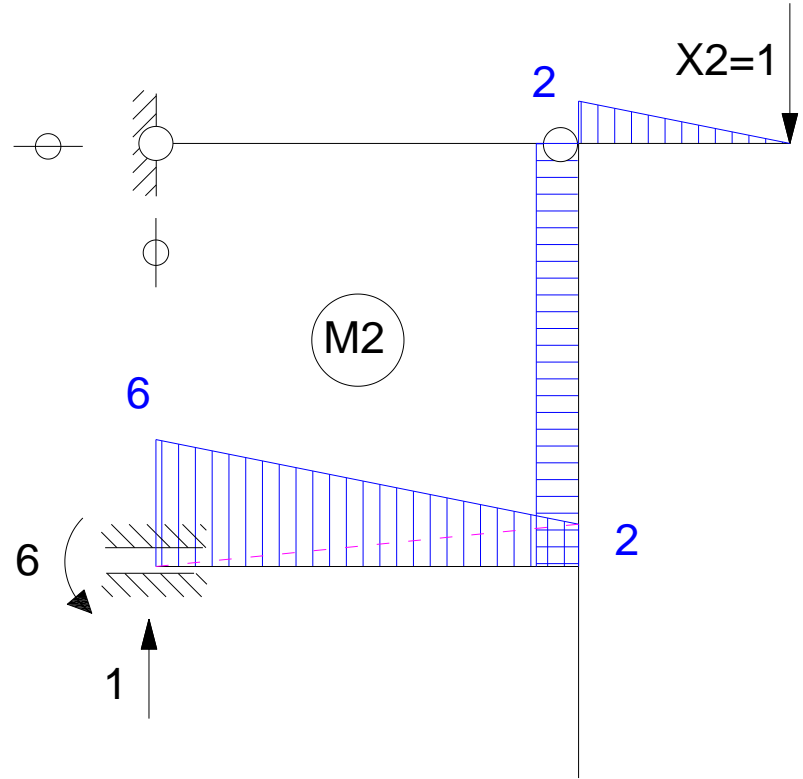
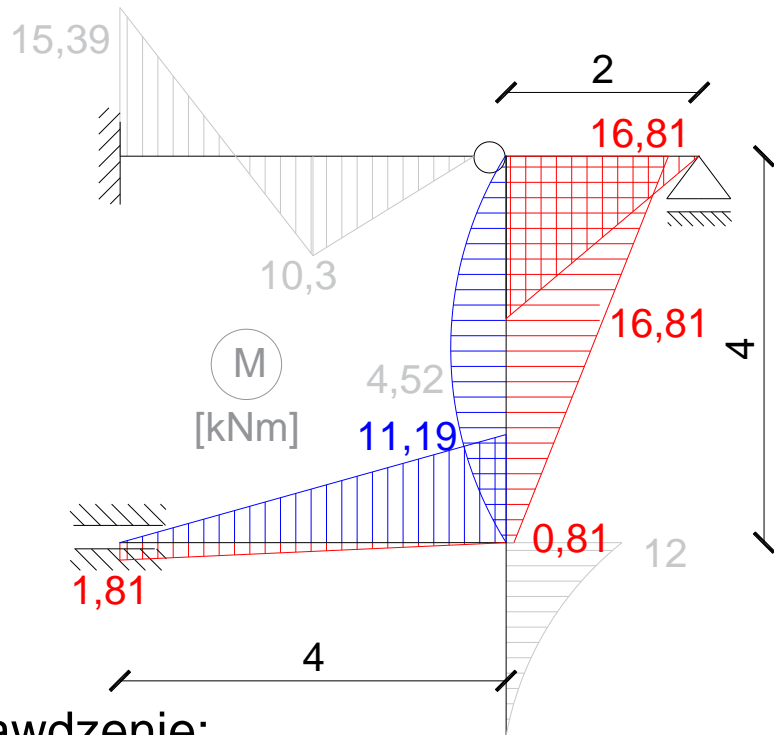


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_1}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 15,39 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) \right) \\ + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,81 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 11,19 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{0,00166}{EI} \approx 0$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

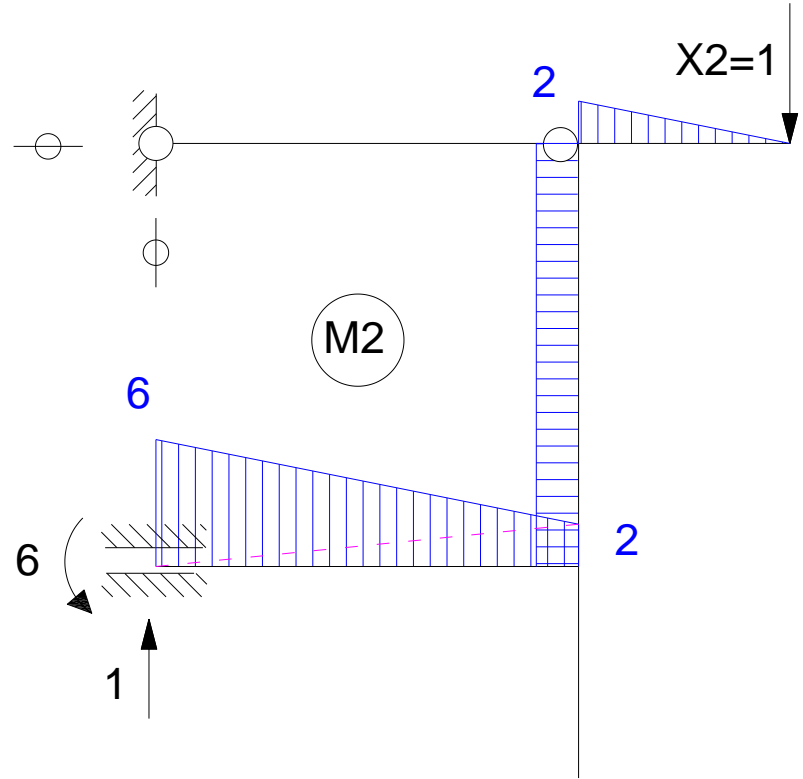
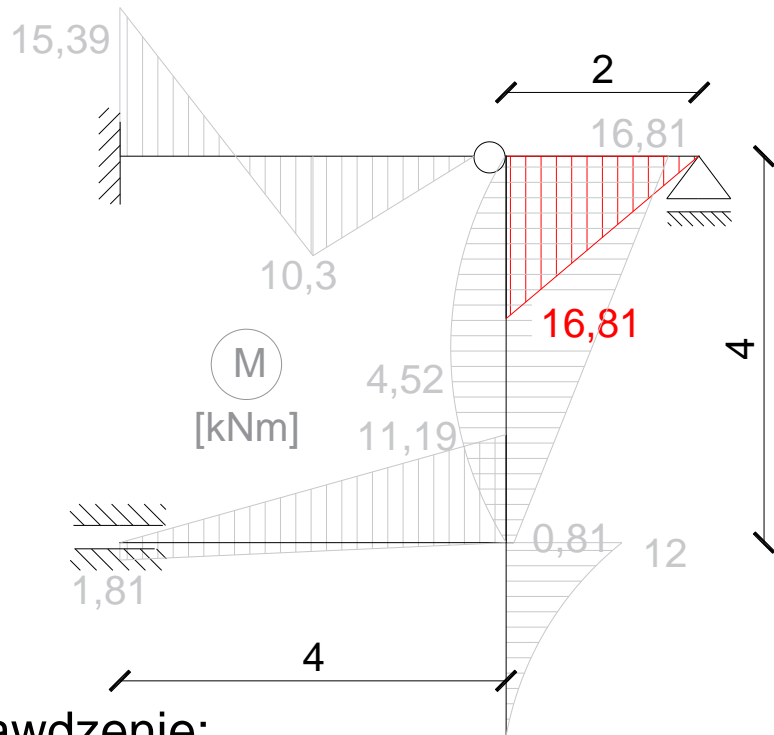


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL =$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

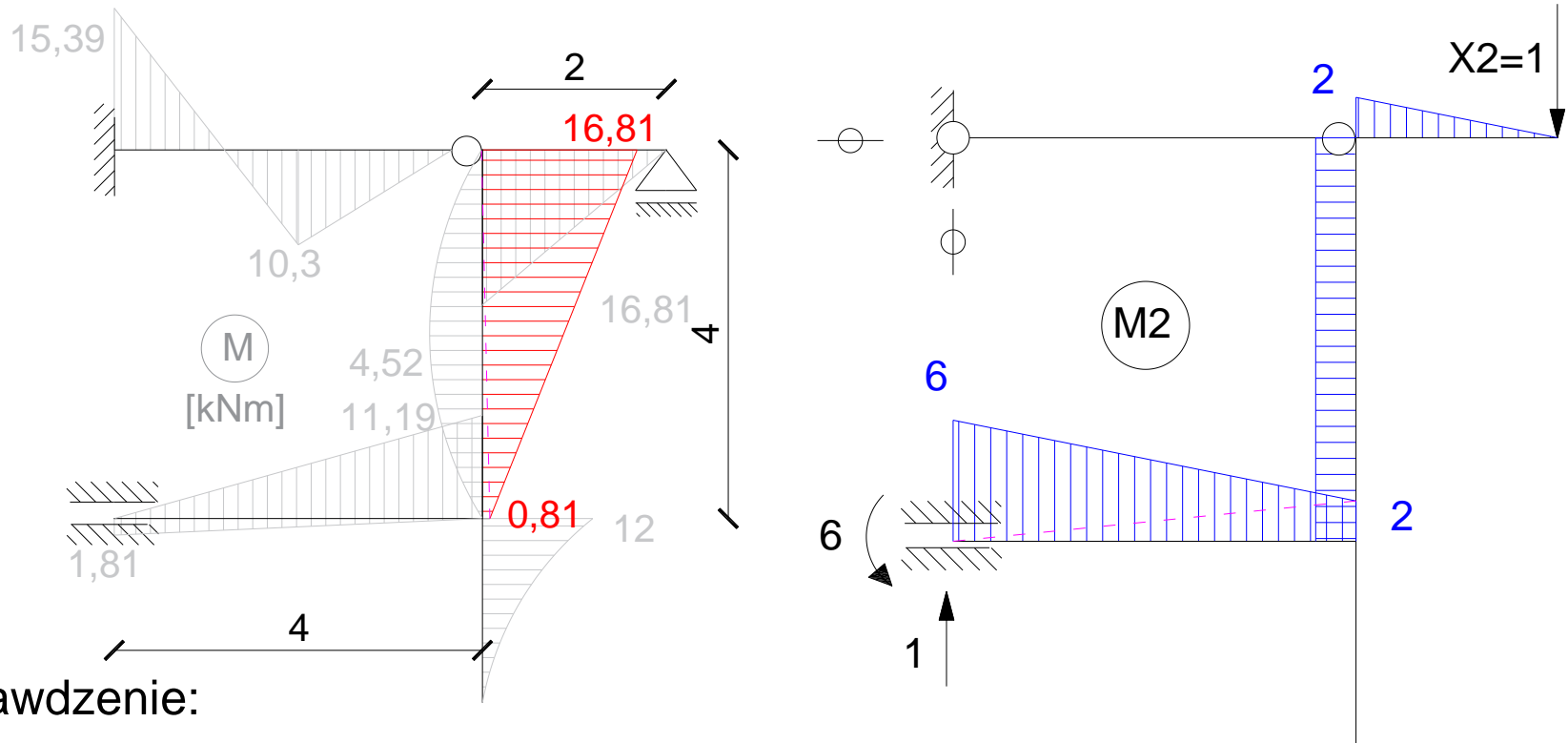


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 16,81 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

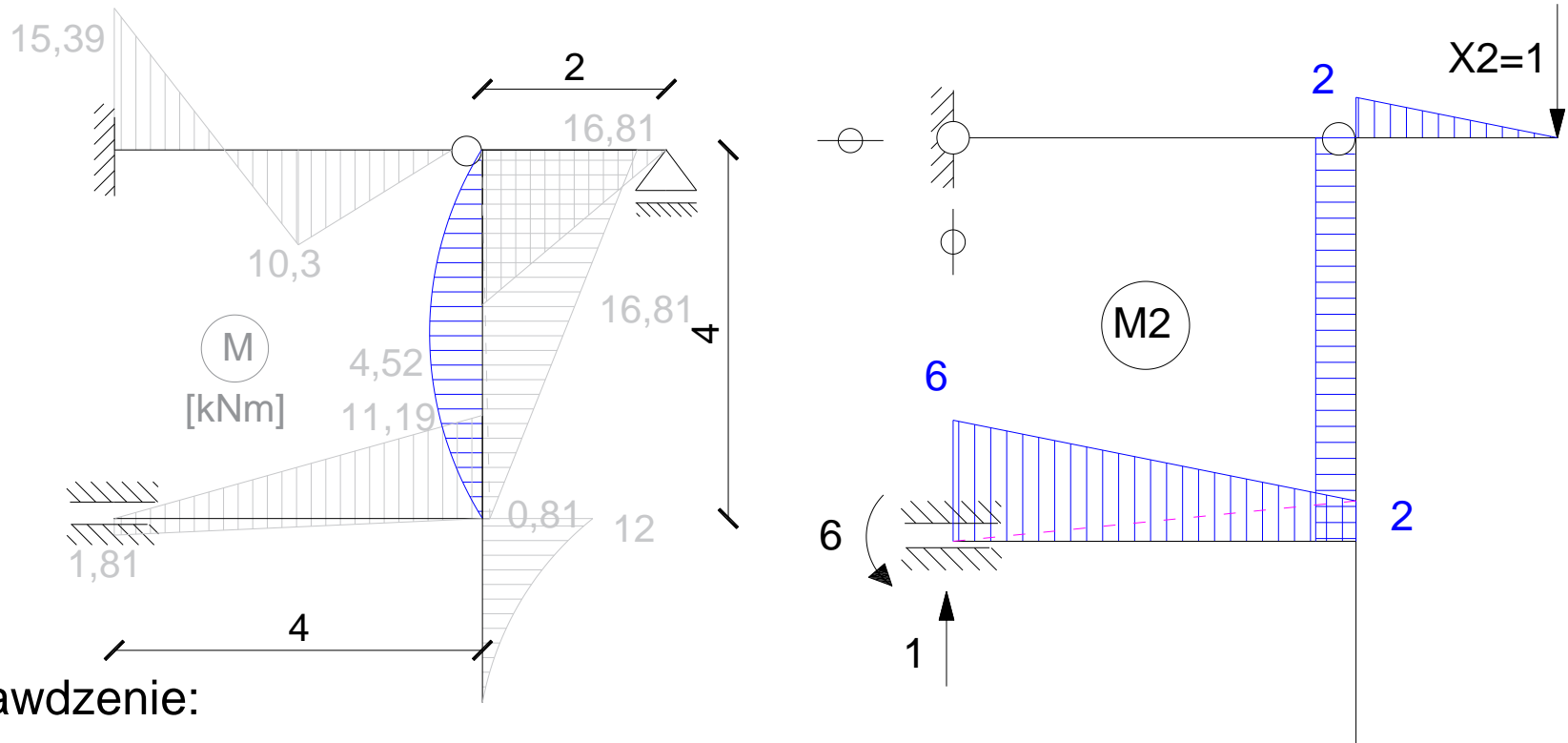


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 16,81 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 16,81 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,81 \cdot 4 \cdot 2 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie

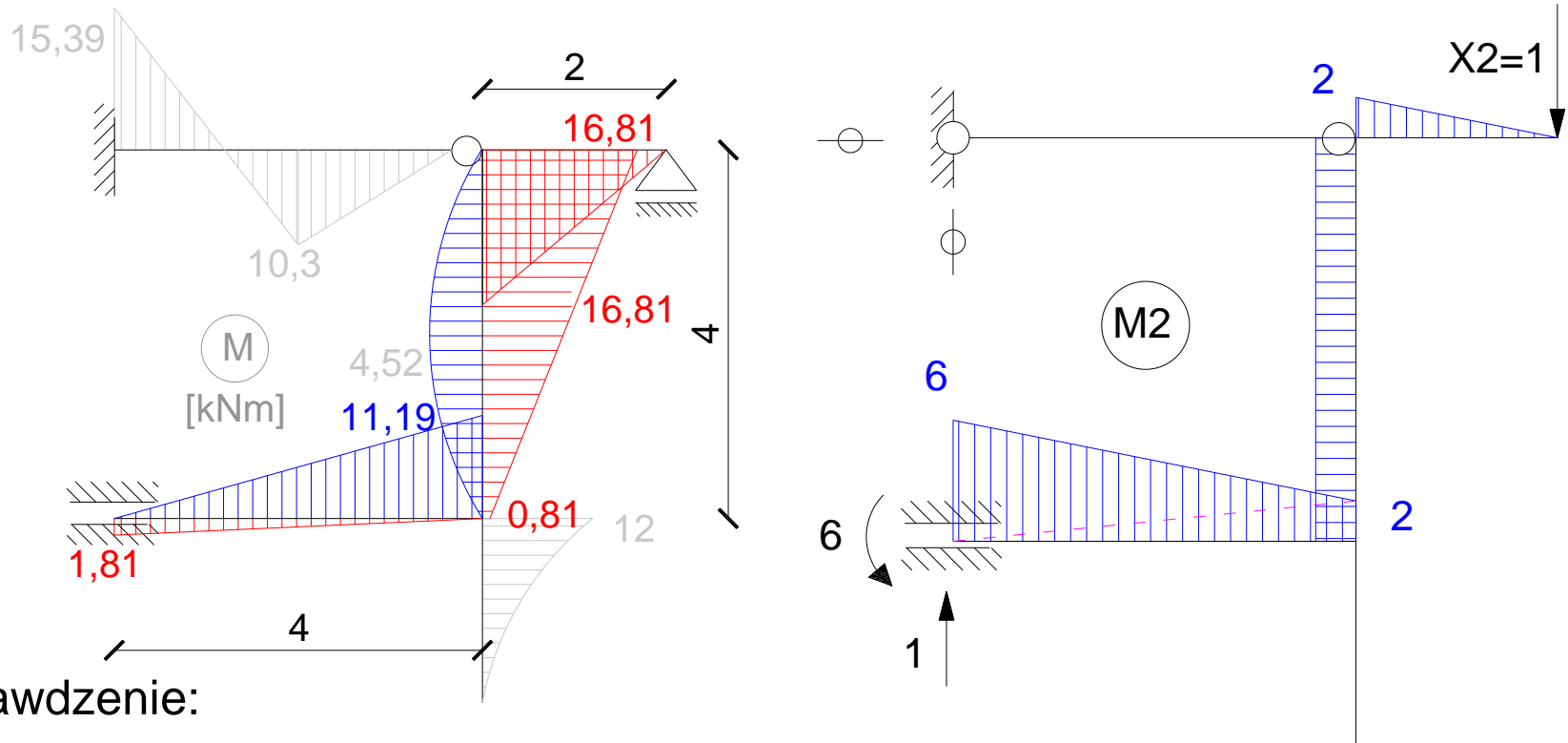


Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 16,81 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 16,81 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,81 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 \right)$$

Twierdzenia redukcyjne:

Zadanie 3. Sprawdzenie wykresu momentów w ramie



Sprawdzenie:

$$\int_L \frac{MM_2}{EI} dL = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 16,81 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 16,81 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,81 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 2 \right)$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1,81 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 11,19 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) = -\frac{0,04}{EI} \approx 0$$

Twierdzenia redukcyjne:

II twierdzenie redukcyjne:

Aby obliczyć przemieszczenie w układzie statycznie niewyznaczalnym, mnożymy wykres momentów od obciążeń rzeczywistych postawionych na schemacie podstawowym statycznie wyznaczalnym $-M_0$, przez końcowy wykres momentów od obciążenia wirtualnego otrzymany dla schematu statycznie niewyznaczalnego $-\bar{M}$.

$$\delta = \int_L \frac{M_0 \bar{M}}{EI} dL$$

Zastosowanie:

- liczenie przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym bez konieczności wyznaczania końcowego wykresu momentów od obciążenia rzeczywistego.

Twierdzenia redukcyjne:

II twierdzenie redukcyjne – tok postępowania przy liczeniu przemieszczeń:

- liczymy stopień statycznej niewyznaczalności układu,
- dobieramy schemat podstawowy statycznie wyznaczalny,
- rysujemy wykresy momentów od jednostkowych nadliczbowych i od obciążenia wirtualnego dla schematu podstawowego,
- liczymy współczynniki układu równań metody sił,
- rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy nadliczbowe,
- rysujemy końcowy wykres momentów dla układu statycznie niewyznaczalnego od obciążenia wirtualnego - \bar{M} ,
- rysujemy wykres momentów od obciążenia zewnętrznego dla schematu podstawowego M_0 ,
- liczymy wartość przemieszczenia:

$$\delta = \int_L \frac{\bar{M} M_0}{EI} dL$$