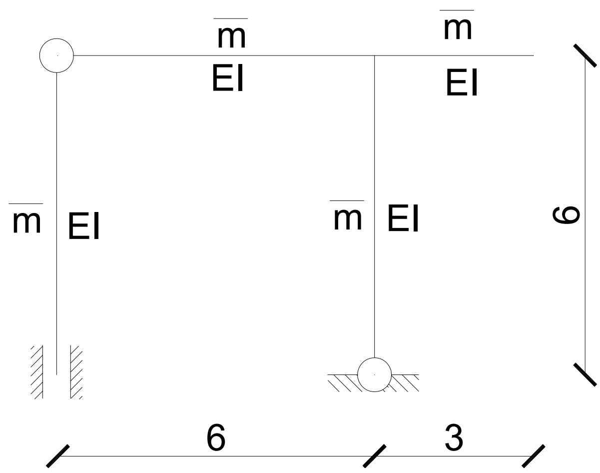
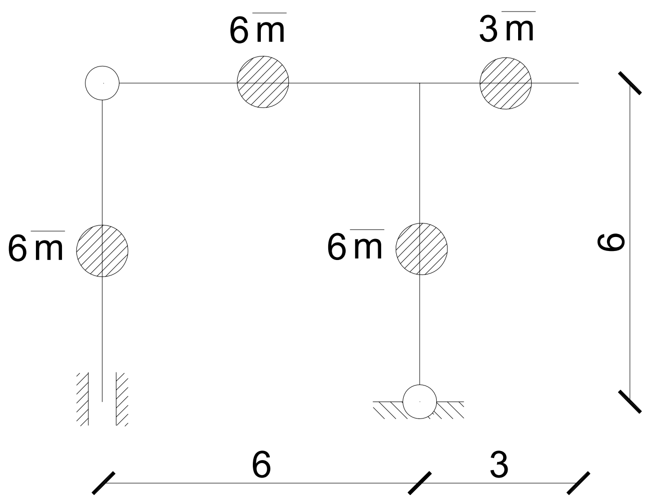
Wyznaczanie częstotliwości własnych dla układów dyskretnych o wielu stopniach swobody

Zadanie: *Zdyskretyzuj układ oszczędnie i wyznacz częstotliwości drgań własnych, jeżeli E=205GPa, I=490,9cm⁴,* $\overline{m}$ *=61,654kg/mb.*

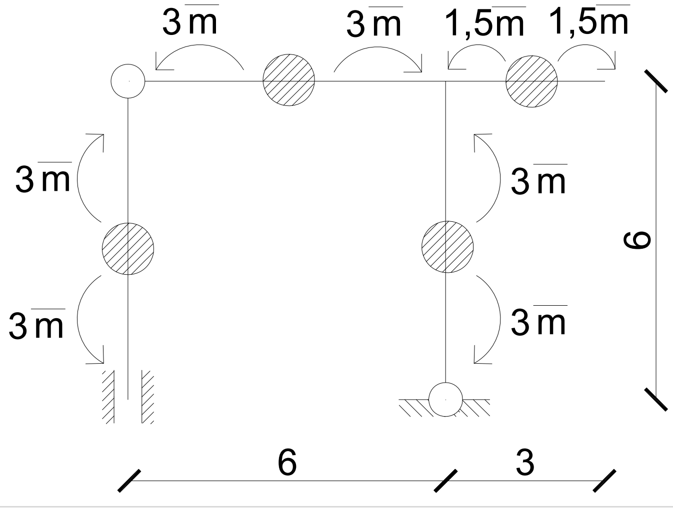


Dyskretyzacja układu:

- wyznaczenie mas poszczególnych prętów między węzłami:

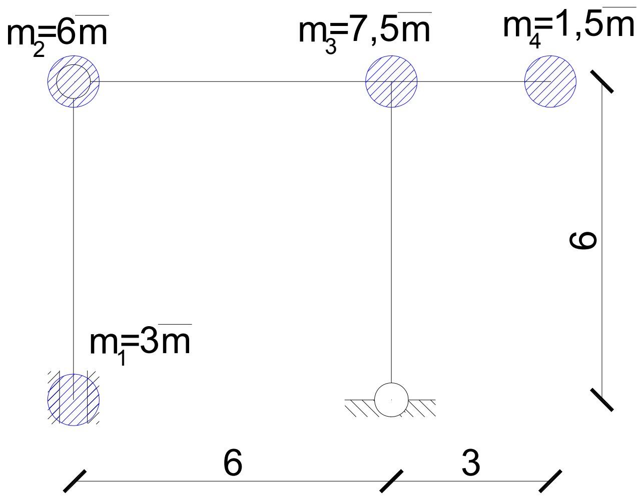


- sprowadzenie mas po połowie do węzłów:



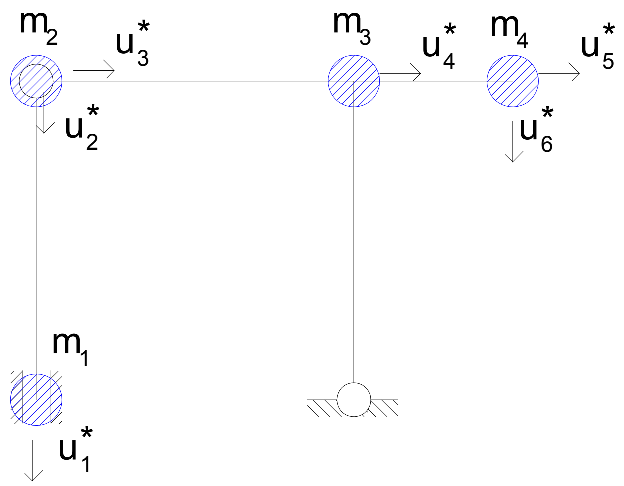
dr inż. Hanna Weber

- oznaczenie mas węzłowych (pod uwagę bierzemy tylko masy doznające przemieszczeń):



$$m_1 = 3 \cdot \overline{m} = 3 \cdot 61{,}654 = 184{,}96\text{kg}$$
$$m_2 = 6 \cdot \overline{m} = 6 \cdot 61{,}654 = 369{,}924\text{kg}$$
$$m_3 = 7{,}5 \cdot \overline{m} = 7{,}5 \cdot 61{,}654 = 462{,}405\text{kg}$$
$$m_4 = 1{,}5 \cdot \overline{m} = 1{,}5 \cdot 61{,}654 = 92{,}481\text{kg}$$

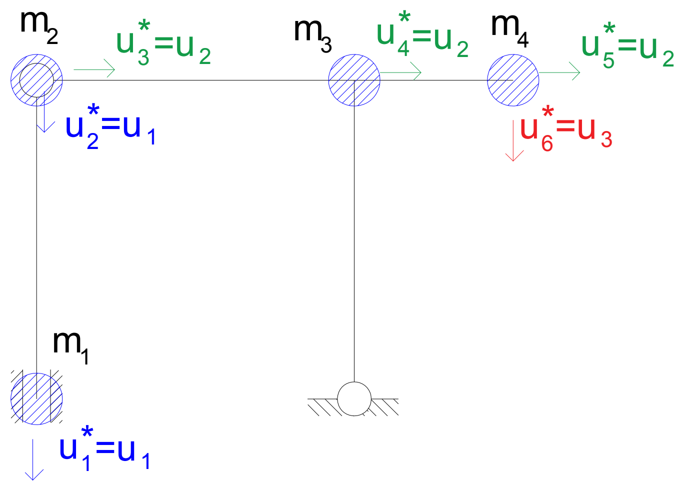
- określenie możliwych przemieszczeń dla poszczególnych mas:



Wektor przemieszczeń węzłowych mas:

$$u^* = \begin{bmatrix} u^*_1 \\ u^*_2 \\ u^*_3 \\ u^*_4 \\ u^*_5 \\ u^*_6 \end{bmatrix}$$

- ustalenie przemieszczeń niezależnych w układzie – na podstawie założenia o braku zmiany długości poszczególnych prętów ramy:



Wektor przemieszczeń niezależnych w układzie:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć częstotliwości własne układu dyskretnego o wielu stopniach swobody, korzystamy z równania:

$$\det(I - \omega^2 FM) = 0\,,$$

gdzie:
- I – macierz jednostkowa,
- ω^2 - wartości własne
- F – macierz podatności w bazie przemieszczeń niezależnych,
- M – macierz mas w bazie przemieszczeń niezależnych.

<u>Macierz mas –</u> na głównej przekątnej zawiera masy odpowiadające poszczególnym przemieszczeniom niezależnym zgodnie z wektorem u, pozostałe elementy są zerami:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 + m_4 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 554{,}884 & 0 & 0 \\ 0 & 924{,}806 & 0 \\ 0 & 0 & 92{,}481 \end{bmatrix}$$

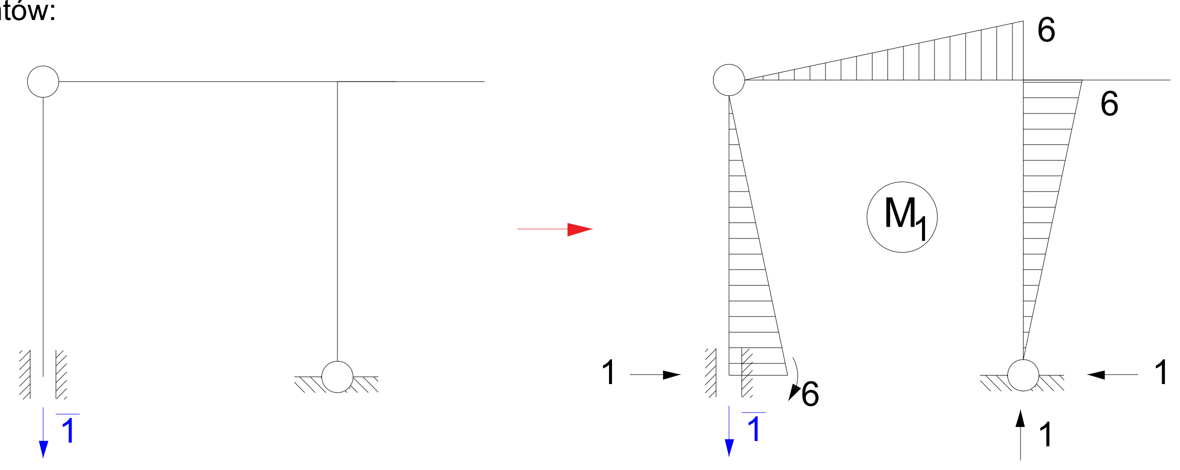
<u>Macierz podatności :</u>

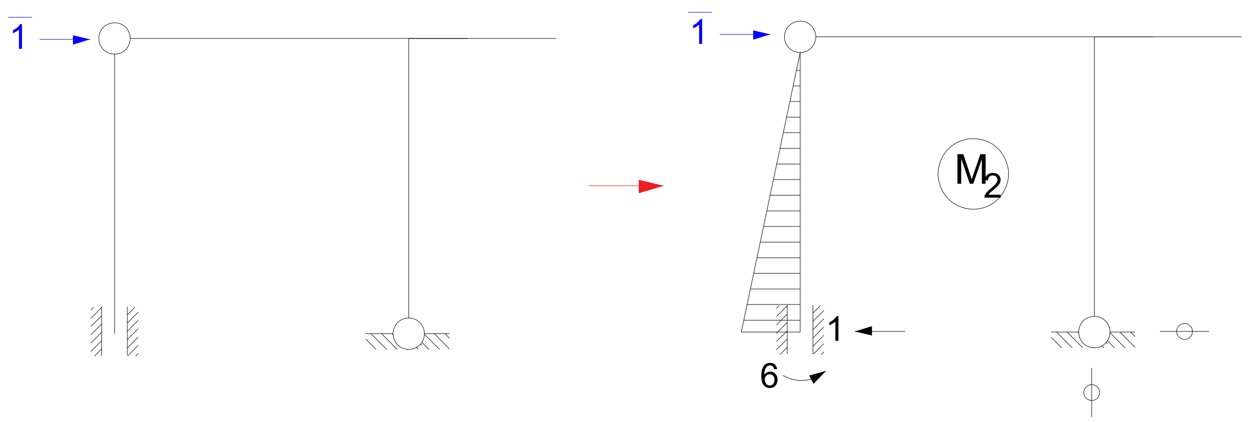
- dla układu o trzech przemieszczeniach niezależnych macierz F ma postać:

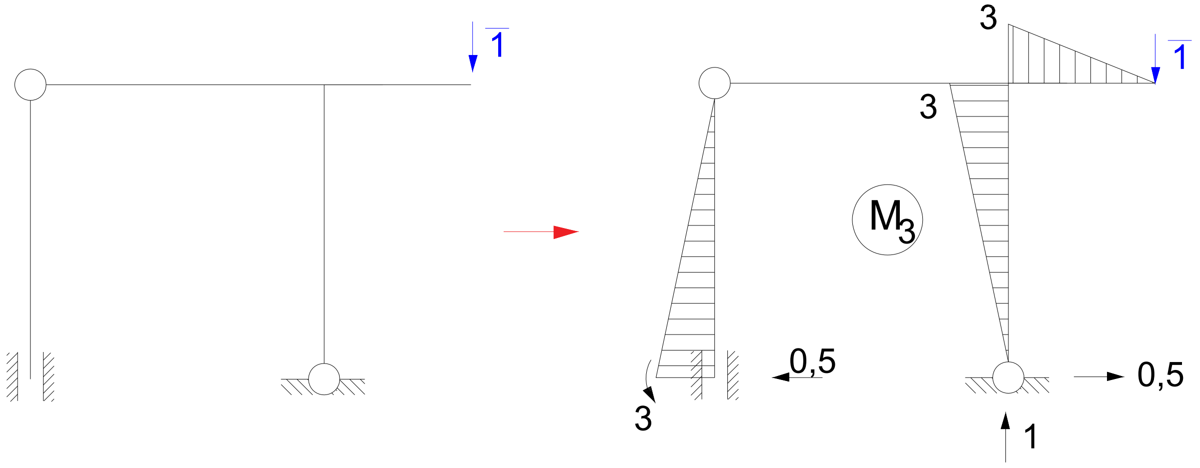
$$F = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

<u>Wyznaczenie współczynników macierzy podatności:</u>

- stawiamy jednostkowe obciążenie na kierunkach kolejnych stopni swobody i wyznaczamy wykresy momentów:







- współczynniki macierzy podatności:

$$\delta_{11}=\int_L \frac{M_1\cdot M_1}{EI}dL=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6\right)=\frac{216}{EI}$$

$$\delta_{12}=\int_L \frac{M_1\cdot M_2}{EI}dL=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6\right)=-\frac{72}{EI}=\delta_{21}$$

$$\delta_{13}=\int_L \frac{M_1\cdot M_3}{EI}dL=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\right)=-\frac{72}{EI}=\delta_{31}$$

$$\delta_{22}=\int_L \frac{M_2\cdot M_2}{EI}dL=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 6\right)=\frac{72}{EI}$$

$$\delta_{23}=\int_L \frac{M_2\cdot M_3}{EI}dL=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\right)=\frac{36}{EI}=\delta_{32}$$

$$\delta_{33}=\int_L \frac{M_3\cdot M_3}{EI}dL=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\right)=\frac{45}{EI}$$

Macierz podatności:

$$F=\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}216 & -72 & -72\\ -72 & 72 & 36\\ -72 & 36 & 45\end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy podatności i macierzy mas

$$FM=\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}216 & -72 & -72\\ -72 & 72 & 36\\ -72 & 36 & 45\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}554,884 & 0 & 0\\ 0 & 924,806 & 0\\ 0 & 0 & 92,481\end{bmatrix}=\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}1,199\cdot 10^5 & -6,659\cdot 10^4 & -6,659\cdot 10^3\\ -3,995\cdot 10^4 & 6,659\cdot 10^4 & 3,329\cdot 10^3\\ -3,995\cdot 10^4 & 3,329\cdot 10^4 & 4,162\cdot 10^3\end{bmatrix}$$

Podstawiając do równania:

$$\det(I-\omega^2 FM)=\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{\omega^2}{EI}\begin{bmatrix}1{,}199\cdot 10^5 & -6{,}659\cdot 10^4 & -6{,}659\cdot 10^3\\ -3{,}995\cdot 10^4 & 6{,}659\cdot 10^4 & 3{,}329\cdot 10^3\\ -3{,}995\cdot 10^4 & 3{,}329\cdot 10^4 & 4{,}162\cdot 10^3\end{bmatrix}\right)=0$$

i wprowadzając założenie $\lambda=\frac{\omega^2}{EI}$, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix}1-1{,}199\cdot 10^5\lambda & 6{,}659\cdot 10^4\lambda & 6{,}659\cdot 10^3\lambda\\ 3{,}995\cdot 10^4\lambda & 1-6{,}659\cdot 10^4\lambda & -3{,}329\cdot 10^3\lambda\\ 3{,}995\cdot 10^4\lambda & -3{,}329\cdot 10^4\lambda & 1-4{,}162\cdot 10^3\lambda\end{vmatrix}=0$$

Obliczenie wyznacznika daje wielomian trzeciego stopnia w postaci:

$$-8{,}8566837118364387562\cdot 10^{12}\cdot\lambda^3+5{,}7194767314961579756\cdot 10^9\cdot\lambda^2-190602{,}5861382421062\cdot\lambda+1{,}0=0$$

Rozwiązaniem wielomianu są trzy pierwiastki:

$$\lambda_1=0{,}0000065025461887910945535$$

$$\lambda_2=0{,}000028425550444126550854$$

$$\lambda_3=0{,}00061085275290249 16975$$

Wyznaczenie kolejnych częstotliwości drgań własnych:

$$\lambda=\frac{\omega^2}{EI}\rightarrow\omega=\sqrt{\lambda\cdot E\cdot I}$$

$$\omega_1=\sqrt{\lambda_1\cdot E\cdot I}=\sqrt{0{,}0000065025461887910945535\cdot 205\cdot 10^9\cdot 490{,}9\cdot 10^{-8}}=2{,}558\mathrm{rad/s}$$

$$\omega_2=\sqrt{\lambda_2\cdot E\cdot I}=\sqrt{0{,}000028425550444126550854\cdot 205\cdot 10^9\cdot 490{,}9\cdot 10^{-8}}=5{,}348\mathrm{rad/s}$$

$$\omega_3=\sqrt{\lambda_3\cdot E\cdot I}=\sqrt{0{,}0006108527529024916975\cdot 205\cdot 10^9\cdot 490{,}9\cdot 10^{-8}}=24{,}793\mathrm{rad/s}$$